

## 变精度模型构建的知识结构

黄传义<sup>1</sup>,黄韩亮<sup>1,2\*</sup>,杨竞菁<sup>3</sup>,王启君<sup>1</sup>,李进金<sup>1,2,3</sup>

(1. 闽南师范大学 数学与统计学院,福建 漳州 363000;

2. 福建省粒计算及其应用重点实验室,福建 漳州 363000;

3. 泉州师范学院 数学与计算机科学学院,福建 泉州 362000)

**摘要:**如何构建知识结构是知识空间理论研究的热点。 $\alpha$ -变精度模型有效融合析取和合取两种模型构建知识结构。本文基于 $\alpha$ -变精度模型提出了三种 $\gamma$ -变精度模型,探讨了其构建知识结构的性质,并研究了四种变精度模型之间的联系;其次,本文通过研究矩阵乘法与技能包含度的关系,提出了基于变精度模型的矩阵方法来构建知识结构,并设计了相应算法;最后,选取七个数据集进行实验,对比了本文算法与变精度模型现有算法在构建知识结构上的性能,实验结果显示,本文算法明显减少了运行时间,特别在处理较大数据集时更为明显。

**关键词:**知识空间理论;技能映射;析取模型;合取模型

**中图分类号:**TP182 **文献标志码:**A **文章编号:**0253-2395(2025)01-0043-12

## Knowledge Structures Delineated by Variable Precision Models

HUANG Chuanyi<sup>1</sup>, HUANG Hanliang<sup>1,2\*</sup>, YANG Jingjing<sup>3</sup>, WANG Qijun<sup>1</sup>, LI Jinjin<sup>1,2,3</sup>

(1. School of Mathematics and Statistics, Minnan Normal University, Zhangzhou 363000, China;

2. Fujian Key Laboratory of Granular Computing and Applications, Zhangzhou 363000, China;

3. School of Mathematics and Computer Science, Quanzhou Normal University, Quanzhou 362000, China)

**Abstract:** The construction of knowledge structures is a focal point in the knowledge space theory. The  $\alpha$ -variable precision model effectively integrates the disjunctive and conjunctive models to construct knowledge structure. This paper proposes three types of  $\gamma$ -variable precision models based on the  $\alpha$ -variable precision model, explores the properties of the knowledge structures they construct, and investigates the relationships among the four types of variable precision models. Furthermore, we develop a matrix method based on variable precision models to construct knowledge structures by studying the relationship between matrix multiplication and skill inclusion degree and design a corresponding algorithm. Finally, seven datasets are selected for experimentation to compare the performance of the algorithm in this paper with existing algorithms of variable precision models in constructing knowledge structures. The experimental results show that our algorithm significantly reduces the running time. This advantage is particularly evident when dealing with larger datasets.

**Key words:** knowledge space theory; skill map; disjunctive model; conjunctive model

收稿日期:2024-06-09;接受日期:2024-10-24

基金项目:国家自然科学基金(12271191;11871259);福建省自然科学基金(2023J01122;2023J01125;2023J05175;2022J01306;2022J05169;2021J01984)

作者简介:黄传义(1999-),男,湖北十堰人,硕士研究生,研究方向为知识空间理论。E-mail:13035272800@163.com

\*通信作者:黄韩亮(HUANG Hanliang),E-mail:huanghl@mnnu.edu.cn

引文格式:黄传义,黄韩亮,杨竞菁,等.变精度模型构建的知识结构[J].山西大学学报(自然科学版),2025,48(1):43-54. DOI:10.13451/j.sxu.ns.2024135.

## 0 引言

知识空间理论(Knowledge Space Theory, KST)作为数学心理学的一种新范式由 Doignon 和 Fal-magne 于 1985 年提出<sup>[1-3]</sup>。该理论的最初目的是建立一个有效的知识评估机制。目前,该理论为知识评估提供了严格的数学基础,并被成功应用于辅助学习和自适应测试等领域<sup>[4-6]</sup>。自 1985 年以来,除了 Doignon 和 Fal-magne 之外,其他研究人员也对 KST 进行了扩展研究<sup>[7-10]</sup>,更多关于 KST 的发展和研究的问題,李金海等<sup>[11]</sup>做了详尽的综述研究。

如何构建知识结构是 KST 的核心内容。目前有专家问询<sup>[12]</sup>、数据驱动<sup>[13-14]</sup>、技能映射<sup>[15]</sup>等构建知识结构的方法。围绕这一问题,许多学者结合其他学科方法来构建知识结构。通过形式概念分析理论与 KST 相结合, Rusch 和 Wille<sup>[16]</sup>提出了利用形式背景构建知识结构的方法。李进金等<sup>[17]</sup>基于知识基,提出了形式背景构建知识结构的新方法,进一步丰富了形式概念分析与 KST 的联系。姚一豫等<sup>[18]</sup>利用粗糙集理论中的近似思想构建知识结构。周银凤等基于技能映射与技能背景的对应关系,从析取模型和合取模型两方面,讨论知识结构的构建问題<sup>[19-20]</sup>。但这些方法仅能获得个体可能的知识状态,无法对个体掌握的知识情况进行评价。

一些学者将 KST 推广到了基于能力的知识空间理论(Competence based KST, Cb-KST)<sup>[21-24]</sup>。技能是解决问题的基本要素,一般来说,在回答了几个问题之后,学生的知识状态就会从他们回答这些问题的能力中显现出来,于是可以通过分析问题和技能之间的相关性来构建知识结构。Doignon<sup>[15]</sup>于 1994 年提出了技能映射的析取模型和合取模型来构建知识结构。析取模型表示若个体掌握了与问题相关的一个技能或方法就能解决该问题;合取模型表示个体必须掌握与问题相关的所有技能或方法才能解决该问题。故析取与合取模型的要求过于极端。

假设学生学习了解一元二次方程的三种方法,即配方法、公式法、因式分解法。表 1 是针对解一元二次方程的题目及对应的解題方法。

表 1 一元二次方程与相应解法

Table 1 Quadratic equation of one variable and its solution methods

题号	题目	解題方法
a	$x^2 + 2x + 1 = 0$	配方法
b	$13x^2 + 16x - 19 = 0$	公式法
c	$4x^2 - 7x - 2 = 0$	配方法,公式法
d	$2x^2 + 5x + 3 = 0$	配方法,公式法,因式分解法

a 题:其他两种方法也能解答该题,但配方法是解决该题的合理方法;

b 题:因式分解法不能解答,且各项系数较大,用配方法导致计算量增大,公式法更为合理;

c 题:因式分解法不能解答,其他两种方法解决都是合理的;

d 题:三种方法解答都是合理的。

教学活动中可将学生学习解一元二次方程的过程分为三个阶段:

阶段一:学生刚学完解一元二次方程的三种方法,学生按照要求正确解答各题则认为学生达到教学要求;

阶段二:经过一段时间的练习后,教师对于 c、d 两题的要求会提高(用两种方法解答题目);

阶段三:在期末复习时教师对 c 题要求两种方法解答, b 题要求三种方法解答。

通过示例,学生对知识的学习分为多个阶段,随着对知识认知的不断深入,每一阶段的知识结构可能发生变化。个体解决问题只需掌握与问题相关的部分技能或方法,于是杨桃丽等<sup>[25-26]</sup>提出建立  $\alpha$ -变精度模型来构建知识结构。然而,若模型的阈值或配置发生变化,仅通过  $\alpha$ -变精度模型无法判断构建的知识结构是否发生变化,这使得模型发生变化时,构建知识结构的的效果是否与  $\alpha$ -变精度模型相同无从而知。因此,需对模型做进一步探究。

因此,本文基于 $\alpha$ -变精度模型提出了三种 $\gamma$ -变精度模型来构建知识结构。文章主要结构如下:第1节主要回顾KST的一些基本概念;第2节提出了三种 $\gamma$ -变精度模型构建知识结构,并研究了三种 $\gamma$ -变精度模型构建知识结构的相关性质以及四种变精度模型之间的联系;第3节提出了变精度模型构建知识结构的矩阵方法并设计了相应算法;第4节从UCI数据库中选取了七个数据集进行实验,并验证了本文所提算法的有效性;第5节对本文的结果以及未来的研究方向进行总结与展望。

## 1 预备知识

知识状态是KST的基本概念,个体在理想条件下能正确回答问题集 $Q$ 中的问题全体 $K(K \subseteq Q)$ 称为知识状态(Knowledge State)。

**定义1<sup>[1]</sup>** 设 $Q$ 为有限非空问题集, $\mathcal{K}$ 是由知识状态 $K(K \subseteq Q)$ 构成的集族,且 $\mathcal{K}$ 中至少包含 $\emptyset$ 和 $Q$ ,则 $(Q, \mathcal{K})$ 为知识结构。

设 $(Q, \mathcal{K})$ 是一个知识结构,若 $\forall K_i, K_j \in \mathcal{K}$ ,都有 $K_i \cup K_j \in \mathcal{K}$ ,称 $(Q, \mathcal{K})$ 为知识空间;若 $\forall K_i, K_j \in \mathcal{K}$ 都有 $K_i \cap K_j \in \mathcal{K}$ ,称 $(Q, \mathcal{K})$ 为简单闭包空间。若 $(Q, \mathcal{K})$ 既是知识空间又是简单闭包空间,则称 $(Q, \mathcal{K})$ 为拟序空间。

**定义2<sup>[1]</sup>** 设 $Q, S$ 分别为非空有限的问题集和非空有限的技能集, $\tau$ 是从 $Q$ 到 $2^S \setminus \{\emptyset\}$ 的映射,则称三元组 $(Q, S, \tau)$ 是一个技能映射。

设三元组 $(Q, S, \tau)$ 是一个技能映射,其中 $T \subseteq S$ ,则称 $K = \{q \in Q | \tau(q) \cap T \neq \emptyset\}$ 是由 $T$ 通过析取模型诱导的知识状态; $K = \{q \in Q | \tau(q) \subseteq T\}$ 是由 $T$ 通过合取模型诱导的知识状态。由同一技能映射分别通过析取和合取模型诱导的知识空间和简单闭包空间是对偶的<sup>[15]</sup>。

**定义3<sup>[26]</sup>** 设三元组 $(Q, S, \tau)$ 是一个技能映射, $\forall q \in Q, T \subseteq S$ ,称

$$D(T/\tau(q)) = \frac{|T \cap \tau(q)|}{|\tau(q)|}$$

为 $q$ 关于 $T$ 的技能包含度。将 $D(T/\tau(q))$ 简记为 $\tau_q^T$ 。

**注** 将 $D(\tau_q) = \{\tau_q^T | T \subseteq S\}$ 称为关于问题 $q$ 的技能包含度集, $D(\tau) = \{\tau_q^T | q \in Q, T \subseteq S\}$ 为技能映射 $\tau$ 的技能包含度集。文献[26]中对技能包含度的讨论如下。

由 $Q, S$ 都为非空有限集,则 $\tau$ 的技能包含度集记为 $D(\tau) = \{\beta_1, \dots, \beta_i, \beta_{i+1}, \dots, \beta_n\}$ ,其中 $0 = \beta_1 < \dots < \beta_i < \beta_{i+1} < \dots < \beta_n = 1$ ,有以下性质:

- (1) 对 $q \in Q, T \subseteq S, \tau_q^T = \sum_{s \in T} \tau_q^{(s)}$ ;
- (2) 对 $q \in Q, T \subseteq S, \tau_q^T + \tau_q^{S \setminus T} = 1$ ;
- (3)  $\beta_i + \beta_{n-i+1} = 1$ 。

**例1** 设三元组 $(Q, S, \tau)$ 是一个技能映射,其中 $Q = \{q_1, q_2, q_3\}, S = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}, \tau$ 为 $Q$ 到 $2^S \setminus \{\emptyset\}$ 的技能映射, $\tau(q_1) = \{s_2, s_3\}, \tau(q_2) = \{s_3, s_4\}, \tau(q_3) = \{s_1, s_2, s_3\}$ ,通过计算得到 $q$ 关于 $T$ 的技能包含度 $\tau_q^T$ 如表2,其中 $T$ 为技能集, $Q$ 为问题集, $\tau_q^T$ 为问题 $q$ 关于技能集 $T$ 的技能包含度( $T$ 简写,如 $T = \{s_1, s_4\}$ 记为 $s_1s_4$ )。由表2,可得 $D(\tau_{q_1}) = D(\tau_{q_2}) = \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}, D(\tau_{q_3}) = \left\{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right\}$ ,则 $D(\tau) = \left\{0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1\right\}$ 。

## 2 $\gamma$ -变精度模型与知识结构

基于文献[26]的 $\alpha$ -变精度模型本节提出了三种 $\gamma$ -变精度模型;并研究三种 $\gamma$ -变精度模型构建知识结构的性质,进一步讨论三种 $\gamma$ -变精度模型以及 $\alpha$ -变精度模型所构建知识结构之间的联系。

表2 例1的技能包含度

Table 2 Inclusion degrees of skill in example 1

$T \setminus \tau_q^T \setminus Q$	$q_1$	$q_2$	$q_3$	$T \setminus \tau_q^T \setminus Q$	$q_1$	$q_2$	$q_3$
$\emptyset$	0	0	0	$s_1$	0	0	$\frac{1}{3}$
$s_2$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{3}$	$s_3$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
$s_4$	0	$\frac{1}{2}$	0	$s_1s_2$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{2}{3}$
$s_1s_3$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$s_1s_4$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
$s_2s_3$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$s_2s_4$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
$s_3s_4$	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	$s_1s_2s_3$	1	$\frac{1}{2}$	1
$s_1s_2s_4$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$s_1s_3s_4$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{2}{3}$
$s_2s_3s_4$	1	1	$\frac{2}{3}$	$s_1s_2s_3s_4$	1	1	1

设三元组  $(Q, S, \tau)$  是一个技能映射,  $Q$  与  $S$  分别为非空有限的问题集和技能集, 对  $q \in Q, T \subseteq S, \tau_q^T$  为  $q$  关于  $T$  的技能包含度。对  $\alpha \in (0, 1]$ ,

$$K_T^\alpha = \{q \in Q | \tau_q^T \geq \alpha\}$$

表示  $T$  通过  $\alpha$ -变精度模型诱导的知识状态。记技能映射  $\tau$  通过  $\alpha$ -变精度模型构建的知识结构为  $\mathcal{K}^\alpha = \{K_T^\alpha | T \subseteq S\}$ 。

从模型的角度出发,  $\alpha$ -变精度模型在区间  $(0, 1]$  取值, 若  $\alpha = 0$ , 则  $\forall T \in S$ , 都有  $K_T^0 = Q$ , 表明该模型此时无法构建知识结构。那么阈值的取值范围为  $[0, 1)$  或  $(0, 1)$  时, 构建的知识结构是否会受到影响? 下面将研究模型的建立及其性质。

定义4 设三元组  $(Q, S, \tau)$  为技能映射,  $\tau$  为  $Q$  到  $2^S \setminus \{\emptyset\}$  的技能映射, 对  $q \in Q, T \subseteq S, \gamma_1 \in [0, 1)$ ,

$$L_T^{\gamma_1} = \{q \in Q | \tau_q^T > \gamma_1\}$$

表示  $T$  通过  $\gamma_1$ -变精度模型诱导的知识状态。

定义5 设三元组  $(Q, S, \tau)$  为技能映射,  $\tau$  为  $Q$  到  $2^S \setminus \{\emptyset\}$  的技能映射, 对  $q \in Q, T \subseteq S, \gamma_2 \in (0, 1)$ ,

$$H_T^{\gamma_2} = \{q \in Q | \tau_q^T > \gamma_2\}$$

表示  $T$  通过  $\gamma_2$ -变精度模型诱导的知识状态。

定义6 设三元组  $(Q, S, \tau)$  为技能映射,  $\tau$  为  $Q$  到  $2^S \setminus \{\emptyset\}$  的技能映射, 对  $q \in Q, T \subseteq S, \gamma_3 \in (0, 1)$ ,

$$G_T^{\gamma_3} = \{q \in Q | \tau_q^T \geq \gamma_3\}$$

表示  $T$  通过  $\gamma_3$ -型变精度模型诱导的知识状态。

上述阈值在  $[0, 1)$  和  $(0, 1)$  区间取值的三种变精度模型。  $\gamma_1$ -变精度模型, 若  $\gamma_1$  能取 1, 则  $\forall T \subseteq S, L_T^1 = \emptyset$ , 其不能构建知识结构; 而阈值在  $(0, 1)$  区间上取值时, 上面定义的  $\gamma_2$ -变精度模型与  $\gamma_1$ -变精度模型的不同在于阈值是否取 0,  $\gamma_3$ -变精度模型与  $\alpha$ -变精度模型的区别是阈值是否取 1。接下来, 我们将研究基于上述定义的三种模型在构建知识结构时展现出的相关性质。阈值在区间  $[0, 1]$  取值, 无法定义一个模型, 使得取区间端点时, 都能构建一个知识结构。

定理1 设三元组  $(Q, S, \tau)$  为技能映射,  $\tau$  为  $Q$  到  $2^S \setminus \{\emptyset\}$  的技能映射, 则  $\mathcal{L}^{\gamma_1} = \{L_T^{\gamma_1} | T \subseteq S\}$ ,  $\mathcal{H}^{\gamma_2} = \{H_T^{\gamma_2} | T \subseteq S\}$  与  $\mathcal{G}^{\gamma_3} = \{G_T^{\gamma_3} | T \subseteq S\}$  均为知识结构。

证明 由已知,  $\forall q \in Q$ , 当  $T = \emptyset$  时, 有  $\tau_q^\emptyset = 0$ , 则  $L_\emptyset^{\gamma_1} = H_\emptyset^{\gamma_2} = G_\emptyset^{\gamma_3} = \emptyset$ ; 当  $T = S$  时,  $\tau_q^S = 1$ ,

$L^{\beta_i} = H^{\beta_i} = G^{\beta_i} = Q$ 。故  $\mathcal{L}^{\beta_i}, \mathcal{H}^{\beta_i}, \mathcal{G}^{\beta_i}$  均为知识结构。

**定理2** 设三元组  $(Q, S, \tau)$  是一个技能映射,  $\tau$  为  $Q$  到  $2^S \setminus \{\emptyset\}$  的技能映射,  $D(\tau)$  为技能包含度集。当  $\gamma_1 \in [\beta_i, \beta_{i+1}) (1 \leq i \leq n-1)$  时, 则有  $\mathcal{L}^{\gamma_1} = \mathcal{L}^{\beta_i}$ 。

**证明** 由  $\gamma_1 \in [\beta_i, \beta_{i+1}), \forall T \subseteq S$ , 有  $L_T^{\beta_i} \subseteq L_T^{\gamma_1} = \{q \in Q | \tau_q^T > \gamma_1\}$ , 因  $\beta_i$  与  $\beta_{i+1}$  之间无其他技能包含度值, 则  $L_T^{\gamma_1} = \{q \in Q | \tau_q^T > \beta_i\} = L_T^{\beta_i}$ , 证得  $\mathcal{L}^{\gamma_1} = \mathcal{L}^{\beta_i}$ 。

**定理3** 设三元组  $(Q, S, \tau)$  是一个技能映射,  $\tau$  为  $Q$  到  $2^S \setminus \{\emptyset\}$  的技能映射,  $D(\tau)$  为技能包含度集。当  $\gamma_2 \in [\beta_i, \beta_{i+1}) (2 \leq i \leq n-1)$  时, 则有  $\mathcal{H}^{\gamma_2} = \mathcal{H}^{\beta_i}$ 。

**定理4** 设三元组  $(Q, S, \tau)$  是一个技能映射,  $\tau$  为  $Q$  到  $2^S \setminus \{\emptyset\}$  的技能映射,  $D(\tau)$  为技能包含度集。当  $\gamma_3 \in (\beta_i, \beta_{i+1}] (1 \leq i \leq n-2)$  时, 则有  $\mathcal{G}^{\gamma_3} = \mathcal{G}^{\beta_{i+1}}$ 。

定理3与定理4的证明与定理2证明类似。定理3和定理4中, 未将  $\gamma_2, \gamma_3$  分别在区间  $(\beta_1, \beta_2)$  与  $(\beta_{n-1}, \beta_n)$  一并考虑在内, 是因为两阈值取值范围的特殊性。由上述结论易知  $\forall \gamma_2 \in (\beta_1, \beta_2)$ , 由  $\gamma_2$ -变精度模型构建的知识结构是相同的, 记为  $\mathcal{H}^{\beta_1}$ ; 同样的  $\forall \gamma_3 \in (\beta_{n-1}, \beta_n)$ , 由  $\gamma_3$ -变精度模型构建的知识结构也是相同的, 记为  $\mathcal{G}^{\beta_n}$ 。

设三元组  $(Q, S, \tau)$  为技能映射,  $D(\tau)$  为技能包含度集, 则技能映射  $\tau$  可通过  $\gamma_j$ -变精度模型诱导  $n-1$  个知识结构 ( $j=1, 2, 3$ )。上述探讨了模型构建知识结构的性质, 下面将研究不同模型在构建知识结构方面的相互关系。

**定理5** 设三元组  $(Q, S, \tau)$  是一个技能映射,  $\tau$  为  $Q$  到  $2^S \setminus \{\emptyset\}$  的技能映射,  $D(\tau)$  为技能包含度集。则有  $\mathcal{K}^{\beta_{i+1}} = \mathcal{L}^{\beta_i} (1 \leq i \leq n-1)$ 。

**证明**  $\forall q \in Q, T \subseteq S$ , 由文献[26]则有  $K_T^{\beta_{i+1}} = \{q \in Q | \tau_q^T \geq \beta_{i+1}\}, K_T^{\beta_{i+1}} \in \mathcal{K}^{\beta_{i+1}}$ ; 因  $\beta_i$  与  $\beta_{i+1}$  之间没有其他技能包含度值, 则  $K_T^{\beta_{i+1}} = \{q \in Q | \tau_q^T > \beta_i\}$ , 而  $L_T^{\beta_i} = \{q \in Q | \tau_q^T > \beta_i\}$ , 由定理2得  $L_T^{\beta_i} \in \mathcal{L}^{\beta_i}$ 。故  $\mathcal{K}^{\beta_{i+1}} = \mathcal{L}^{\beta_i}$ 。

**例2** (续例1) 技能映射  $\tau$  通过  $\alpha$ -变精度模型与  $\gamma_1$ -变精度模型构建的知识结构如下:

$$\begin{aligned}\mathcal{K}^{\frac{1}{2}} &= \{\emptyset, \{q_2\}, \{q_3\}, \{q_1, q_3\}, \{q_2, q_3\}, Q\} = \mathcal{L}^0, \\ \mathcal{K}^{\frac{1}{3}} &= \{\emptyset, \{q_1\}, \{q_2\}, \{q_1, q_2\}, \{q_1, q_3\}, Q\} = \mathcal{L}^{\frac{1}{3}}, \\ \mathcal{K}^{\frac{2}{3}} &= \{\emptyset, \{q_2\}, \{q_3\}, \{q_1, q_3\}, \{q_2, q_3\}, Q\} = \mathcal{L}^{\frac{2}{3}}, \\ \mathcal{K}^1 &= \{\emptyset, \{q_1\}, \{q_2\}, \{q_1, q_2\}, \{q_1, q_3\}, Q\} = \mathcal{L}^{\frac{2}{3}}.\end{aligned}$$

通过上例可知,  $\tau$  通过  $\alpha$ -变精度模型与  $\gamma_1$ -变精度模型构建知识结构总有对应相同, 那么四种变精度模型构建的知识结构是否存在某种对应关系?

**注**  $\alpha$ -变精度模型和  $\gamma_j$ -变精度模型构建的知识结构族分别记为 ( $j=1, 2, 3$ )

$$\mathfrak{R}_\alpha = \{\mathcal{K}^\alpha | \alpha \in (0, 1]\}, \mathfrak{R}_{\gamma_1} = \{\mathcal{L}^{\gamma_1} | \gamma_1 \in [0, 1)\}, \mathfrak{R}_{\gamma_2} = \{\mathcal{H}^{\gamma_2} | \gamma_2 \in (0, 1)\}, \mathfrak{R}_{\gamma_3} = \{\mathcal{G}^{\gamma_3} | \gamma_3 \in (0, 1)\}.$$

由定理2、定理3、定理4,  $\mathfrak{R}_\alpha, \mathfrak{R}_{\gamma_1}, \mathfrak{R}_{\gamma_2}, \mathfrak{R}_{\gamma_3}$  可分别记作

$$\begin{aligned}\mathfrak{R}_\alpha &= \{\mathcal{K}^{\beta_2}, \dots, \mathcal{K}^{\beta_{i+1}}, \dots, \mathcal{K}^{\beta_n}\}, \\ \mathfrak{R}_{\gamma_1} &= \{\mathcal{L}^{\beta_1}, \dots, \mathcal{L}^{\beta_i}, \dots, \mathcal{L}^{\beta_{n-1}}\}, \\ \mathfrak{R}_{\gamma_2} &= \{\mathcal{H}^{\beta_1}, \mathcal{H}^{\beta_2}, \dots, \mathcal{H}^{\beta_i}, \dots, \mathcal{H}^{\beta_{n-1}}\}, \\ \mathfrak{R}_{\gamma_3} &= \{\mathcal{G}^{\beta_2}, \dots, \mathcal{G}^{\beta_i}, \dots, \mathcal{G}^{\beta_{n-1}}, \mathcal{G}^{\beta_n}\},\end{aligned}$$

其中  $\gamma_2^1 \in (\beta_1, \beta_2), \gamma_3^n \in (\beta_{n-1}, \beta_n)$ 。

**定理6** 设三元组  $(Q, S, \tau)$  是一个技能映射,  $\tau$  为  $Q$  到  $2^S \setminus \{\emptyset\}$  的技能映射,  $\mathfrak{R}_\alpha, \mathfrak{R}_{\gamma_1}, \mathfrak{R}_{\gamma_2}, \mathfrak{R}_{\gamma_3}$  分别为技能映射通过  $\alpha$ -变精度模型和  $\gamma_j$ -变精度模型 ( $j=1, 2, 3$ ) 构建的知识结构族, 则有  $\mathfrak{R}_\alpha = \mathfrak{R}_{\gamma_1} = \mathfrak{R}_{\gamma_2} = \mathfrak{R}_{\gamma_3}$ 。

**证明** (1)由定理5,显然有  $\mathfrak{R}_\alpha = \mathfrak{R}_{\gamma_1}$ ;

(2)根据定义4、定义5及定理3,要证明  $\mathfrak{R}_{\gamma_1} = \mathfrak{R}_{\gamma_2}$ ,仅证明  $\mathcal{L}^{\beta_1} = \mathcal{H}^{\gamma_2}$ 即可,  $\forall T \subseteq S$ ,有  $H_T^{\gamma_2} = \{q \in Q | \tau_q^T > \gamma_2\}$ ,因为  $\beta_1$ 与 $\beta_2$ 之间没有其他技能包含度值,则  $H_T^{\gamma_2}$ 可改写为  $\{q \in Q | \tau_q^T > \beta_1\}$ ,而  $L_T^{\beta_1} = \{q \in Q | \tau_q^T > \beta_1\}$ ,则有  $H_T^{\gamma_2} = L_T^{\beta_1}$ ,故  $\mathcal{L}^{\beta_1} = \mathcal{H}^{\gamma_2}$ ,证得  $\mathfrak{R}_{\gamma_1} = \mathfrak{R}_{\gamma_2}$ ;

(3)再由定义6与定理4,要证明  $\mathfrak{R}_\alpha = \mathfrak{R}_{\gamma_3}$ ,仅证明  $\mathcal{K}^{\beta_\alpha} = \mathcal{G}^{\gamma_3}$ 即可,  $\forall T \subseteq S$ ,有  $G_T^{\gamma_3} = \{q \in Q | \tau_q^T \geq \gamma_3\}$ ,因为  $\beta_{n-1}$ 与 $\beta_n$ 之间无其他技能包含度值,则  $G_T^{\gamma_3}$ 可改写为  $\{q \in Q | \tau_q^T \geq \beta_n\}$ ,然而  $K_T^{\beta_n} = \{q \in Q | \tau_q^T \geq \beta_n\}$ ,进而有  $G_T^{\gamma_3} = K_T^{\beta_n}$ ,故  $\mathcal{K}^{\beta_\alpha} = \mathcal{G}^{\gamma_3}$ ,从而  $\mathfrak{R}_\alpha = \mathfrak{R}_{\gamma_3}$ ;

证得  $\mathfrak{R}_\alpha = \mathfrak{R}_{\gamma_1} = \mathfrak{R}_{\gamma_2} = \mathfrak{R}_{\gamma_3}$ 。

由定理6知,本节提出的三种变精度模型以及已有的 $\alpha$ -变精度模型在同一技能映射下构建知识结构族的效果相同,但不同模型构建相同知识结构时,阈值条件存在差异。

**定理7**<sup>[26]</sup> 设三元组  $(Q, S, \tau)$  是一个技能映射,  $D(\tau)$  是  $\tau$  的技能包含度集。则有

- (1) 当  $\alpha \in (\beta_1, \beta_2)$  时,技能映射  $\tau$  通过  $\alpha$ -变精度模型诱导的知识结构  $\mathcal{K}^\alpha$  是一个知识空间;
- (2) 当  $\alpha \in (\beta_{n-1}, \beta_n]$  时,技能映射  $\tau$  通过  $\alpha$ -变精度模型诱导的知识结构  $\mathcal{K}^\alpha$  是一个简单闭包空间。

**推论1** 设三元组  $(Q, S, \tau)$  是一个技能映射,  $D(\tau)$  是  $\tau$  的技能包含度集,则有

- (1) 当  $\gamma_1 \in [\beta_1, \beta_2)$  时,技能映射  $\tau$  通过  $\gamma_1$ -变精度模型诱导的知识结构  $\mathcal{L}^{\gamma_1}$  为知识空间;
- (2) 当  $\gamma_1 \in [\beta_{n-1}, \beta_n)$  时,技能映射  $\tau$  通过  $\gamma_1$ -变精度模型诱导的知识结构  $\mathcal{L}^{\gamma_1}$  为简单闭包空间;
- (3) 当  $\gamma_2 \in (\beta_1, \beta_2)$  时,技能映射  $\tau$  通过  $\gamma_2$ -变精度模型诱导的知识结构  $\mathcal{H}^{\gamma_2}$  为知识空间;
- (4) 当  $\gamma_2 \in [\beta_{n-1}, \beta_n)$  时,技能映射  $\tau$  通过  $\gamma_2$ -变精度模型诱导的知识结构  $\mathcal{H}^{\gamma_2}$  为简单闭包空间;
- (5) 当  $\gamma_3 \in (\beta_1, \beta_2]$  时,技能映射  $\tau$  通过  $\gamma_3$ -变精度模型诱导的知识结构  $\mathcal{G}^{\gamma_3}$  为知识空间;
- (6) 当  $\gamma_3 \in (\beta_{n-1}, \beta_n)$  时,技能映射  $\tau$  通过  $\gamma_3$ -变精度模型诱导的知识结构  $\mathcal{G}^{\gamma_3}$  为简单闭包空间。

设三元组  $(Q, S, \tau)$  是一个技能映射,  $D(\tau)$  是技能包含度集,则  $\gamma_j$ -变精度模型 ( $j=1, 2, 3$ ) 是析取与合取模型的推广,当  $\gamma_1 \in [\beta_1, \beta_2)$ ,  $\gamma_2 \in (\beta_1, \beta_2)$ ,  $\gamma_3 \in (\beta_1, \beta_2]$  时,相当于析取模型;当  $\gamma_1 \in [\beta_{n-1}, \beta_n)$ ,  $\gamma_2 \in [\beta_{n-1}, \beta_n)$ ,  $\gamma_3 \in (\beta_{n-1}, \beta_n)$  时,相当于合取模型。且析取与合取模型通过同一技能映射构建的知识结构互为对偶。

**推论2** 设三元组  $(Q, S, \tau)$  是一个技能映射,  $D(\tau)$  是  $\tau$  的技能包含度集,则有

- (1) 知识结构  $\mathcal{L}^{\beta_1}$  与  $\mathcal{L}^{\beta_{n-1}}$  互为对偶;
- (2) 知识结构  $\mathcal{H}^{\gamma_2}$  与  $\mathcal{H}^{\beta_{n-1}}$  互为对偶;
- (3) 知识结构  $\mathcal{G}^{\beta_2}$  与  $\mathcal{G}^{\gamma_3}$  互为对偶。

**定理8**<sup>[26]</sup> 设三元组  $(Q, S, \tau)$  是一个技能映射,  $D(\tau)$  是  $\tau$  的技能包含度集。则由  $\tau$  通过  $\alpha$ -变精度模型构建的知识结构  $\mathcal{K}^{\beta_{i+1}}$  与  $\mathcal{K}^{\beta_{n-i+1}}$  互为对偶 ( $i=1, \dots, n-1$ )。

**推论3** 设三元组  $(Q, S, \tau)$  是一个技能映射,  $D(\tau)$  是  $\tau$  的技能包含度集。则有

- (1)  $\mathcal{L}^{\beta_i}$  与  $\mathcal{L}^{\beta_{n-i}}$  ( $i=1, \dots, n-1$ ) 互为对偶;
- (2)  $\mathcal{H}^{\beta_i}$  与  $\mathcal{H}^{\beta_{n-i}}$  ( $i=2, \dots, n-2$ ) 互为对偶;
- (3)  $\mathcal{G}^{\beta_i}$  与  $\mathcal{G}^{\beta_{n-i+2}}$  ( $i=3, \dots, n-1$ ) 互为对偶。

推论1、2、3,探讨了三种变精度模型构建知识结构时,对偶性质下阈值的取值规律。

### 3 变精度模型构建知识结构的矩阵方法

上一节证明了四种变精度模型可构建相同的知识结构族,在本节统称为变精度模型。本节将给出变精度模型构建知识结构的矩阵方法,讨论矩阵运算的相关性质,设计变精度模型构建知识结构的算法,并举例说明(本节用  $\gamma_1$ -变精度模型进行计算)。

**定义7** 设三元组  $(Q, S, \tau)$  为技能映射,问题集  $Q = \{q_1, \dots, q_i, \dots, q_n\}$  与技能集  $S =$

$\{s_1, \dots, s_j, \dots, s_t\}$  均为非空有限集, 则技能映射的矩阵为  $M = (m_{ij})_{n \times t}$ , 其中  $(i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, t)$  后文一致)

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & s_j \in \tau(q_i) \\ 0 & s_j \notin \tau(q_i) \end{cases}$$

$M_i = (m_{i1}, \dots, m_{ij}, \dots, m_{it})$  为矩阵  $M$  的第  $i$  行。

**定义 8** 设三元组  $(Q, S, \tau)$  为技能映射, 技能集  $S = \{s_1, \dots, s_j, \dots, s_t\}$  为非空有限集,  $S$  的幂集  $P(S) = \{T_1, \dots, T_l, \dots, T_{2^t}\}$ , 则  $T_l$  的列向量表示为  $\lambda_{T_l} = (\lambda_{T_l}(s_1), \dots, \lambda_{T_l}(s_j), \dots, \lambda_{T_l}(s_t))'$ , 其中

$$\lambda_{T_l}(s_j) = \begin{cases} 1 & s_j \in T_l, \\ 0 & s_j \notin T_l. \end{cases}$$

则  $P(S)$  的矩阵为  $P = (\lambda_{T_1}, \dots, \lambda_{T_l}, \dots, \lambda_{T_{2^t}})$  (后文一致  $l = 1, 2, \dots, 2^t$ )。

基于定义 7 和定义 8, 我们将讨论矩阵运算与技能包含度的相关性质。

**定理 9** 设三元组  $(Q, S, \tau)$  为技能映射, 则问题  $q_i$  关于技能集  $T_l$  的技能包含度为

$$\tau_{q_i}^{T_l} = \frac{M_i \lambda_{T_l}}{|\tau(q_i)|}.$$

**证明** 由技能包含度的定义知, 证明  $M_i \lambda_{T_l} = |\tau(q_i) \cap T_l|$  即可。因  $M_i$  表示问题  $q_i$  关于  $S$  的行向量,  $\lambda_{T_l}$  表示技能集  $T_l$  关于  $S$  的列向量, 故  $M_i \lambda_{T_l} = |\tau(q_i) \cap T_l|$ 。

**推论 4** 由定理 9 有如下

(1) 问题  $q_i$  关于  $P(S)$  的技能包含的行向量为  $\frac{M_i P}{|\tau(q_i)|}$ ;

(2) 技能集  $T_l$  关于问题集  $Q = \{q_1, \dots, q_i, \dots, q_n\}$  的技能包含的列向量为

$$D_{T_l} = \begin{bmatrix} \frac{1}{|\tau(q_1)|} & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \frac{1}{|\tau(q_1)|} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & \frac{1}{|\tau(q_1)|} \end{bmatrix} M \lambda_{T_l};$$

(3) 技能映射的技能包含度矩阵  $D$  为

$$D = (d_{il}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{|\tau(q_1)|} & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \frac{1}{|\tau(q_1)|} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & \frac{1}{|\tau(q_1)|} \end{bmatrix} M P.$$

根据定义 7 与定义 8, 上述  $T_l$  关于问题集  $Q$  的技能包含度列向量  $D_{T_l}$  中的元素依次为问题  $q_1, \dots, q_i, \dots, q_n$  关于  $T_l$  的技能包含度值。那么  $T_l$  通过变精度模型诱导的知识状态可利用  $D_{T_l}$  变换获得其列向量。例如:  $T_l$  关于问题集  $Q$  的技能包含度的列向量为  $D_{T_l}$ , 将  $D_{T_l}$  中元素大于  $\gamma_1$  的元素赋值为 1, 否则为 0, 即可得到由  $T_l$  通过  $\gamma_1$ -变精度模型诱导的知识状态的列向量  $D_{T_l}^{\gamma_1}$ ; 将技能包含

度矩阵  $D$  中每个元素与  $\gamma_1$  比较并赋值, 并保留互异列, 就可得到知识结构的矩阵  $D^{\gamma_1}$ 。

**定义 9** 设三元组  $(Q, S, \tau)$  为技能映射。  $D = (d_{ij})$  为  $(Q, S, \tau)$  的技能包含度矩阵, 称  $B^{\gamma_1} = (b_{ij})$  为技能映射通过  $\gamma_1$ -变精度模型构建知识结构的余矩阵。 其中

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & d_{ij} > \gamma_1, \\ 0 & d_{ij} \leq \gamma_1. \end{cases}$$

**推论 5**  $B^{\gamma_1} = (b_{ij})$  为技能映射  $\tau$  通过  $\gamma_1$ -变精度模型构建知识结构的余矩阵, 保留  $B^{\gamma_1}$  中互异列即为所求知识结构的矩阵  $D^{\gamma_1}$ 。

根据以上结论, 变精度模型构建知识结构的过程可经矩阵运算得到简化, 提供了更清晰的理论思路和求解方法。

下面给出由技能映射通过变精度模型构建知识结构族  $\mathfrak{R}$  的算法。

**算法 1** 基于变精度模型获取知识结构族  $\mathfrak{R}$

输入: 技能映射  $(Q, S, \tau)$ ;

输出: 知识结构族  $\mathfrak{R}$ 。

- ① 计算求得技能包含度矩阵  $D$ ;
- ② 从  $D(\tau)$  中取值  $\gamma_{i\tau}$ ;
- ③ 将  $D$  变换为  $B^{\gamma_{i\tau}}$ , 保留  $B^{\gamma_{i\tau}}$  中互异列得到  $D^{\gamma_{i\tau}}$ ,  $\mathfrak{R}\{i\} = D^{\gamma_{i\tau}}(\mathfrak{R}\{i\})$  储存  $\gamma_{i\tau}$  时的知识结构);
- ④ 遍历  $D(\tau)$ , 并重复步骤 2、3 可获得  $\mathfrak{R}$ 。

我们用下面的例子来说明上面的算法。

**例 3** 例 1 中, 矩阵  $M$  与  $P$  分别为:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}; P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}。$$

则该技能映射的技能包含度矩阵为:

$$D = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} MP = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix}。$$

若  $T = \{s_1, s_3\}$ , 则其关于  $S$  的列向量为  $\lambda_T = (1, 0, 1, 0)'$ 。 由推论 4-(2) 得  $D_T = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)'$ ,  $\gamma_1 = \frac{1}{4}$  时,  $D^{\frac{1}{4}} = (1, 1, 1)'$ , 此时  $T = \{s_1, s_3\}$  通过变精度模型诱导的知识结构为  $L^{\frac{1}{4}} = \{q_1, q_2, q_3\}$ 。

将  $D$  中每个元素与  $\gamma_1 = \frac{1}{4}$  比较, 大于  $\gamma_1$  的元素位置赋值为 1, 否则为 0, 可得到余矩阵

$$B^{\frac{1}{4}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

再保留余矩阵内互异的列后得到  $\gamma_1 = \frac{1}{4}$  时变精度模型构建知识结构的矩阵

$$D^{\frac{1}{4}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}。$$

由  $D^{\frac{1}{4}}$  可得, 当  $\gamma_1 = \frac{1}{4}$  时, 由  $\gamma_1$ -变精度模型构建的知识结构为

$$\mathcal{L}^{\frac{1}{4}} = \{\emptyset, \{q_2\}, \{q_3\}, \{q_1, q_3\}, \{q_2, q_3\}, Q\},$$

$\gamma_1 = \frac{1}{4}$  与  $\gamma_1 \in \left[0, \frac{1}{3}\right)$  时构建的知识结构一样; 且  $\gamma_1$  仅需遍历  $D(\tau)$ , 便可取得由  $\gamma_1$ -变精度模型构建的知识结构族  $\mathfrak{R}_{\gamma_1}$ 。

#### 4 实验及结果分析

为了验证本文算法的有效性, 从 UCI (<http://archive.ics.uci.edu/ml/datasets.php>) 数据库中选取了 7 个数据集进行实验分析, 具体详情如表 3 所示。

所有实验运行环境为 Windows 7 操作系统, 硬件环境为 Inter(R) Core(TM) i7-6700 CPU @ 3.40 GHz, 运行内存 8.00 GB, 软件环境为 MATLAB(R2021b)。

根据本文的研究背景, 将对象视为问题, 属性视为技能。首先, 对表 3 中的数据集进行离散化处理。将处理后的数据集, 表示为技能映射  $(Q_i, S_i, \tau_i)$ , 各技能映射的问题与技能个数见表 4, 其中  $i = 1, 2, \dots, 7$ 。如果解决两个问题所需技能相同, 处理数据集时, 它们被视为同一个问题, 故数据处理后, 对象数量可能发生变化。

表 3 数据集的对象与属性个数

Table 3 Numbers of objects and attributes in the dataset

编号	名称	对象个数	属性个数
set 1	Shuttle-landing-control	15	7
set 2	Adult +stretch	16	4
set 3	Lenses	26	4
set 4	StoneFlakes	79	8
set 5	Hayes	132	5
set 6	Post	90	8
set 7	Wiscon	699	10

表 4 技能映射通过变精度模型构建的知识结构个数

Table 4 Numbers of knowledge structures constructed through skill map via variable precision models

$(Q_i, S_i, \tau_i)$	$ Q_i $	$ S_i $	知识结构个数
$(Q_1, S_1, \tau_1)$	15	7	12
$(Q_2, S_2, \tau_2)$	8	5	6
$(Q_3, S_3, \tau_3)$	9	6	6
$(Q_4, S_4, \tau_4)$	32	8	12
$(Q_5, S_5, \tau_5)$	8	6	6
$(Q_6, S_6, \tau_6)$	17	9	18
$(Q_7, S_7, \tau_7)$	136	9	28

为验证本文算法设计的有效性, 将本文算法与文献[26]中的算法进行验证。在第 3 节中已知, 四种变精度模型在同一技能映射下构建知识结构族是相同的。通过实验, 我们记录了两种算法的运行时间如表 5, 并将两种算法的时间对比做了可视化处理, 从表 5 和图 1, 其中图 1 中 set1—set7 对应表 3 的数据集, 我们能够看出数据集越大本文提出的算法运行效率明显优于文献[26]中的算法。

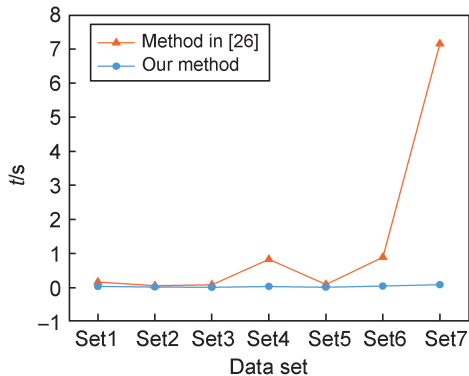


图 1 算法的运行时间对比

Fig. 1 Comparison of algorithm runtimes

表 5 算法运行时间

Table 5 Runtimes of algorithms

算法名称	算法运行时间/s	
	文献[26]中变精度模型构建 知识结构的的方法	Our
Shuttle-landing-control	0.166 7	0.036 5
Adult +stretch	0.056 2	0.017 6
Lenses	0.085 0	0.011 8
StoneFlakes	0.831 0	0.034 3
Hayes	0.092 9	0.012 9
Post	0.895 0	0.047 0
Wiscon	7.159 0	0.088 2

本文算法与杨桃丽等<sup>[26]</sup>的研究均证实,变精度模型在同一技能映射下构建的知识结构族相同。下面对技能映射 $(Q_i, S_i, \tau_i)$ 通过变精度模型构建的知识结构族进行了可视化,对应图2(a—f)(选用 $\alpha$ -变精度模型)。图中横坐标表示阈值 $\alpha$ 的可能取值,纵坐标表示对应 $\alpha$ 值构建的知识结构中包含的知识状态个数。

第三节的矩阵方法不仅优化了时间复杂度,还便利了知识结构可视化。图3展示了例题的知识结构可视化,知识状态以向量形式呈现,方框表示状态,线条表示包含关系。

说明:技能映射 $(Q_i, S_i, \tau_i)(i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$ 与构建的知识结构族在本文中并没有具体给出,是因为通过矩阵形式表示的数据过于复杂。

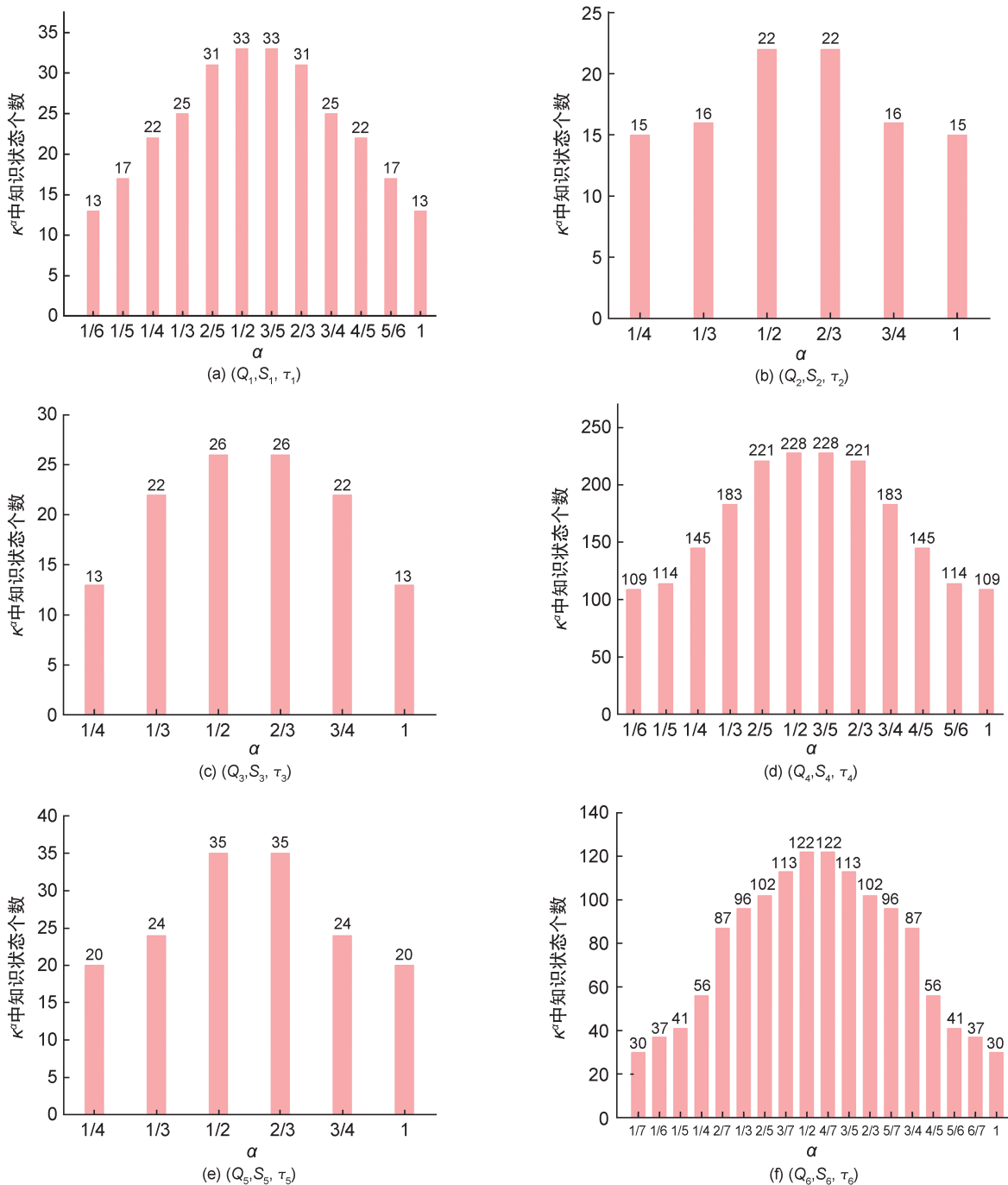


图2  $(Q_i, S_i, \tau_i)$ 通过变精度模型构建知识结构中知识状态的个数

Fig. 2  $(Q_i, S_i, \tau_i)$  determines the knowledge state count in knowledge structure through variable precision model

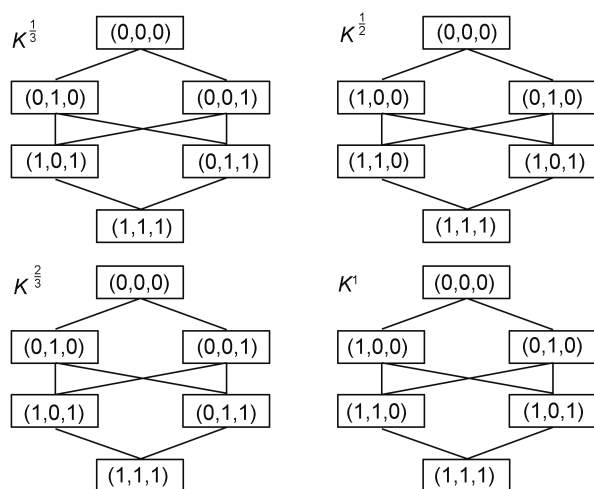


图3 例1通过变精度模型构建的知识结构

Fig. 3 The knowledge structure constructed through the variable precision model in example 1

## 5 结论

本文基于 $\alpha$ -变精度模型提出了三种 $\gamma$ -变精度模型用于构建知识结构,研究了三种模型构建知识结构的性质,讨论了四种变精度模型的联系,并证明四种变精度模型在同一技能映射下构建知识结构族的效果是一致的。此外,本文还提出了技能映射通过变精度模型构建知识结构的矩阵方法,设计了相应的算法,且该方法适用于四种变精度模型;最后,通过对比实验证明了本文算法的有效性与优越性,验证了相同条件下,本文模型与 $\alpha$ -变精度模型构建的知识结构族相同,本文算法运行时间明显优于文献[26]提出的算法,且利于知识结构可视化,使后续研究的边缘与掌握边缘的刻画更容易。但本文变精度模型没有考虑学习成本问题,也就是说,问题的难易程度、知识的重要程度等均会影响知识结构构建,综合这些因素如何构建更切合实际的知识结构至关重要;同时本文也未考虑变精度能力模型以及模糊情形下变精度模型构建知识结构的的研究;因此,通过变精度能力模型与模糊情形下变精度模型构建知识结构的的研究将作为后期的研究工作。

### 参考文献:

- [1] FALMAGNE J C, DOIGNON J P. Learning Spaces: Interdisciplinary Applied Mathematics[M]. Berlin: Springer, 2011.
- [2] DOIGNON J P, FALMAGNE J C. Spaces for the Assessment of Knowledge[J]. *Int J Man Mach Stud*, 1985, **23**(2): 175-196. DOI: 10.1016/s0020-7373(85)80031-6.
- [3] DOIGNON J P, FALMAGNE J C. Parametrization of Knowledge Structures[J]. *Discrete Appl Math*, 1988, **21**(2): 87-100. DOI: 10.1016/0166-218x(88)90046-7.
- [4] ZHOU Y F, YANG H L, LI J J, et al. Automata for Knowledge Assessment Based on the Structure of Observed Learning Outcome Taxonomy[J]. *Inf Sci*, 2024, **659**: 120058. DOI: 10.1016/j.ins.2023.120058.
- [5] 刘译蓬. 基于知识空间理论的认知诊断自适应测试选题方法研究[D]. 锦州: 渤海大学, 2019.  
LIU Y P. Research on Topic Selection Method of Cognitive Diagnosis Adaptive Test Based on Knowledge Space Theory[D]. Jinzhou: Bohai University, 2019.
- [6] 谈成群, 谢深泉. 超文本教学系统中学生知识的自适应测评研究[J]. *计算机工程与设计*, 2007, **28**(20): 5072-5075. DOI: 10.3969/j.issn.1000-7024.2007.20.077.
- [7] TAN C Q, XIE S Q. Adaptive Assessment of Students' Knowledge in Hypertext Tutoring System[J]. *Comput Eng Des*, 2007, **28**(20): 5072-5075. DOI: 10.3969/j.issn.1000-7024.2007.20.077.
- [8] KOROSSY K. Extending the Theory of Knowledge Spaces: A Competence-Performance Approach[J]. *Zeitschrift fur Psychologie*, 1997, **205**(1): 53-82. DOI: 10.1300/J015v20n03\_a.
- [9] HELLER J, ANSELMINI P, STEFANUTTI L, et al. A Necessary and Sufficient Condition for Unique Skill Assessment[J]. *J Math Psychol*, 2017, **79**: 23-28. DOI: 10.1016/j.jmp.2017.05.004.
- [9] LUKAS J, ALBERT D. Chapter 7 Knowledge Assessment Based on Skill Assignment and Psychological Task

- Analysis[M]//Advances in Psychology. Amsterdam: Elsevier, 1993: 139-159. DOI: 10.1016/s0166-4115(08)62656-4.
- [10] BARTL E, BELOHLAVEK R. Knowledge Spaces with Graded Knowledge States[C]//2008 International Symposium on Knowledge Acquisition and Modeling. New York: IEEE, 2008: 3-8. DOI: 10.1109/KAM.2008.106.
- [11] 李金海, 张瑞, 智慧来等. 知识空间理论综述[J]. 模式识别与人工智能, 2024, **37**(2): 106-127. DOI: 10.16451/j.cnki.issn1003-6059.202402002.
- LI J H, ZHANG R, ZHI H L, *et al.* A Review of Knowledge Space Theory[J]. *Pattern Recognit Artif Intell*, 2024, **37**(2): 106-127. DOI: 10.16451/j.cnki.issn1003-6059.202402002.
- [12] FALMAGNE J C, KOPPEN M, VILLANO M, *et al.* Introduction to Knowledge Spaces: How to Build, Test, and Search them[J]. *Psychol Rev*, 1990, **97**(2): 201-224. DOI: 10.1037/0033-295x.97.2.201.
- [13] SARGIN A, ÜNLÜ A. Inductive Item Tree Analysis: Corrections, Improvements, and Comparisons[J]. *Math Soc Sci*, 2009, **58**(3): 376-392. DOI: 10.1016/j.mathsocsci.2009.06.001.
- [14] SCHREPP M. Extracting Knowledge Structures from Observed Data[J]. *Brit J Math & Statis*, 1999, **52**(2): 213-224. DOI: 10.1348/000711099159071.
- [15] DOIGNON J P. Knowledge Spaces and Skill Assignments[M]//Recent Research in Psychology. New York, NY: Springer New York, 1994: 111-121. DOI: 10.1007/978-1-4612-4308-3\_8.
- [16] RUSCH A, WILLE R. Knowledge Spaces and Formal Concept Analysis[C]//BOCK HH, POLASEK W. Data Analysis and Information Systems. Berlin, Heidelberg: Springer, 1996: 427-436. DOI: 10.1007/978-3-642-80098-6\_36.
- [17] 李进金, 孙文. 知识空间、形式背景和知识基[J]. 西北大学学报(自然科学版), 2019, **49**(4): 517-526. DOI: 10.16152/j.cnki.xdxbr.2019-04-004.
- LI J J, SUN W. Knowledge Space, Formal Context and Knowledge Base[J]. *J Northwest Univ Nat Sci Ed*, 2019, **49**(4): 517-526. DOI: 10.16152/j.cnki.xdxbr.2019-04-004.
- [18] YAO Y Y, MIAO D Q, XU F F. Rough Set Theory: A True Landmark in Data Analysis[M]. Berlin Heidelberg: Springer, 2009.
- [19] 周银凤, 李进金, 冯丹露, 等. 形式背景下的学习路径与技能评估[J]. 模式识别与人工智能, 2021, **34**(12): 1069-1084. DOI: 10.16451/j.cnki.issn1003-6059.202112001.
- ZHOU Y F, LI J J, FENG D L, *et al.* Learning Paths and Skills Assessment in Formal Context[J]. *Pattern Recognit Artif Intell*, 2021, **34**(12): 1069-1084. DOI: 10.16451/j.cnki.issn1003-6059.202112001.
- [20] 周银凤, 李进金. 形式背景下的技能约简与评估[J]. 计算机科学与探索, 2022, **16**(3): 692-702. DOI: 10.3778/j.issn.1673-9418.2008024.
- ZHOU Y F, LI J J. Skill Reduction and Assessment in Formal Context[J]. *J Front Comput Sci Technol*, 2022, **16**(3): 692-702. DOI: 10.3778/j.issn.1673-9418.2008024.
- [21] DÜNTSCH I, GEDIGA G. Skills and Knowledge Structures[J]. *Brit J Math & Statis*, 1995, **48**(1): 9-27. DOI: 10.1111/j.2044-8317.1995.tb01047.x.
- [22] HELLER J, ÜNLÜ A, ALBERT D. Skills, Competencies and Knowledge Structures[M]//Knowledge Spaces. Berlin, Heidelberg: Springer, 2013: 229-242. DOI: 10.1007/978-3-642-35329-1\_11.
- [23] HELLER J, AUGUSTIN T, HOCKEMEYER C, *et al.* Knowledge Spaces: Applications in Education[M]. Berlin: Springer, 2013.
- [24] STEFANUTTI L, DE CHIUSOLE D. On the Assessment of Learning in Competence Based Knowledge Space Theory[J]. *J Math Psychol*, 2017, **80**: 22-32. DOI: 10.1016/j.jmp.2017.08.003.
- [25] 杨桃丽, 李进金, 李招文, 等. 基于技能构建知识结构的两种变精度模型与技能子集约简[J]. 模式识别与人工智能, 2022, **35**(8): 671-687. DOI: 10.16451/j.cnki.issn1003-6059.2022080001.
- YANG T L, LI J J, LI Q /Z /Z W, *et al.* Two Kinds of Variable Precision Models Based on Skill for Constructing Knowledge Structures and Skill Subset Reduction[J]. *Pattern Recognit Artif Intell*, 2022, **35**(8): 671-687. DOI: 10.16451/j.cnki.issn1003-6059.2022080001.
- [26] YANG T L, LI J J, LI Z W, *et al.* The Inclusion Degrees of Skill Maps and Knowledge Structures[J]. *J Intell Fuzzy Syst*, 2023, **45**(4): 5765-5781. DOI: 10.3233/jifs-222149.