山西大学学报(自然科学版)48(1):192-202,2025
Journal of Shanxi University(Nat. Sci. Ed.)

DOI:10.13451/j.sxu.ns.2024139

多分知识结构析取模型及其应用

林英茹,李进金*,李长清*,黄宝坤
(闽南师范大学 数学与统计学院,福建 漳州 363000)

摘 要:合取属性映射的定义首次以公理化的形式给出,由此产生了多分知识结构合取模型理论。本文提出了析取属性映射的公理化定义,并考虑了析取相容性和析取完备性的条件,研究其与多分知识状态、属性结构和多分知识结构的关系,通过属性映射和项目响应函数建立可用属性和可观察项目响应之间的确定性关系。得到了多分知识结构的充要条件是属性映射析取相容且完备于属性结构,从而建立由析取属性映射诱导的多分知识结构的理论。所提出的方法具有广泛适用性,能在教学模式、教育评价、教育心理等场景中处理可能遇到的大量析取规则下的多分项目。

关键词:析取属性映射;析取相容性;析取完备性;多分知识状态;多分知识结构
中图分类号:O189.1 **文献标志码**:A **文章编号**:0253-2395(2025)01-0192-11

The Disjunctive Model of Polytomous Knowledge Structure and Its Application

LIN Yingru, LI Jinjin*, LI Changqing*, HUANG Baokun
(*School of Mathematics and Statistics, Minnan Normal University, Zhangzhou* 363000, *China*)

Abstract: The definition of conjunctive attribute mapping was first presented in an axiomatic form, which gave rise to the conjunctive model theory of polytomous knowledge structures. This paper presents an axiomatic definition of disjunctive attribute mapping. Considering the conditions of disjunctive compatibility and completeness, we study their relationships with polytomous knowledge state, attribute structure, and polytomous knowledge structure, and establish a deterministic relationship between available attributes and observable project responses through attribute mapping and project response function. The necessary and sufficient condition for polytomous knowledge structure is that the attribute mapping is disjunctively consistent and complete with respect to the attribute structure, thus establishing the theory of polytomous knowledge structure induced by the disjunctive attribute mapping. The proposed method has wide applicability and can handle a large number of disjunctive rules under polytomous projects in scenarios such as teaching models, educational evaluation, and educational psychology.

Key words: disjunctive attribute mapping; disjunctive compatibility; disjunctive completeness; polytomous knowledge state; polytomous knowledge structure

0 引言

知识空间理论(Knowledge Space Theory,KST)是由Doignon和Falmagne于1985年引入的一种数学理论[1]。KST通过建立数学框架研究教育规律,为教育评价提供科学方法。九十年代初,考虑到表现和能力水平的联系,产生了基于能力的知识结构理论(Compe-

收稿日期:2024-06-15;**接受日期**:2024-10-24
基金项目:国家自然科学基金(11871259;12271191);福建省自然科学基金(2024J01803;2020J02043;2022J01912;2022J01306;2022J05169)
作者简介:林英茹(1999-),女,福建泉州人,硕士研究生,研究方向为拓扑学与知识空间理论。E-mail:1127729601@qq.com
* **通信作者**:李进金(LI Jinjin),E-mail:jinjinlimnu@126.com;李长清(LI Changqing),E-mail:helen_smile0320@163.com
引文格式:林英茹,李进金,李长清,等.多分知识结构析取模型及其应用[J].山西大学学报(自然科学版),2025,48(1):192-202. DOI:10.13451/j.sxu.ns.2024139.

tence-based Knowledge Structure Theory, Cb-KST)[2-8],并用技能映射[9]将知识状态和能力状态联系起来。技能映射常见的模型有三种:析取模型、合取模型和能力模型。其中,合取模型要求个体必须掌握与项目有关的所有技能才能解决该项目,析取模型要求个体只需掌握与项目有关的技能便能解决该项目,能力模型要求个体需要达到用于解决项目的某些能力便能解决该项目。Heller 等[10]在此基础上引入了分布式技能函数的概念和知识结构的网格化,形式化表示几个技能函数的集成。另外,KST 的发展离不开与形式概念分析(Formal Concept Analysis, FCA)等理论的深度结合。从理论和实践的角度来看,KST 一直专注于学习主题[11-12],FCA 则强调概念之间的层次化关系,基于 FCA 研究 KST 有助于深化对知识结构的理解以及寻找适应学习者个性需求的学习路径。具体地,李进金等[13]通过知识基建立知识空间和形式背景的联系。周银凤等[14-15]运用 FCA 的方法寻找学习路径并进行技能评估。除此之外,粗糙集和模糊集的引入都促进了 KST 的发展。高纯等[16]和杨桃丽等[17]借助粗糙集研究获取最小技能集的方法。智慧来等[18]建立了面向知识结构分析的模糊概念格模型,对知识结构作增量学习。

传统的 KST 和 Cb-KST 都假设个体对项目的回答为正确或错误,在对学习和知识进行评价时具有局限性。针对这一局限性,Schrepp[19]将 KST 推广到每个问题有超过两个响应值可选择的情形(多分情形),其中响应值集合是线性序集。在此基础上,Bartl 等[20]讨论具有分级知识状态的知识空间。Stefanutti[21]基于多分技能映射研究 KST 的误解模型。孙晓燕等[22]将程序性知识的评价结果用于构建项目状态空间,进而构造多分知识结构。Stefanutti 等[23]通过属性映射和项目响应函数建立属性和项目响应对之间的确定性关系。此外,Sun 等[24]结合模糊集思想,提出了一种利用模糊技能构建多分知识结构的方法。林宇静等[25]运用 FCA 构建多分知识结构并寻找学习路径。

多分知识结构是 KST 的热门研究方向之一,然而由技能映射诱导多分知识结构的研究并未得到充分的探索,文献[23]的研究也局限于合取情形。合取情形只适用于只有一种途径(能力)解决问题的情况,现实生活中解决问题可能有多种途径(能力)。因此,为打破这种局限,使多分 Cb-KST 得到更充分的探索,本文基于析取模型下的规则(析取规则),即个体只需掌握相关技能便能达到相应的项目状态,通过析取属性映射和析取项目响应函数两种映射关系,构建一致的多分知识结构,并将该方法应用于现实生活。首先,本文介绍相关概念。然后,提出析取属性映射的公理化定义,并考虑析取相容性和析取完备性的条件,研究它们与属性结构和多分知识结构的关系,从而建立了多分知识结构理论,并给出相应的算法步骤。最后,举例说明所提出的方法的广泛适用性。

1 预备知识

给定项目集 Q 和技能集 S,在表现水平上将个人掌握的项目子集 $K \subseteq Q$ 称为知识状态,所有知识状态构成的集族 $\mathcal{K}$(包括空集和全集)称为知识结构;在能力水平上将个人掌握的技能子集 $C \subseteq S$ 称为能力状态,所有能力状态构成的集族 $\mathcal{C}$(包括空集和全集)称为能力结构。表现水平和能力水平通过技能映射和项目函数两个映射相互联系。技能映射是三元组 (Q, S, τ),其中 τ 是项目集 Q 到技能集 S 的非空幂集的映射,即 $\tau: Q \to 2^S \setminus \{\emptyset\}$。

对于任意技能子集 $C \subseteq S$,合取项目函数为 $p(C) = \{q \in Q: \tau(q) \subseteq C\}$,析取项目函数为 $p(C) = \{q \in Q: \tau(q) \cap C \neq \emptyset\}$。$K = p(C)$ 为 C 通过技能映射 τ 诱导得到的知识状态。本文主要讨论析取规则下的情形。

在 KST 和 Cb-KST 的多分推广中,项目集 Q 中的项目的解决程度由水平集 V 中的级别 v 表示。Stefanutti[23]引入了响应值集合 V 和二元关系 $P \subseteq Q \times V$, $|V| > 1$, $\leqslant$ 是 V 上的偏序关系。特别地,对于 $a, b \in V$, $a \prec b$ 当且仅当 $a \leqslant b$ 且 $a \neq b$。

定义 1[23] 给定任意子集 $X \subseteq V$,对于任意 $x \in X$,若 $x \leqslant v$,则元素 $v \in V$ 是 x 的上界。

令 $X^u=\{v\in V:\forall x\in X,x\leqslant v\}$ 表示集合 X 的所有上界集合。特别地,$\varnothing^u=V$。

定义 2[23] 项目集合 q 和响应值集合 V 的可容许关系是一个二元关系 $P\subseteq Q\times V$,满足

(1)对于任意 $q\in Q$,存在 $v,w\in V$,使得 $v\neq w$,qPv 且 qPw;

(2)对于任意 $v\in V$,存在 $q\in Q$ 且 qPv。

对任意 $q\in Q$,$v\in V$,若 qPv,则称响应值 v 对于项目 q 是可容许的。q 可容许的所有响应值集合表示为 $P(q)=\{v\in V:qPv\}$。若 V 包含多于两个响应值,则称之为多分项。否则,称之为二分项。

此外,对于每个项目而言,个体总是掌握了一些认知规则,能够将该项目回答至某一水平。正确的认知规则被称作是技能,而错误的认知规则被称为误解。对同一认知规则而言,个体只能正确理解该认知规则,或者错误理解该认知规则,这正是文献[21]中体现的一致性的概念。

定义 3[23] 若 A 为属性集,$C\in\mathcal{C}\subseteq 2^A$ 至少包含空集且 $\cup C=A$,则称 $(A,\mathcal{C})$ 为属性结构。属性结构 $(A,\mathcal{C})$ 称为一致空间,若满足:

(1)对任意 $a\in A$,有 $\{a\}\in\mathcal{C}$;

(2)对任意 $C'\subseteq C$,若 $C\in\mathcal{C}$,则有 $C'\in\mathcal{C}$。

定义 4[23] 多分知识状态是映射 $K:Q\to V$,满足 $K\subseteq P$。设 $P=\{K\in V^Q:K\subseteq P\}$,对 $K_1,K_2\in P,K_1\sqsubseteq K_2\Leftrightarrow\forall q\in Q:K_1(q)\leqslant K_2(q)$,则称在 P 上存在二元优势关系 $\sqsubseteq$。

注 多分知识状态有两种表示形式,分别是子集表示法和向量表示法。其中,本文采用的是子集表示法。该方法将多分知识状态 K 表示为 $Q\times V$ 的一个特定子集,因此存在 K 与 P 的包含关系。

定义 5[23] 设四元组 $(Q,V,P,\mathcal{K})$,其中 Q 是项目集合,V 是响应值集合,P 是 Q 和 V 的可容许关系,$\mathcal{K}\subseteq P$ 是多分知识状态 $K:Q\to V$ 的集合(它包含一个相对 $\sqsubseteq$ 的唯一最小元素 $\perp$,使得 $\cup\mathcal{K}=P$),称该四元组为多分知识结构。

在多分视角下,多分知识状态是 Q 到 V 的映射 $K:Q\to V$,表示 Q 中的每个项目都能在 V 中找到对应的响应值。多分知识结构是描述个体的所有多分知识状态的集合。

2 析取属性映射诱导的多分知识结构模型

本节提出析取属性映射的公理化定义,并在满足析取规则下定义相容性和完备性,从而描述一致结构、多分知识状态和多分知识结构。

首先,我们用公理化定义析取属性映射。

定义 6 设三元组 $M=(P,A,\tau)$,其中 P 是集合 Q 和 V 的可容许关系,A 是非空有限属性集,$\tau:P\to 2^A$ 是将 A 中的属性子集分配给 P 中的每个项目响应对的映射。对任意 $q\in Q$,$F\subseteq P(q)$,定义 $\tau(q,F)=\bigcup\limits_{v\in F}\tau(q,v)$。

称三元组 M 是析取属性映射,若满足:

(1)对任意 $v\in V$,存在 $z\in V$,使得 $Q\times\{z\}\subseteq P$,且对于任意 $q\in Q$,$\tau(q,z)=\varnothing$,$z\leqslant v$;

(2)若 qPv,qPw,$\varnothing\neq\tau(q,v)\subseteq\tau(q,w)$,则 $w\leqslant v$;

(3)对任意 $F\subseteq P(q)$,任意 $v,w\in F$,若 $\tau(q,v)\cap\tau(q,w)\neq\varnothing$ 且 $F^u\cap P(q)\neq\varnothing$,则 $\tau(q,F^u)\supseteq\tau(q,v)\cap\tau(q,w)$。

对于上述析取属性映射,我们给出了以下解释。

定义 6 中的(1)保证了对于每一个项目,响应值集 V 都存在"最小"响应值 z,称之为底元。

定义 6 中的(2)是一个保序条件。掌握的能力的种类越少,表现越突出,即"术业有专攻"。

定义 6 中的(3)表示,对于项目 q,某些能力 C 在这一项目的一些解决水平 $v\in F$ 中都有所表现,则这些能力是解决该项目的基础或关键。个体越专注于提高这些能力,表现越突出。

例 1 考虑项目集 $Q=\{q_1,q_2,q_3\}$,定义如下:

q_1:商店运来 640 千克的苹果,上午卖出 240 千克,下午卖出 160 千克,还剩多少?

q_2:小明看一本 140 页的书,已经看了 80 页,剩下的要 5 天看完,平均每天看多少页?

q_3:超市运来 100 袋大米和 60 袋面粉,共重 6 800 千克,大米每袋重 50 千克,面粉每袋重多少千克?

考虑响应值集合 $V=\{v_0,v_1,v_2,v_3\}$, $v_0\leqslant v_1\leqslant v_3$, $v_0\leqslant v_2\leqslant v_3$。其中根据布鲁姆认知层次理论,定义如下:

v_0:无应答水平;

v_1:以理解为基础的初步的应用水平;

v_2:以记忆为基础的初步的应用水平;

v_3:分析水平。

同时,属性集 $A=\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$ 的定义如下:

a_1:综合法;a_2:逆推法;a_3:分析法;a_4:数形结合法(画线段图分析)。

映射(P,A,τ)如表1所示。

表1 例1中的映射(P,A,τ)

Table 1 The mapping (P,A,τ) in example 1

项目响应对集合P	a_1	a_2	a_3	a_4
(q_1,v_0)				
(q_1,v_1)				√
(q_1,v_2)	√			
(q_1,v_3)			√	
(q_2,v_0)				
(q_2,v_1)			√	√
(q_2,v_2)	√		√	
(q_2,v_3)			√	
(q_3,v_0)				
(q_3,v_1)		√	√	√
(q_3,v_2)	√			
(q_3,v_3)			√	

注:表中的√表示列中的属性是分配给项目相对应集合中的子集的元素,下同。

下面验证该映射(P,A,τ)满足定义6中的公理。

首先,存在$v_0\in V$,使得$Q\times\{v_0\}\subseteq P$,且对于任意$q\in Q$,$\tau(q,v_0)=\varnothing$,$v_0\leqslant v$。因此,定义6中的(1)显然成立。

其次,qPv,qPw且$\tau(q,v)\subseteq\tau(q,w)$成立的情况有:

$$\tau(q_2,v_3)\subseteq\tau(q_2,v_1),\tau(q_2,v_3)\subseteq\tau(q_2,v_2),$$
$$\tau(q_3,v_3)\subseteq\tau(q_3,v_1)。$$

根据规定有$v_1\leqslant v_3$,$v_2\leqslant v_3$。所以定义6中的(2)成立。

下面说明该映射(P,A,τ)满足定义6中的(3)。在本例中,对任意$F\subseteq P(q)$,任意$v,w\in F$,当$v=w$时,定义6中的(3)显然成立。当$v\neq w$时,满足有$\tau(q,v)\cap\tau(q,w)\neq\varnothing$且$F^u\cap P(q)\neq\varnothing$的情况有:

$$F=\{v_1,v_2,v_3\}\subseteq P(q_2),$$
$$F=\{v_1,v_3\}\subseteq P(q_3)。$$

当 $F=\{v_1,v_2,v_3\}\subseteq P(q_2)$ 时,有 $\tau(q_2,F^u)=\tau(q_2,v_3)=\tau(q_2,v_1)\cap\tau(q_2,v_2)\cap\tau(q_2,v_3)$,定义6中的(3)显然成立。当$F=\{v_1,v_3\}\subseteq P(q_3)$时,有 $\tau(q_3,F^u)=\tau(q_3,v_3)=\tau(q_3,v_1)\cap\tau(q_3,v_3)$,定义6中的(3)显然成立。

因此,该映射为析取属性映射。

定义7 设析取属性映射(P,A,τ)和子集$C\subseteq A$,对任意$q\in Q$,$F\subseteq P(q)$,$x\in F$,若$\tau(q,x)\cap C\neq\varnothing$,有 $F^u\cap P(q)\neq\varnothing$ 且存在$r\in Q$,$v\in F$,使得$C\backslash\tau(q,F^u)\subseteq\tau(r,v)$,则称子集$C$与析取属性映射$(P,A,\tau)$析取相容。

定义8 若任意子集$C\in\mathcal{C}$都与析取属性映射(P,A,τ)析取相容,则析取属性映射(P,A,τ)析取相容于属性结构$(A,\mathcal{C})$。若不存在与(P,A,τ)析取相容的其他属性结构$(A,\mathcal{C}')$,使得$\mathcal{C}\subset\mathcal{C}'$,则称与$(P,A,\tau)$析取相容的属性结构$(A,\mathcal{C})$是最大的。

定义9 对任意$q\in Q$,$v\in P(q)$,存在属性集$C\in\mathcal{C}$,满足下列两个条件:

(1)$\tau(q,v)\cap C\neq\varnothing$;

(2)对任意$w\in P(q)$,若$\tau(q,w)\cap C\neq\varnothing$且$v\leqslant w$,则$v=w$。

则称析取属性映射(P,A,τ)析取完备于属性结构$(A,\mathcal{C})$。

从某种意义上,析取完备性意味着一个项目可容许的每个响应值v必须是可观察的。首先,(1)保证了项目响应对(q,v)满足析取规则。其次,(2)保证在满足(1)的条件下,响应值v必须是最大的。

下面将通过例子说明以上定义。

例2 考虑例1中析取属性映射生成的结构$(A,\mathcal{C})$,如图1所示。

因为$\varnothing\in\mathcal{C}$且$\cup\mathcal{C}=A$,因此$(A,\mathcal{C})$是属性结构。

(1)$(A,\mathcal{C})$是析取相容的。

当 $C=\{a_1,a_3\}$ 时,对于项目 q_1,有$\tau(q_1,v_2)\cap C\neq\varnothing$,$\tau(q_1,v_3)\cap C\neq\varnothing$和

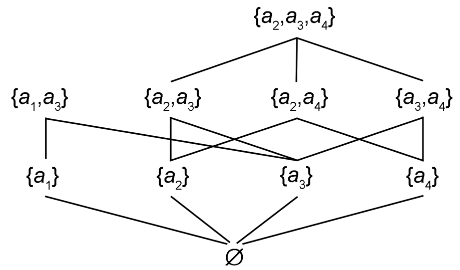

图1　例2中的结构$(A,\mathcal{C})$

Fig. 1　The structure $(A,\mathcal{C})$ in example 2

$$\{v_2,v_3\}^u\cap P(q_1)=\{v_3\}\neq\varnothing$$

且 $C\backslash\tau(q_1,v_3)\subseteq\tau(q_1,v_2)$。

对于项目 q_2，有 $\tau(q_2,v_1)\cap C\neq\varnothing$，$\tau(q_2,v_2)\cap C\neq\varnothing$，$\tau(q_2,v_3)\cap C\neq\varnothing$，同时

$$\{v_1,v_2,v_3\}^u\cap P(q_2)=\{v_3\}\neq\varnothing$$

且 $C\backslash\tau(q_2,v_3)\subseteq\tau(q_2,v_2)$。

对于项目 q_3，有 $\tau(q_3,v_1)\cap C\neq\varnothing$，$\tau(q_3,v_2)\cap C\neq\varnothing$，$\tau(q_3,v_3)\cap C\neq\varnothing$ 与

$$\{v_1,v_2,v_3\}^u\cap P(q_3)=\{v_3\}\neq\varnothing$$

且 $C\backslash\tau(q_3,v_3)\subseteq\tau(q_3,v_2)$。因此，$\{a_1,a_3\}$ 与 (P,A,τ) 析取相容。同理，任意子集 $C\in\mathcal{C}$ 都与 (P,A,τ) 析取相容。因此，(P,A,τ) 析取相容于 $(A,\mathcal{C})$。

(2)$(A,\mathcal{C})$是与(P,A,τ)析取相容的最大属性结构。若将 2^A 中缺失的六个属性状态的任何一个添加到 $\mathcal{C}$，则所得到的结构将不再与 (P,A,τ) 析取相容。例如，若将 $C=\{a_1,a_2\}$ 加入 $\mathcal{C}$ 中，得到 $\mathcal{C}'$，对于 q_3，有

$$\tau(q_3,v_1)\cap\{a_1,a_2\}\neq\varnothing,$$
$$\tau(q_3,v_2)\cap\{a_1,a_2\}\neq\varnothing,$$

同时 $\{v_1,v_2\}^u\cap P(q_3)=\{v_3\}\neq\varnothing$，但对于任意 $(q,v)\in P$，有 $\{a_1,a_2\}\backslash\tau(q_3,v_3)\not\subseteq\tau(q,v)$，因此 $\{a_1,a_2\}$ 与 (P,A,τ) 不析取相容。所以，$(A,\mathcal{C})$ 是与 (P,A,τ) 析取相容的最大属性结构。

(3)(P,A,τ)析取完备于$(A,\mathcal{C})$。

对于项目响应对 (q_1,v_1)，当 $C=\{a_4\}$ 时，有 $\tau(q_1,v_1)\cap\{a_4\}\neq\varnothing$ 且对任意 $w\in P(q)$，当 $\tau(q_1,w)\cap\{a_4\}\neq\varnothing$ 且 $v\leqslant w$ 时，有 $w=v_1$，满足析取完备性。同理，对于项目响应对 (q_2,v_1)，(q_3,v_1)，当 $C=\{a_4\}$ 时，满足析取完备性；对于项目响应对 (q_1,v_2)，(q_2,v_2)，(q_3,v_2)，当 $C=\{a_1\}$ 时，满足析取完备性；对于项目响应对 (q_1,v_3)，(q_2,v_3)，(q_3,v_3)，当 $C=\{a_3\}$ 时，满足析取完备性。因此，(P,A,τ) 析取完备于 $(A,\mathcal{C})$。

(4)属性结构$(A,\mathcal{C})$是一致空间。对任意 $a\in A$，有 $\{a\}\in\mathcal{C}$，因此定义3(1)显然成立。$\{a_1\}\subseteq\{a_1,a_3\}$，$\{a_3\}\subseteq\{a_1,a_3\}$，且 $\{a_1\}$，$\{a_3\}$，$\{a_1,a_3\}\in\mathcal{C}$。同理，对于任意 $C'\subseteq C$，若 $C\in\mathcal{C}$，有 $C'\in\mathcal{C}$。因此定义3(2)显然成立。

项目响应对集合 P 上的偏序关系 $\leqslant_P$ 是由响应值集合 V 上的偏序关系 $\leqslant$ 推导出来的：对于 $(q,v),(r,w)\in P$，$(q,v)\leqslant_P(r,w)\Leftrightarrow q=r$ 且 $v\leqslant w$。

定义10　设析取属性映射(P,A,τ)与属性结构$(A,\mathcal{C})$，析取项目响应函数是映射 $p:\mathcal{C}\to 2^P$，对于 $C\in\mathcal{C}$，有 $p(C)=\max\{(q,v)\in P:\tau(q,v)\cap C\neq\varnothing\}$。特别地，规定 $p(\varnothing)=\perp$。

若非空子集 $C\subseteq A$，有 $\tau(q,v)\cap C\neq\varnothing$，即个体具有 C 中的部分属性，则对项目 q 可观察到“至少”响应值 v。此外，将 $\perp=Q\times\{z\}$ 称为将底元赋予所有项目的常值映射。

定理1　对于析取项目响应函数 p，若 $C_1,C_2\in\mathcal{C}$，$C_1\subseteq C_2$，则 $p(C_1)\sqsubseteq p(C_2)$。

证明　设 $(q,v)\in p(C_1)$，$(q,w)\in p(C_2)$，则 $\tau(q,v)\bigcap C_1\neq\varnothing$，$\tau(q,w)\bigcap C_2\neq\varnothing$。因为 $C_1\subseteq C_2$，所以 $\tau(q,v)\bigcap C_2\neq\varnothing$。由定义10可得，$v\leqslant w$，即 $p(C_1)(q)\leqslant p(C_2)(q)$。因此，$p(C_1)\sqsubseteq p(C_2)$。

定理2　设(P,A,τ)是析取属性映射，$(A,\mathcal{C})$是属性结构，析取属性映射(P,A,τ)析取完备于属性结构$(A,\mathcal{C})$当且仅当 $\bigcup_{C\in\mathcal{C}}p(C)=P$。

证明　必要性。设析取属性映射(P,A,τ)析取完备于属性结构$(A,\mathcal{C})$，下证 $\bigcup_{C\in\mathcal{C}}p(C)=P$。设 $(q,v)\in p(C)$，由定义10得，$(q,v)\in P$，有 $\bigcup_{C\in\mathcal{C}}p(C)\subseteq P$。另一方面，设 $(q,x)\in P$。根据析取完备性可得，存在 $C\in\mathcal{C}$，使得 $\tau(q,x)\cap C\neq\varnothing$。若任意 $w\in P(q)$，$\tau(q,w)\cap C\neq\varnothing$ 且 $x\leqslant w$，有 $x=w$。由定义10得，$(q,x)\in p(C)$。因此，$P\subseteq\bigcup_{C\in\mathcal{C}}p(C)$。所以，$\bigcup_{C\in\mathcal{C}}p(C)=P$。

充分性。设$(A,\mathcal{C})$相对于(P,A,τ)不是析

取完备的。当定义9(1)不成立时，存在$q\in Q$，$v\in P(q)$，对任意$C\in\mathcal{C}$，有$\tau(q,v)\cap C=\varnothing$，则$p(C)(q)\neq v$。当定义9(2)不成立时，存在$C'\in\mathcal{C}$，$\tau(q,x)\cap C'\neq\varnothing$且对任意$w\in P(q)$，$\tau(q,w)\cap C'\neq\varnothing$，有$x\prec w\preccurlyeq p(C')(q)$，因此对于任意$C'\in\mathcal{C}$，$p(C')(q)\neq x$。所以$\bigcup_{C\in\mathcal{C}}p(C)\subseteq P$。这与$\bigcup_{C\in\mathcal{C}}p(C)=P$矛盾。因此，证明成立。

定理3　与析取属性映射(P,A,τ)析取相容的最大属性结构是唯一的，且是一致空间。

证明　设$(A,\mathcal{C})$是与析取属性映射(P,A,τ)析取相容的最大属性结构，则它必须包含且只包含所有与τ相容的子集。由此，唯一性可证。

下证该最大属性结构是一致空间。设$C,C'\in 2^A$，$C'\subseteq C$，$C\in\mathcal{C}$。设任意$q\in Q$，$x\in F$，$F\subseteq P(q)$，$\tau(q,x)\cap C'\neq\varnothing$。由于$C'\subseteq C$，有$\tau(q,x)\cap C\neq\varnothing$。因为$C\in\mathcal{C}$，所以由析取相容性可得$F^u\cap P(q)\neq\varnothing$，且存在$r\in Q$，$v\in F$使得$C\backslash\tau(q,F^u)\subseteq\tau(r,v)$。所以，对任意$x\in F$，$\tau(q,x)\cap C'\neq\varnothing$有

$$F^u\cap P(q)\neq\varnothing,$$

且$C'\backslash\tau(q,F^u)\subseteq C\backslash\tau(q,F^u)\subseteq\tau(r,v)$。因此$C'\in\mathcal{C}$，即定义3(2)成立。由定义6(3)和定义3(2)得，对于任意$a\in A$，有$\{a\}\subseteq C$，则$\{a\}\in\mathcal{C}$，即定义3(1)成立。

定理4　设(P,A,τ)是析取属性映射，$(A,\mathcal{C})$是属性结构。对于$C\in\mathcal{C}$，集合$K=p(C)$是多分知识状态当且仅当$(A,\mathcal{C})$相对于(P,A,τ)是析取相容的。

证明　设(P,A,τ)析取相容于$(A,\mathcal{C})$。若K不是多分知识状态，则有$q\in Q$，$v,w\in V$且$v\neq w$，于是$(q,v),(q,w)\in p(C)$，即存在$C\in\mathcal{C}$使得$\tau(q,v)\cap C\neq\varnothing$且$\tau(q,w)\cap C\neq\varnothing$。令$C=\tau(q,v)$，$v,w\in F$且$F\subseteq P(q)$，有$\tau(q,v)\cap\tau(q,w)\neq\varnothing$。由定义6(3)和定义10得，有$x\in F^u\cap P(q)$且$\tau(q,x)\supseteq\tau(q,v)\cap\tau(q,w)$。因此，$\tau(q,x)\cap C\neq\varnothing$，则$(q,x)\in p(C)$，这与$(q,v),(q,w)\in p(C)$矛盾。故当$(A,\mathcal{C})$相对于$(P,A,\tau)$析取相容时，$K$是多分知识状态。反之，设$\mathcal{C}$不析取相容于$\tau$，则存在$q\in Q$，$F\subseteq P(q)$，$a,b\in F$且$a$，$b$在$P(q)$中都是最大的，使得$\tau(q,a)\cap C\neq\varnothing$，$\tau(q,b)\cap C\neq\varnothing$，则$p(C)(q)$不唯一，即$p(C)$不是映射。

推论1　设P是集合Q和V的可容许关系。给定析取属性映射(P,A,τ)和属性结构$(A,\mathcal{C})$，$\mathcal{K}=p(\mathcal{C})=\{p(C):C\in\mathcal{C}\}$。四元组$(Q,V,P,\mathcal{K})$是多分知识结构当且仅当$(P,A,\tau)$析取相容于$(A,\mathcal{C})$，且$(P,A,\tau)$析取完备于$(A,\mathcal{C})$。

证明　根据定理1，定理2，定理4，证明成立。

下面将通过例子对上述的定义10进行说明，并解释上述几个定理。

例3　考虑例1中定义的析取属性映射(P,A,τ)以及例2中与之析取相容的属性结构$(A,\mathcal{C})$。根据定义10，可得到多分知识状态$K=p(C)$，如表2所示。

表2　例3中的多分知识状态$K=p(C)$

Table 2　The polytomous knowledge state $K=p(C)$ in example 3

属性集$C\in\mathcal{C}$	多分知识状态$p(C)$
$\varnothing$	$\{(q_1,v_0),(q_2,v_0),(q_3,v_0)\}$
$\{a_1\}$	$\{(q_1,v_2),(q_2,v_2),(q_3,v_2)\}$
$\{a_2\}$	$\{(q_1,v_0),(q_2,v_0),(q_3,v_1)\}$
$\{a_3\}$	$\{(q_1,v_3),(q_2,v_3),(q_3,v_3)\}$
$\{a_4\}$	$\{(q_1,v_1),(q_2,v_1),(q_3,v_1)\}$
$\{a_1,a_3\}$	$\{(q_1,v_3),(q_2,v_3),(q_3,v_3)\}$
$\{a_2,a_3\}$	$\{(q_1,v_3),(q_2,v_3),(q_3,v_3)\}$
$\{a_2,a_4\}$	$\{(q_1,v_1),(q_2,v_1),(q_3,v_1)\}$
$\{a_3,a_4\}$	$\{(q_1,v_3),(q_2,v_3),(q_3,v_3)\}$
$\{a_2,a_3,a_4\}$	$\{(q_1,v_3),(q_2,v_3),(q_3,v_3)\}$

由此构成的多分知识结构如图2所示。

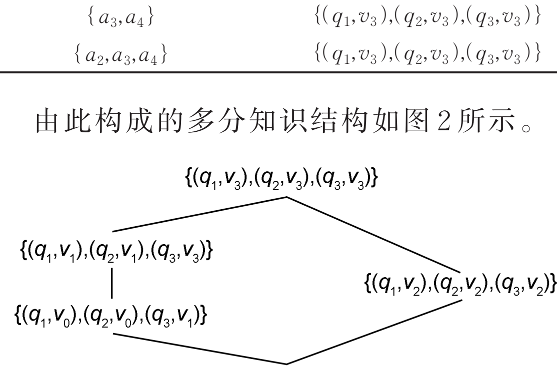

图2　例3中的多分知识结构

Fig. 2　The polytomous knowledge structure in example 3

例如，对于属性状态$\{a_1,a_3\}$，满足$(q,v)\in P$且$\tau(q,v)\cap\{a_1,a_3\}\neq\varnothing$的项目响应对有：

$$(q_1,v_2),(q_1,v_3),(q_2,v_1),(q_2,v_2),(q_2,v_3),(q_3,v_1),(q_3,v_2),(q_3,v_3),$$

则 $p(\{a_1,a_3\})=\{(q_1,v_3),(q_2,v_3),(q_3,v_3)\}$。同时，有 $p(\varnothing)=\{(q_1,v_0),(q_2,v_0),(q_3,v_0)\}=\bot$。对于 $\{a_2,a_3\}$，$\{a_2,a_3,a_4\}\in\mathcal{C}$，有

$$p(\{a_2,a_3\})\sqsubseteq p(\{a_2,a_3,a_4\})。$$

根据上面的论述，设计一种构建多分知识结构的算法，如算法1所示。

算法1 多分知识结构的构建算法

Data：输入析取属性映射 (P,A,τ)

1.用 $\mathcal{C}$ 表示属性集族，并令 $\mathcal{C}=\varnothing$，$\mathcal{K}=\varnothing$。

2.遍历 2^A 中的每一个子集 C，对任意 $(q,x)\in P$，规定 $P(q)=\{x\in V:qPx\}$，遍历 $2\hat{}P(q)$ 中的每一个子集 F，找出 $\tau(q,x)\cap C\neq\varnothing\Rightarrow F^u\cap P(q)\neq\varnothing$ 且存在 $v\in F$，$r\in Q$，使得 $C\setminus\tau(q,F^u)\subseteq\tau(r,v)$，并将 C 加入 $\mathcal{C}$。

3.$\cup C=A$ 且满足析取完备性，则 $(A,\mathcal{C})$ 是一个属性结构。

4.对 $C\in\mathcal{C}$，计算 $K=\max\{(q,x)\in P:\tau(q,x)\cap C\neq\varnothing\}$，并将 K 加入 $\mathcal{K}$。

5.建立多分知识结构 $(Q,V,P,\mathcal{K})$。

Result：输出多分知识结构 $(Q,V,P,\mathcal{K})$

算法1是启发式搜索算法，求解效率比盲目搜索算法更高，其时间复杂度为 $O(2^{|A|}\cdot|P|)$。

3 应用例子

在本节中，通过举例说明析取属性映射诱导的多分知识结构理论能运用于多分项目情况，如：除 v_0 外的响应值无序的教学模式的对比研究，响应值部分偏序的教师成长过程分析，响应值线性序关系的部分冗思反应量表分析。此外，根据知识结构的网格化[10]的特征，可将小规模的信息表集成为大规模的信息表，因此论文所提出的方法对大规模的信息表仍有效，具有广泛适用性。

例4 本例运用基于析取属性映射诱导的多分知识结构理论，以数学课堂评价中较受关注的几个要素[26]为维度，结合《义务教育数学课程标准(2022年版)》，对分课堂和翻转课堂两种教学模式[27]进行对比研究。

考虑项目集 $Q=\{q_1,q_2\}$，定义如下：

q_1：对分课堂；q_2：翻转课堂。

考虑响应值集 $V=\{v_0,v_1,v_2,v_3\}$，定义如下：

v_0：较不受关注的评价要素；v_1：教学目标；v_2：教学效果及教师素质；v_3：教学内容过程与方法。其中，$v_0\prec v_i$，$i\in\{1,2,3\}$。

属性集为 $A=\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\}$，定义如下：

a_1：促进学生自主学习，加强综合实践；

a_2：关注教学评价；

a_3：整体把握并注重教学内容的结构化，注重教学内容与核心素养的关联；

a_4：注重信息技术与数学教学的融合，教学方法丰富；

a_5：明确教学目标，体现整体和阶段性。

析取属性映射 (P,A,τ) 如表3所示。

表3 两种教学模式的析取属性映射

Table 3 The disjunctive attribute mapping of two teaching models

项目响应对集合 P	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
(q_1,v_0)					
(q_1,v_1)					√
(q_1,v_2)	√	√			
(q_1,v_3)			√		
(q_2,v_0)					
(q_2,v_1)					√
(q_2,v_2)	√				
(q_2,v_3)			√	√	

属性结构 $(A,\mathcal{C})$ 和多分知识结构 $\mathcal{K}$ 分别如图3和图4所示。

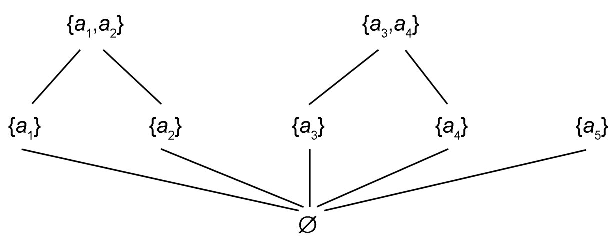

图3 教学模式的属性结构

Fig. 3 The attribute structure of teaching mode

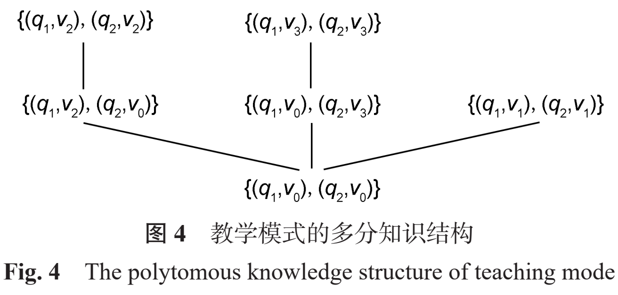

图4 教学模式的多分知识结构

Fig. 4 The polytomous knowledge structure of teaching mode

从教学模式的多分知识结构可以对对分课堂和翻转课堂两种教学模式进行对比研究。例如，从多分知识状态 $\{(q_1,v_2),(q_2,v_0)\}$ 到

$\{(q_1,v_2),(q_2,v_2)\}$这一变化可以看出，对分课堂在教学效果及教师素质这一方面是优于翻转课堂的；从多分知识状态$\{(q_1,v_0),(q_2,v_3)\}$到$\{(q_1,v_3),(q_2,v_3)\}$这一变化可以看出，对分课堂在教学内容过程与方法这一方面是劣于翻转课堂的；而在教学目标这一方面两者无明显优劣之分。该结果可以用来指导实践。例如，在运用的过程中，针对一定难度的项目可以录制视频以供学生在授课前后进行观看，并布置适当的课后作业，了解学生的知识掌握程度，便于进行教学评价。

另外，令$K_1=\{(q_1,v_2),(q_2,v_0)\}$，则

$$K_1'=Q\backslash K_1=\{(q_1,v_0),(q_1,v_1),(q_1,v_3),(q_2,v_1),(q_2,v_2),(q_2,v_3)\}。$$

这里v_1,v_2,v_3没有偏序关系，根据文献［23］，K_1'不是合取情况下的多分知识状态。因此，我们这里所讨论的析取属性映射诱导的多分知识结构和文献［23］中的合取情形下的多分知识结构不是对偶的。这不是偶然，孙文在文献［28］中有以下结论：如果能力结构$\mathcal{C}\neq 2^A$，则技能映射(Q,A,τ)在析取模型与合取模型下生成的知识结构不一定是对偶的。

例4讨论了除v_0外的响应值无序的情况，但现实生活中不乏部分水平有高低之分的情况。下面将通过例5说明析取属性映射诱导的多分知识结构理论在这种情况下也是适用的。

例 5 设项目集合$Q=\{q_1,q_2,q_3\}$，定义如下：

q_1：幼儿园老师；q_2：小学老师；q_3：中学老师。

响应值集合$V=\{v_0,v_1,v_2,v_3\}$，定义如下：

v_0：与教育教学无关的水平；v_1：学科知识水平；v_2：教育理论素养；v_3：教学能力。

其中，$v_0\leqslant v_1$，$v_0\leqslant v_2\leqslant v_3$。

属性集合$A=\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$。定义如下：

a_1：能够深入浅出地讲解知识点；

a_2：设计合理的教学方案；

a_3：不断反思和改进自己的教育实践；

a_4：能够进行个性化教学并科学评价。

教师专业发展水平的析取属性映射如表4所示。

可得到相对于该析取属性映射析取相容的最大属性结构$(A,\mathcal{C})$，如图5所示。

由每个属性状态$C\in\mathcal{C}$通过析取属性映射所描绘的多分知识状态$K=p(C)$所构成的多分知识结构，如图6所示。

表4 教师专业发展水平的析取属性映射

Table 4 The disjunctive attribute mapping of teachers' professional development level

项目响应对集合P	a_1	a_2	a_3	a_4
(q_1,v_0)				
(q_1,v_1)	√			
(q_1,v_2)			√	
(q_1,v_3)		√		
(q_2,v_0)				
(q_2,v_1)	√			
(q_2,v_2)			√	√
(q_2,v_3)				√
(q_3,v_0)				
(q_3,v_1)	√			
(q_3,v_2)		√	√	√
(q_3,v_3)		√		√

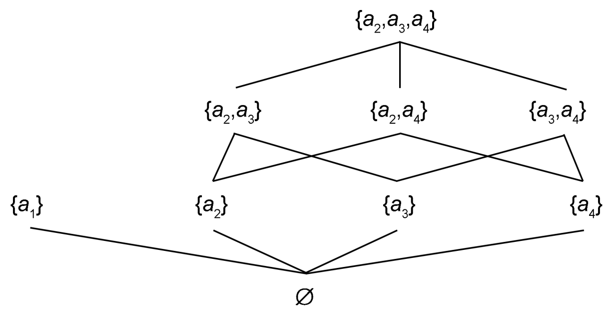

图5 教师专业发展水平的属性结构

Fig. 5 The attribute structure of teachers' professional development level

首先，学科知识水平与教学水平反映的是不同方面的水平，因此教师专业发展水平的多分知识结构缺少顶层元素。其次，从多分知识状态$\{(q_1,v_0),(q_2,v_0),(q_3,v_0)\}$到多分知识状态$\{(q_1,v_3),(q_2,v_0),(q_3,v_3)\}$，再到多分知识状态$\{(q_1,v_3),(q_2,v_2),(q_3,v_3)\}$，最后到多分知识状态$\{(q_1,v_3),(q_2,v_3),(q_3,v_3)\}$，反映了教师成长的复杂性和阶段性的特征。

除了例4和例5的情况，在以往研究中更多考虑的是响应值具有线性序的情况。下面将通过例6说明析取属性映射诱导的多分知识结构理论也适用于响应值具有线性序的情况。

例 6 以“冗思反应量表（Ruminative Re-

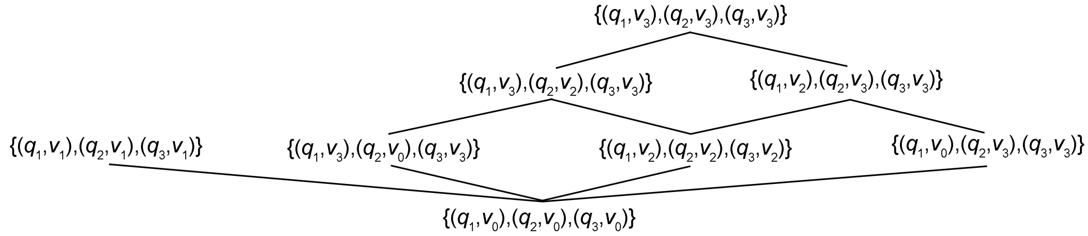

图 6 教师专业发展水平的多分知识结构

Fig. 6 The polytomous knowledge structure of teachers' professional development level

sponse Scale, RRS)”[29]为例。我们选取其中的两个项目作为项目集 $Q=\{q_1,q_2\}$,定义如下:

q_1:想到“我刚刚为什么不能把事情做得更好一点”;

q_2:会想自己什么事情都做不好。

同时,我们将四个评分等级的集合记为线性序集 $V=\{v_0,v_1,v_2,v_3\}$ 且 $v_0\leqslant v_1\leqslant v_2\leqslant v_3$,即从1到4级评分,得分越高表示使用相应的思考方式就越多。

根据量表,设属性集 $A=\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$,定义如下:

a_1:很忧伤;a_2:有些忧伤;a_3:有一点忧伤;a_4:没有忧伤。

由此产生的析取属性映射 (P,A,τ) 如表5所示。

表5 例6中的析取属性映射

Table 5 The disjunctive attribute mapping in example 6

项目响应对集合 P	a_1	a_2	a_3	a_4
(q_1,v_0)				
(q_1,v_1)	√	√	√	√
(q_1,v_2)	√	√	√	
(q_1,v_3)	√	√		
(q_2,v_0)				
(q_2,v_1)	√	√	√	
(q_2,v_2)	√	√		
(q_2,v_3)	√			

可得到最大属性结构 $(A,\mathcal{C})$ 及多分知识结构,分别如图7和图8所示。

对比项目 q_1 和项目 q_2,可以得出低冗思个体往往会将个体的注意力集中于当下的状态或感受。此时,如果能采取积极的应对策略,不仅有利于个体适时有效地处理生活中可能带来消极影响的事件,而且会降低此类事件对个体心理产生消极影响的可能性。另外,可以注意

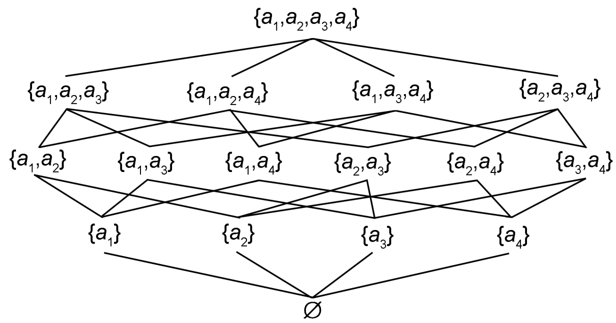

图 7 例6中的属性结构

Fig. 7 The attribute structure in example 6

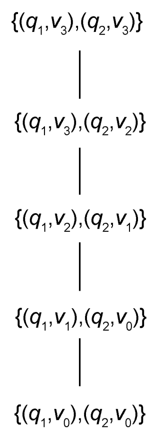

图 8 例6中的多分知识结构

Fig. 8 The polytomous knowledge structure in example 6

到,当响应值呈现线性序关系时,$\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{K}$ 都具有顶层元素。

4 结论

本文从析取规则的角度,提出了析取属性映射的公理化定义,并考虑析取相容性和析取完备性,从而建立了由析取属性映射诱导的多分知识结构理论,扩展了文献[23]的属性映射的概念,并且通过应用例子说明所提出的构建方法具有广泛适用性。结合文献[10]中知识结构网格化的有关知识可以发现,本文所提出的方法对大规模的信息表依然有效。在本文框

架中,仅考虑析取属性映射诱导的多分知识结构,对于更一般化的能力模型,将结合文献[24]在后续的研究中进行考虑。此外,智慧来等[18]借助模糊形式概念分析对知识结构作增量学习,因此今后也将进一步考虑多分知识结构的动态学习过程。

参考文献:

[1] DOIGNON J P, FALMAGNE J C. Spaces for the Assessment of Knowledge[J]. *Int J Man Mach Stud*, 1985, **23**(2): 175-196. DOI: 10.1016/s0020-7373(85)80031-6.

[2] DOIGNON J P. Knowledge Spaces and Skill Assignments[M]//FISCHER GH, LAMING D. Contributions to Mathematical Psychology, Psychometrics, and Methodology. New York: Springer, 1994: 111-121. DOI: 10.1007/978-1-4612-4308-3_8.

[3] GEDIGA G, DÜNTSCH I. Skill Set Analysis in Knowledge Structures[J]. *Br J Math Stat Psychol*, 2002, **55**(Pt 2): 361-384. DOI: 10.1348/000711002760554516.

[4] HELLER J, AUGUSTIN T, HOCKEMEYER C, *et al*. Recent Developments in Competence-based Knowledge Space Theory[M]//Knowledge Spaces. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2013: 243-286. DOI: 10.1007/978-3-642-35329-1_12.

[5] HELLER J, STEFANUTTI L, ANSELMI P, *et al*. On the Link between Cognitive Diagnostic Models and Knowledge Space Theory[J]. *Psychometrika*, 2015, **80**(4): 995-1019. DOI: 10.1007/s11336-015-9457-x.

[6] HELLER J, ÜNLÜ A, ALBERT D. Skills, Competencies and Knowledge Structures[M]//Knowledge Spaces. Berlin, Heidelberg: Springer, 2013: 229-242. DOI: 10.1007/978-3-642-35329-1_11.

[7] KOROSSY K. Extending The Theory of Knowledge Spaces: A Competence-Performance Approach[J]. *Zeitschrift fur Psychologie*, 1997, **205**(1): 53-82. DOI: 10.1300/J015v20n03_a.

[8] KOROSSY K. Modeling Knowledge as Competence and Performance[M]//Knowledge Spaces. New York: Psychology Press, 1999: 115-144. DOI: 10.4324/9781410602077-14.

[9] DE CHIUSOLE D, SPOTO A, STEFANUTTI L. Extracting Partially Ordered Clusters from Ordinal Polytomous Data[J]. *Behav Res Meth*, 2020, **52**(2): 503-520. DOI: 10.3758/s13428-019-01248-8.

[10] HELLER J, REPITSCH C. Distributed Skill Functions and the Meshing of Knowledge Structures[J]. *J Math Psychol*, 2008, **52**(3): 147-157. DOI: 10.1016/j.jmp.2008.01.003.

[11] ALBERT D, SCHREPP M. Structure and Design of an Intelligent Tutorial System Based on Skill Assignments [M]//Knowledge Spaces. New York, USA: Psychology Press, 1999: 191-208. DOI: 10.4324/9781410602077-18.

[12] ARASASINGHAM R D, TAAGEPERA M, POTTER F, *et al*. Assessing the Effect of Web-based Learning Tools on Student Understanding of Stoichiometry Using Knowledge Space Theory[J]. *J Chem Educ*, 2005, **82**(8): 1251. DOI: 10.1021/ed082p1251.

[13] 李进金, 孙文. 知识空间、形式背景和知识基[J]. 西北大学学报(自然科学版), 2019, **49**(4): 517-526. DOI: 10.16152/j.cnki.xdxbzr.2019-04-004.
LI J J, SUN W. Knowledge Space, Formal Context and Knowledge Base[J]. *J Northwest Univ Nat Sci Ed*, 2019, **49**(4): 517-526. DOI: 10.16152/j.cnki.xdxbzr.2019-04-004.

[14] 周银凤, 李进金, 冯丹露, 等. 形式背景下的学习路径与技能评估[J]. 模式识别与人工智能, 2021, **34**(12): 1069-1084. DOI: 10.16451/j.cnki.issn1003-6059.202112001.
ZHOU Y F, LI J J, FENG D L, *et al*. Learning Paths and Skills Assessment in Formal Context[J]. *Pattern Recognit Artif Intell*, 2021, **34**(12): 1069-1084. DOI: 10.16451/j.cnki.issn1003-6059.202112001.

[15] 周银凤, 李进金. 形式背景下的技能约简与评估[J]. 计算机科学与探索, 2022, **16**(3): 692-702. DOI: 10.3778/j.issn.1673-9418.2008024.
ZHOU Y F, LI J J. Skill Reduction and Assessment in Formal Context[J]. *J Front Comput Sci Technol*, 2022, **16**(3): 692-702. DOI: 10.3778/j.issn.1673-9418.2008024.

[16] 高纯, 王睿智. 知识空间理论析取模型下最小技能集的生成[J]. 计算机科学与探索, 2010, **4**(12): 1109. DOI: 10.3778/j.issn.1673-9418.2010.12.005.
GAO C, WANG R Z. The Formation of Minimal Skill Set in Disjunctive Model of Knowledge Space Theory[J]. *J Fron Comput Sci Technol*, 2010, **4**(12): 1109-1114. DOI: 10.3778/j.issn.1673-9418.2010.12.005.

[17] 杨桃丽, 李进金, 李招文, 等. 基于技能构建知识结构的两种变精度模型与技能子集约简[J]. 模式识别与人工智能, 2022, **35**(8): 671-687. DOI: 10.16451/j.cnki.issn1003-6059.2022080001.
YANG T L, LI J J, LI Q /Z /Z W, *et al*. Two Kinds of Variable Precision Models Based on Skill for Constructing Knowledge Structures and Skill Subset Reduction [J]. *Pattern Recognit Artif Intell*, 2022, **35**(8): 671-687. DOI: 10.16451/j.cnki.issn1003-6059.2022080001.

[18] 智慧来,李金海. 面向知识结构分析的模糊概念格模型 [J]. 软件学报, 2024, **35**(5): 2466-2484. DOI: 10.13328/j.cnki.jos.006899.
ZHI H L, LI J H. Knowledge Structure Analysis Orient-

ed Fuzzy Concept Lattice Models[J]. *J SoftW*, 2024, **35**(5): 2466-2484. DOI: 10.13328/j.cnki.jos.006899.

[19] SCHREPP M. A Generalization of Knowledge Space Theory to Problems with more than Two Answer Alternatives[J]. *J Math Psychol*, 1997, **41**(3): 237-243. DOI: 10.1006/jmps.1997.1169.

[20] BARTL E, BELOHLAVEK R. Knowledge Spaces with Graded Knowledge States[C]//2008 International Symposium on Knowledge Acquisition and Modeling. New York: IEEE, 2008: 3-8. DOI: 10.1109/KAM.2008.106.

[21] STEFANUTTI L. On the Assessment of Procedural Knowledge: From Problem Spaces to Knowledge Spaces[J]. *Br J Math Stat Psychol*, 2019, **72**(2): 185-218. DOI: 10.1111/bmsp.12139.

[22] 孙晓燕, 李进金. 基于程序性知识学习的项目状态转移函数与多分知识结构[J]. 模式识别与人工智能, 2022, **35**(3): 223-242. DOI: 10.16451/j.cnki.issn1003-6059.202203003.
SUN X Y, LI J J. Item State Transition Functions and Polytomous Knowledge Structures Based on Procedural Knowledge Learning[J]. *Pattern Recognit Artif Intell*, 2022, **35**(3): 223-242. DOI: 10.16451/j.cnki.issn1003-6059.202203003.

[23] STEFANUTTI L, SPOTO A, ANSELMI P, *et al*. Towards a Competence-based Polytomous Knowledge Structure Theory[J]. *J Math Psychol*, 2023, **115**: 102781. DOI: 10.1016/j.jmp.2023.102781.

[24] SUN W, LI J J, LIN F C, *et al*. Constructing Polytomous Knowledge Structures from Fuzzy Skills[J]. *Fuzzy Sets Syst*, 2023, **461**: 108395. DOI: 10.1016/j.fss.2022.09.003.

[25] 林宇静, 李进金, 陈惠琴. 形式背景下的多分知识结构与学习路径[J]. 山东大学学报(理学版), 2023, **58**(9): 114-126. DOI: 10.6040/j.issn.1671-9352.0.2022.504.
LIN Y J, LI J J, CHEN H Q. Polytomous Knowledge Structure and Learning Path in Formal Context[J]. *J Shandong Univ Nat Sci*, 2023, **58**(9): 114-126. DOI: 10.6040/j.issn.1671-9352.0.2022.504.

[26] 刘进, 顾芳芳. 中学数学课堂评价量表研究现状与思考[J]. 理科考试研究, 2023, **30**(19): 12-15.

[27] 于笑艳, 翟临滨. 对分课堂与翻转课堂教学模式对比研究[J]. 中国教育技术装备: 2023, **10**(22): 1-3. DOI: 10.3969/j.issn.1671-489X.2022.16.134.
YU X Y, ZHAI L B. Comparative Study on Teaching Mode of PAD Classroom and Flipped Classroom[J]. *China Edu Technol Equip*, 2023, **10** (22): 1-3. DOI: 10.3969/j.issn.1671-489X.2022.16.134.

[28] 孙文. 模糊集在知识空间理论中的应用[D]. 汕头: 汕头大学, 2022.
SUN W. Application of Fuzzy Sets in Knowledge Space Theory[D]. Shantou: Shantou University, 2022.

[29] 富伟伟, 王广曦, 李永娟. 压力与青少年抑郁的关系: 有调节的中介效应分析[J]. 中国临床心理学杂志, 2018, **26**(4): 788-791. DOI: 10.16128/j.cnki.1005-3611.2018.04.034.
FU W W, WANG G X, LI Y J. Stress, Sleep Quality, Rumination and Depression in Adolescents: Moderated Mediation Analysis[J]. *Chin J Clin Psychol*, 2018, **26**(4): 788-791. DOI: 10.16128/j.cnki.1005-3611.2018.04.034.