山西大学学报(自然科学版)48(1):1—19,2025
Journal of Shanxi University(Nat. Sci. Ed.)

DOI:10.13451/j.sxu.ns.2024151

自适应个性化巩固学习模型

王功勋,李进金*
(闽南师范大学 数学与统计学院,福建 漳州 363000)

摘　要:"巩固学习推荐"是指向学生推荐需要复习巩固的学习内容的过程。本文研究了基于能力的知识空间理论的个性化巩固学习推荐问题,针对能力状态与知识状态之间缺乏一一对应关系的挑战,提出了一种有效的推荐方法。该方法首先通过学生的知识状态计算内掌握边缘,并据此推导出退步前后的知识状态,然后通过这些知识状态确定相应能力状态的顶或底,最终根据顶和底推荐需要巩固学习的技能集,以防止学生因遗忘等因素导致知识退步。本文提出了两个刻画定理:一是用技能函数刻画能力状态的顶或底,二是用问题函数刻画知识状态的内掌握边缘。利用这些定理,可在不建立知识结构的前提下直接获取能力状态的顶或底及知识状态的内掌握边缘。最后本文分别给出了根据定义和刻画定理获取内掌握边缘的算法,并通过对比实践说明后者耗时平均减少了77%,内存占用平均降低了67%。

关键词:知识状态;能力状态;内掌握边缘;技能函数;问题函数;个性化学习
中图分类号:TP18　　　**文献标志码**:A　　　**文章编号**:0253-2395(2025)01-0001-19

Adaptive Personalized Consolidated Learning Model

WANG Gongxun, LI Jinjin*
(*School of Mathematics and Statistics, Minnan Normal University, Zhangzhou* 363000, *China*)

Abstract: "Consolidated Learning Recommendations" refers to the process of recommending learning content that students need to review and consolidate. This paper investigates the issue of personalized consolidated learning recommendations based on competence-based knowledge space theory, and proposes an effective recommendation method to address the challenge of the lack of one-to-one correspondence between competence states and knowledge states. The method firstly calculates the inner master fringe based on the student's knowledge state. It uses this to deduce the knowledge states before and after potential regression. Based on these knowledge states, it identifies the tops or bottoms of the corresponding competence states. Finally, according to these tops or bottoms, it recommends the skill set that needs to be consolidated. This approach helps prevent knowledge regression due to factors like forgetting. This paper presents two characterization theorems: the first uses a skill function to characterize the tops or bottoms of competence states, and the second uses a problem function to characterize the inner master fringe of knowledge states. By applying these theorems, the tops or bottoms of competence states and the inner master fringe of knowledge states can be directly obtained without constructing a knowledge structure. Finally, this paper presents algorithms to obtain the inner master fringe based on definitions and characterization theorems, and demonstrates through comparative practice that the latter reduces time consumption by an average of 77% and memory usage by an average of 67%.
Key words: knowledge state; competence state; inner master fringe; skill function; problem function; personalized learning

---

收稿日期:2024-06-24;**接受日期**:2024-10-24
基金项目:国家自然科学基金(12271191)
作者简介:王功勋(1999—),男,福建福清人,硕士研究生,研究方向为知识空间理论。E-mail:326165551@qq.com
* **通信作者**:李进金(LI Jinjin),E-mail:jinjinlimnu@126.com
引文格式:王功勋,李进金. 自适应个性化巩固学习模型[J]. 山西大学学报(自然科学版),2025,48(1):1-19. DOI:10.13451/j.sxu.ns.2024151.

0 引言

近年来,个性化教学已成为教育发展的重要方向,传统的“一刀切”的教育模式已经无法满足学生的个性化需求。2021年“双减”政策提出,通过作业设计提升作业的诊断与巩固功能,鼓励布置个性化作业[1]。因此,如何布置分层和个性化作业,完成巩固学习推荐成为当前亟待解决的问题。在当前的相关研究中,就上述问题而言,大多数研究者主要采用认知诊断模型、知识追踪、项目反应理论、最近发展区等理论[2],而利用知识空间理论对该问题进行的研究相对较少。然而,值得强调的是,知识空间理论作为一个成熟、系统、科学且具备强大可解释性的理论框架,在解决该问题上具有天然的适用性。目前,知识空间理论已被广泛应用于智能辅导系统如知识空间中的评估与学习(Assessment and Learning in Knowledge Spaces,ALEKS)[3]、Stat-Knowlab[4]等。此外,Heller等[5-6]的研究探讨了知识空间理论与认知诊断模型之间的密切关系。因此,在本文中,将深入探讨知识空间理论在解决这一问题上的潜力和价值。

Falmagne和Doignon[7]在知识空间理论中提出了内边缘和外边缘的定义。并且老师可以利用外边缘进行学习指导或学习路径推荐,利用内边缘进行巩固学习推荐(包括布置作业)。针对理论的不足,Falmagne等[8-14]提出了基于能力的知识空间理论。接着,Heller等[5-6,15-18]提出了在基于能力的知识空间理论中获取能力状态并以此寻找学习路径的方法,但是该方法在获取能力状态中需要引入额外的信息或者需要变更问题集。Stefanutti等[19]在基于能力的知识空间理论中针对合取模型提出了不必知道具体能力状态也能寻找学习路径的方法,但是该方法仅考虑有效外边缘非空的特殊情况。周银凤等[20-21]利用形式概念分析方法,针对析取、合取和能力模型分别提出了不必知道具体能力状态也能寻找学习路径的方法,但是该方法也仅考虑有效外边缘非空的特殊情况。综上,我们会发现在知识空间理论的后续研究中,大部分研究者只关注外边缘,而忽视内边缘。这是因为内外边缘的大部分性质有着简单的对应关系,但内边缘的应用不应被忽视。所以本文旨在基于能力的知识空间理论中针对析取、合取和能力模型分别提出一种基于同一类能力的顶或底直接计算知识状态内掌握边缘,进行个性化巩固学习推荐的一般方法。

在知识空间理论中,教师通过学生对测试题的回答情况判断其当前的知识状态及其内边缘。教师可基于此边缘提出学生现在要巩固的问题,并给出学生要完成的作业。然而,知识状态的内边缘可能是空的,这意味着处于该知识状态的学生没有办法通过只复习一个问题来巩固知识状态。因此,许多学者将自己的研究局限在良级知识空间中,即一种每个知识状态都有一个非空内边缘的特殊知识结构。此外,Noventa等在文献[22]中将外边缘的概念进行拓展,不再局限于一次只能学习一个问题,这也更符合实际情况,我们将其称为掌握边缘,对应的我们可以给出内掌握边缘。

根据以上叙述,我们可以发现知识空间理论的一个局限性,那就是学生学的应该是解决问题所必需的技能和知识,而不是问题本身。因此,Falmagne等[8-14]提出了基于能力的知识空间理论,并在文献[14]中进行详尽阐述,该理论将技能引入知识空间理论。类似的,该理论通过能力状态的内边缘提出学生现在要巩固的技能,不过由于技能不能被直接观察到,所以确定一项技能是否被成功巩固的唯一方法就是观察知识状态的变化。然而,在实际生活中拥有不同能力的学生可能表现为相同的知识状态。所以,有时即使实际巩固失败(遗忘)了一项技能,知识状态也不会产生任何改变。所以在基于能力的知识空间理论中,我们更关注的是能力状态的有效(内)边缘,即所有能使知识状态产生变化的技能构成的集合。而知识状态的变化离不开知识状态的边缘,并且在很多时候,掌握一项技能,可能同时会解决多个问题,因此不管是否引入技能,获取知识状态的内掌握边缘都是一项重要的工作。但是文献[22]仅给出了掌握边缘的定义,并没有进一步的研究,也没有给出内掌握边缘的定义,更没有与能力结合,特别是没给出获取内掌握边缘的算法。所以本文旨在基于能力的知识空间理论中

针对析取、合取和能力模型分别提出一种获取内掌握边缘的算法。相比根据定义获取,该算法耗时更短、占用内存更小。

本文的组织结构如下:第1节概述了知识空间理论、基于能力的知识空间理论中的一些基本概念。第2节分别在析取、合取和能力模型中给出了两个刻画定理(一是用技能函数刻画能力状态的顶或底;二是用问题函数刻画知识状态的内掌握边缘)和对应的巩固学习推荐方案。第3节分别在析取、合取和能力模型中给出了根据定义和刻画定理获取内掌握边缘的两种算法并通过实践对比算法的耗时长短和占用内存大小。第4节总结全文。

1 基础知识

在1985年,数学心理学家Falmagne和Doignon率先提出了知识空间理论,这一理论为教育评估及巩固学习推荐提供了一个科学且有效的理论框架。本节将结合文献[7,10,14,19,23]介绍知识空间理论的基本概念。

知识状态与知识结构是知识空间理论的核心概念:一个知识结构是一个二元组$(Q,\mathcal{K})$,其中Q是非空有限集合,$\mathcal{K}$是Q的一个子集族,至少包含Q和空集$\varnothing$。集合Q称为知识结构的问题域。它的元素称为问题或者项目。族$\mathcal{K}$里的子集K称为知识状态。当我们称$\mathcal{K}$是集合Q上的知识结构时,就是指$(Q,\mathcal{K})$是一个知识结构。域的具体内容可以在不发生歧义的前提下省略,因为我们有$\bigcup\mathcal{K}=Q$。本文中符号$\bigcup\mathcal{K}$表示集族的并,即$\bigcup\mathcal{K}=\bigcup_{K\in\mathcal{K}}K$。此外,对并运算封闭的知识结构称为知识空间;对交运算封闭的知识结构称为简单闭包空间。

随着知识空间理论的发展,许多研究者意识到学生学的应该是解决问题所必需的技能和知识,而不是问题本身。为此,Falmagne等提出了基于能力的知识空间理论,该理论将技能引入知识空间理论,并区分出两个平行且相互依赖的水平:表现水平和能力水平。知识结构$(Q,\mathcal{K})$位于表现水平。在能力水平上,一个能力结构是一个二元组$(S,\mathcal{C})$,其中S是与Q相对应的(与解决Q中的问题相关的)非空有限技能集,$\mathcal{C}$是S的一个子集族,至少包含S和空集$\varnothing$。集合S的元素称为技能。族$\mathcal{C}$里的子集称为能力状态。这两个层次由两个映射连接起来,分别称为技能函数(技能映射、技能多映射)和问题函数。为了简化问题,若无特别说明,后文所讨论的所有能力结构$\mathcal{C}$都是2^S。

一个技能多映射是一个三元组(Q,S,μ),其中Q是一个非空有限问题域,S是与Q相对应的非空有限技能集,μ是从Q到$\left(2^{2^S\setminus\{\varnothing\}}\right)\setminus\{\varnothing\}$的映射。对于$Q$中的任意一个$q$,任意一个属于$\mu(q)$的集合$C$都将被称作解决问题$q$的能力。此外,如果每个$\mu(q)$中的能力是成对不可比的(关于集合包含),则称$(Q,S,\mu)$为技能函数。当集合$Q$和$S$由具体的内容定义时,我们有时直接把$\mu$本身称作一个技能多映射或技能函数。每个技能多映射$(Q,S,\mu)$可以诱导一个映射$p$: $2^S\to 2^Q$,对任意技能子集$T\subseteq S$, $p(T)=\{q\in Q|\exists C\in\mu(q), C\subseteq T\}$。我们称$(Q,S,p)$为由技能多映射$\mu$诱导的问题函数。当集合$Q$和$S$由具体的内容定义时,我们有时直接把$p$本身称作一个问题函数。对任意技能子集$T\subseteq S$,称$K=p(T)$为能力状态$T$在能力模型下生成的知识状态。称$\mathcal{K}=\{p(T)|T\subseteq S\}$为技能多映射$\mu$在能力模型下生成的知识结构。

例子1 给定技能多映射(Q,S,μ),其中$Q=\{a,b,c,d\}$, $S=\{s,t,u\}$, μ的定义如下:

$$\mu(a)=\{\{s,t\},\{s,u\}\},\mu(b)=\{\{u\},\{s,u\}\},$$
$$\mu(c)=\{\{s\},\{t\},\{s,u\}\},\mu(d)=\{\{t\}\}。$$

技能多映射μ在能力模型下生成的知识结构

$$\mathcal{K}=\{\varnothing,\{b\},\{c\},\{c,d\},\{a,b,c\},\{a,c,d\},\{b,c,d\},Q\},$$

注意到$\mathcal{K}$既不满足并封闭也不满足交封闭。

对于问题函数,明显有以下结论成立:

定理1[14] 由任意技能函数(Q,S,μ)诱导的问题函数p在集合包含方面是单调的(即对$\forall T_1,T_2\subseteq S$,如果$T_1\subseteq T_2$,则$p(T_1)\subseteq p(T_2)$),并且满足$p(\varnothing)=\varnothing$且$p(S)=Q$。

Heller等[14]研究了两种特殊的技能函数,即析取技能函数和合取技能函数。设(Q,S,μ)是一个技能函数。如果对$\forall q\in Q$,存在

$C \subseteq S, C \neq \varnothing$,使得$\mu(q)=\{\{s\} | s \in C\}$成立,则称技能函数$(Q,S,\mu)$是一个析取技能函数,称由析取技能函数$\mu$诱导的问题函数$(Q,S,p_d)$是一个析取问题函数。如果对$\forall q \in Q$,存在$C \subseteq S, C \neq \varnothing$,使得$\mu(q)=\{C\}$成立,则称技能函数$(Q,S,\mu)$是一个合取技能函数,称由合取技能函数$\mu$诱导的问题函数$(Q,S,p_c)$是一个合取问题函数。

析取和合取技能函数的表示可以通过引入技能映射的符号进行简化[14,19]。一个技能映射是一个三元组(Q,S,τ),其中Q是一个非空有限问题域,S是与Q相对应的非空有限技能集,τ是从Q到$2^S \backslash \{\varnothing\}$的映射。对于$Q$中的任意一个$q$,$S$的子集$\tau(q)$将被称作赋予$q$的技能集合(根据技能映射$\tau$)。当集合$Q$和$S$由具体的内容定义时,我们有时直接把$\tau$本身称作一个技能映射。那么,析取技能函数$(Q,S,\mu)$可以用技能映射$(Q,S,\tau)$等价表示,其中对$\forall q \in Q$,满足$\mu(q)=\{\{s\} | s \in \tau(q)\}$;合取技能函数$(Q,S,\mu)$可以用技能映射$(Q,S,\tau)$等价表示,其中对$\forall q \in Q$,满足$\mu(q)=\{\tau(q)\}$。进而得到析取和合取问题函数的等价表示。对任意技能子集$T \subseteq S$,由析取技能函数(Q,S,τ)诱导的析取问题函数$p_d(T)=\{q \in Q | \tau(q) \cap T \neq \varnothing\}$;由合取技能函数$(Q,S,\tau)$诱导的合取问题函数$p_c(T)=\{q \in Q | \tau(q) \subseteq T\}$。对任意技能子集$T \subseteq S$,称$K=p_d(T)$为能力状态$T$在析取模型下生成的知识状态,称$\mathcal{K}=\{p_d(T) | T \subseteq S\}$为技能映射$\tau$在析取模型下生成的知识空间;称$K=p_c(T)$为能力状态$T$在合取模型下生成的知识状态,称$\mathcal{K}=\{p_c(T) | T \subseteq S\}$为技能映射$\tau$在合取模型下生成的简单闭包空间。

例子2 给定技能映射(Q,S,τ),其中$Q=\{a,b,c,d,e\}$,$S=\{s,t,u,v\}$,τ的定义如下:

$$\tau(a)=\{t,u\},\tau(b)=\{s,u,v\},\tau(c)=\{t\},$$
$$\tau(d)=\{t,u\},\tau(e)=\{u\}。$$

设$T=\{s,u,v\}$,则T在析取模型下生成的知识状态为$\{a,b,d,e\}$,合取模型下生成的知识状态为$\{b,e\}$。技能映射τ在析取模型下生成的知识空间

$$\mathcal{K}=\{\varnothing, \{b\}, \{a,c,d\}, \{a,b,c,d\}, \{a,b,d,e\}, Q\}。$$

技能映射τ在合取模型下生成的简单闭包空间

$$\mathcal{K}=\{\varnothing, \{c\}, \{e\}, \{b,e\}, \{a,c,d,e\}, Q\}。$$

对于析取和合取问题函数,明显有以下结论成立:

定理2[14] 设(Q,S,p_d)是一个析取问题函数,(Q,S,p_c)是一个合取问题函数,对$\forall T_1, T_2 \subseteq S$,

(1)如果$T_1 \subseteq T_2$,则$p_d(T_1) \subseteq p_d(T_2)$和$p_c(T_1) \subseteq p_c(T_2)$。

(2)$p_d(T_1 \cup T_2)=p_d(T_1) \cup p_d(T_2)$,

$$p_c(T_1 \cap T_2)=p_c(T_1) \cap p_c(T_2)。$$

在知识结构$(Q,\mathcal{K})$中,$\mathcal{K}_q$是$\mathcal{K}$中所有包含元素q的知识状态构成的集族,即$\mathcal{K}_q=\{K \in \mathcal{K} | q \in K\}$。$q^*$是$Q$中所有与元素$q$总是一起出现在相同状态中的元素构成的集合,即$q^*=\{r \in Q | \mathcal{K}_q=\mathcal{K}_r\}$,并称为知识结构的一个概念。如果知识结构中的所有概念都只包含一个元素,那么该知识结构称为可辨识的。在可辨识的知识结构$(Q,\mathcal{K})$中,状态$K(\in \mathcal{K})$的内边缘是问题集合$K^{\mathcal{I}}=\{q \in K | K \backslash \{q\} \in \mathcal{K}\}$。从教育学的观点来讲,$K$的内边缘表示知识状态为$K$的学生状态的高点。这是学生最近才掌握的问题集合,这种掌握可能是不牢固的,需要复习巩固。但是对于给定的可辨识知识结构$(Q,\mathcal{K})$,其中$Q=\{a,b,c,d\}$,$\mathcal{K}=\{\varnothing, \{c\}, \{d\}, \{b,d\}, \{a,c,d\}, Q\}$,注意到$\{a,c,d\}^{\mathcal{I}}=\varnothing$,所以知识状态的内边缘可能是空的,这意味着处于该知识状态的学生没有办法通过只复习一个问题来巩固知识状态。因此,为了更有效地指导学生复习巩固,我们类比Noventa等在文献[22]中提出的(外)掌握边缘,将$K^{\mathcal{I}}$推广到$K^{\mathcal{IM}}$,定义如下。

定义1[22] 在知识结构$(Q,\mathcal{K})$中,状态$K(\in \mathcal{K})$的内掌握边缘是问题集族

$$K^{\mathcal{IM}}=\{B \subseteq K | K \backslash B \in \mathcal{K}, B\text{非空极小}\},$$

其中极小性表示对任意$B \in K^{\mathcal{IM}}$,都不存在非空集$B' \subset B$,满足$K \backslash B' \in \mathcal{K}$。

2 主要结果

一般地,在基于能力的知识空间理论中,我

们会通过询问专家等方式获得目标领域的问题集和解决这些问题所需的技能集,以及问题和技能间的对应关系,即技能函数(技能映射、技能多映射)。由此诱导出对应的问题函数和知识结构,再利用知识结构进行测试得到学生的知识状态,最后根据知识状态、技能函数和问题函数进行巩固学习推荐。这最后一步就是本节的研究重点。

在基于能力的知识空间理论中进行巩固学习推荐,本质上就是提出学生现在要巩固的技能,不过由于技能不能被直接观察到,所以确定一项技能是否被成功巩固的唯一方法就是观察知识状态的变化。而知识状态的变化离不开知识状态的边缘,并且在很多时候,掌握一项技能,可能同时会解决多个问题,因此不管是否引入技能,获取知识状态的内掌握边缘都是一项重要的工作。

直观地,我们可以利用问题函数得到知识结构,再进一步通过定义得到内掌握边缘。然而,这样做有些繁琐:需要先利用问题函数构建中间产物——知识结构,并且我们知道知识结构的构建比较耗时,构建成功的知识结构又比较占内存。所以我们想能否利用问题函数直接得到内掌握边缘。

2.1 合取模型下的巩固学习推荐

定义 2[19] 设 (Q,S,p) 是一个问题函数,对 $T\subseteq S$,称

$$[T]=\{T'\subseteq S|p(T)=p(T')\}$$

为能力状态 T 的等价类。设 p 是一个合取问题函数,称

$$\lfloor T\rfloor=\bigcap[T]$$

为等价类 $[T]$ 的底或能力状态 T 的底。

定理 3 设 (Q,S,p_c) 是一个合取问题函数,有以下结论成立:

(1) $\lfloor T\rfloor\in[T]$,即 $p_c(\lfloor T\rfloor)=p_c(T)$。

(2) $\forall T'\in[T],\lfloor T\rfloor\subseteq T'$。

证明 (1)因为 p_c 是合取问题函数,所以函数 p_c 保持交封闭,所以对 $\forall T_1,T_2\in[T]$,有 $p_c(T_1\cap T_2)=p_c(T_1)\cap p_c(T_2)=p_c(T)\cap p_c(T)=p_c(T)$ 成立,所以 $T_1\cap T_2\in[T]$,所以由数学归纳法可得 $\lfloor T\rfloor=\bigcap[T]\in[T]$,即问题函数合取时能力状态的等价类保持交封闭。

(2)由定义易知。

定理 4 设 (Q,S,τ) 是一个技能映射,p_c 是由技能映射 τ 诱导的合取问题函数,$\mathcal{K}=\{p_c(T)|T\subseteq S\}$ 是技能映射 τ 在合取模型下生成的知识结构,那么对于任意知识状态 $K\in\mathcal{K}$,都存在 $T\subseteq S$,使得 $K=p_c(T)$。此时,知识状态 K 的内掌握边缘可以刻画为:

$$K^{\mathcal{IM}}=\{B|B=p_c(T)\backslash p_c(T\backslash T_0),\ T_0\subseteq T,B\text{非空极小}\},$$

其中极小性表示对任意 $B\in K^{\mathcal{IM}}$,都不存在非空集 $B'\subset B$,满足 $B'=p_c(T)\backslash p_c(T\backslash T_0)$,$T_0\subseteq T$。

证明 (1)先证 $\{B\subseteq K|K\backslash B\in\mathcal{K}\}=\{B|B=p_c(T)\backslash p_c(T\backslash T_0),T_0\subseteq T\}$。记 $X=\{B\subseteq K|K\backslash B\in\mathcal{K}\}$,$Y=\{B|B=p_c(T)\backslash p_c(T\backslash T_0),T_0\subseteq T\}$。

对 $\forall B\in X$,有 $K\backslash B\in\mathcal{K}$,$B\subseteq K$。记 $K_1=K\backslash B$,那么存在 $T_1\subseteq S$,使得 $K_1=p_c(T_1)$,并且有 $K_1\subseteq K$ 成立,需要注意此时 $T_1\subseteq T$ 未必成立。又因为 $B\subseteq K$,所以 $B=K\backslash K_1$。又因为 $K_1\subseteq K$,所以由定理 2 可得 $K_1=K\cap K_1=p_c(T)\cap p_c(T_1)=p_c(T\cap T_1)$,所以存在 $T_0=T\backslash T_1\subseteq T$,有 $T\backslash T_0=T\backslash(T\backslash T_1)=T\cap T_1$,$p_c(T\backslash T_0)=p_c(T\cap T_1)=K_1$,使得 $B=K\backslash K_1=p_c(T)\backslash p_c(T\backslash T_0)$,所以 $B\in Y$,所以 $X\subseteq Y$。

另一方面,对 $\forall B\in Y$,存在 $T_0\subseteq T$,使得 $B=p_c(T)\backslash p_c(T\backslash T_0)$,其中 $p_c(T)=K$,$p_c(T\backslash T_0)\in\mathcal{K}$,令 $K_1=p_c(T\backslash T_0)$,则 $B=K\backslash K_1\subseteq K$。又因为 $T\backslash T_0\subseteq T$,所以由定理 2 可得 $K_1=p_c(T\backslash T_0)\subseteq p_c(T)=K$,所以 $K\backslash B=K\backslash(K\backslash K_1)=K\cap K_1=K_1\in\mathcal{K}$,所以 $B\in X$,所以 $Y\subseteq X$。

综上:$X=Y$。

(2)对(1)中结果等式两边同时要求 B 非空极小,再由定义 1 即可证明。

推论 1 设 (Q,S,τ) 是一个技能映射,p_c 是由技能映射 τ 诱导的合取问题函数,$\mathcal{K}=\{p_c(T)|T\subseteq S\}$ 是技能映射 τ 在合取模型下生成的知识结构,那么对于任意知识状态 $K\in\mathcal{K}$,都存在 $T\subseteq S$,使得 $K=p_c(T)$。此时,知识状态 K 的内掌握边缘可以刻画为:

$$K^{\mathcal{IM}}=\{B|B=p_c(\lfloor T\rfloor)\backslash p_c(\lfloor T\rfloor\backslash T_0),\ T_0\subseteq\lfloor T\rfloor,B\text{非空极小}\},$$

其中极小性表示对任意$B\in K^{\mathcal{IM}}$,都不存在非空集$B'\subset B$,满足$B'=p_c(\lfloor T\rfloor)\backslash p_c(\lfloor T\rfloor\backslash T_0)$,$T_0\subseteq\lfloor T\rfloor$。

证明 因为$p_c(\lfloor T\rfloor)=p_c(T)=K$,所以定理4中的能力状态$T$可以直接取其底$\lfloor T\rfloor$。

然而,仅根据定理4、推论1的刻画求解内掌握边缘并不是一件容易的事情,因为使用定理4需要先知道一个表现为K的能力状态T,使用推论1需要先知道所有表现为K能力状态$[T]$的底$\lfloor T\rfloor$。而根据定义我们很难通过技能映射直接获得表现为K的能力状态,只能在根据问题函数建立知识结构($\mathcal{K}=\{p_c(T)|T\subseteq S\}$)的过程中记录下有哪些能力状态表现为$K$,这明显是低效的。为了简化这个过程,下面给出通过技能映射直接获得所有表现为K能力状态$[T]$的底$\lfloor T\rfloor$的方法。

引理1 设(Q,S,p_c)是一个合取问题函数,对$\forall T,T_1\subseteq S$,有$p_c(\lfloor T\rfloor)\subseteq p_c(T_1)\Leftrightarrow\lfloor T\rfloor\subseteq T_1$成立。

证明 充分性由定理2可证。下证必要性,因为$p_c(\lfloor T\rfloor)\subseteq p_c(T_1)$,所以$p_c(\lfloor T\rfloor\cap T_1)=p_c(\lfloor T\rfloor)\cap p_c(T_1)=p_c(\lfloor T\rfloor)=p_c(T)$,所以$\lfloor T\rfloor\cap T_1\in[T]$,所以$\lfloor T\rfloor\subseteq\lfloor T\rfloor\cap T_1$,所以$\lfloor T\rfloor\subseteq T_1$。

定理5 设(Q,S,τ)是一个技能映射,p_c是由技能映射τ诱导的合取问题函数,$\mathcal{K}=\{p_c(T)|T\subseteq S\}$是技能映射$\tau$在合取模型下生成的知识结构,那么对于任意知识状态$K\in\mathcal{K}$,都存在$T\subseteq S$,使得$K=p_c(T)$。此时,能力状态$T$的底可以刻画为:$\lfloor T\rfloor=\bigcup_{q\in K}\tau(q)$。

证明 一方面,因为$p_c(\lfloor T\rfloor)=\{q\in Q|\tau(q)\subseteq\lfloor T\rfloor\}=K$,所以对$\forall q\in K,\tau(q)\subseteq\lfloor T\rfloor$,所以$\bigcup_{q\in K}\tau(q)\subseteq\lfloor T\rfloor$。另一方面,对$\forall q'\in K$,$\tau(q')\subseteq\bigcup_{q\in K}\tau(q)$,所以$q'\in p_c\left(\bigcup_{q\in K}\tau(q)\right)$,所以$p_c(\lfloor T\rfloor)=K\subseteq p_c\left(\bigcup_{q\in K}\tau(q)\right)$,所以由引理1可得$\lfloor T\rfloor\subseteq\bigcup_{q\in K}\tau(q)$。

综上:$\lfloor T\rfloor=\bigcup_{q\in K}\tau(q)$。

例子3(续例子2) 根据推论1,定理5求解知识状态$K=\{b,e\}$的内掌握边缘$K^{\mathcal{IM}}$:

(1)求解$\lfloor T\rfloor$,(其中$T\subseteq S$,$K=p_c(T)$):$\lfloor T\rfloor=\bigcup_{q\in K}\tau(q)=\bigcup_{q\in\{b,e\}}\tau(q)=\{s,u,v\}$。

(2)获取T_0的取值范围:$T_0\subseteq\lfloor T\rfloor=\{s,u,v\}$,所以

$$T_0\in\{\varnothing,\{s\},\{u\},\{v\},\{s,u\},\{u,v\},\{s,v\},\{s,u,v\}\}。$$

(3)遍历T_0,求解$B=p_c(\lfloor T\rfloor)\backslash p_c(\lfloor T\rfloor\backslash T_0)$:当$T_0\in\{\varnothing\}$时$B=\varnothing$,当$T_0\in\{\{s\},\{v\},\{s,v\}\}$时$B=\{b\}$,当$T_0\in\{\{u\},\{s,u\},\{u,v\},\{s,u,v\}\}$时$B=\{b,e\}$。

(4)要求B非空极小,得$K^{\mathcal{IM}}=\{\{b\}\}$。

至此,我们已经可以在合取模型中用技能函数刻画能力状态的底,用问题函数刻画知识状态的内掌握边缘。当然在基于能力的知识空间理论中,只获取知识状态的内掌握边缘是不够的,还需要推荐对应的技能集进行学习巩固,如定理6所示。

定理6 设(Q,S,τ)是一个技能映射,p_c是由技能映射τ诱导的合取问题函数,$\mathcal{K}=\{p_c(T)|T\subseteq S\}$是技能映射$\tau$在合取模型下生成的知识结构,那么对于任意知识状态$K\in\mathcal{K}$,都存在$T\subseteq S$,使得$K=p_c(T)$。此时,知识状态$K$的内掌握边缘为$K^{\mathcal{IM}}$,那么对于任意问题集$B\in K^{\mathcal{IM}}$,存在$T_B\subseteq S$,使得$K\backslash B=p_c(T_B)$。而处于知识状态$K$的学生,要想巩固知识状态$K$,只需要巩固学习技能集$T_0$即可,其中$T_0\in\mathcal{T}=\left\{\bigcup_{B\in K^{\mathcal{IM}}}\lfloor T\rfloor\backslash\lfloor T_B\rfloor\right\}$。

证明 对于任意$B\in K^{\mathcal{IM}}$,$K\backslash B\in\mathcal{K}$,那么存在$T_B\subseteq S$,使得$K\backslash B=p_c(T_B)$。又因为$B\neq\varnothing$,所以$p_c(\lfloor T_B\rfloor)=K\backslash B\subset K=p_c(\lfloor T\rfloor)$,所以由引理1可得$\lfloor T_B\rfloor\subseteq\lfloor T\rfloor$。假设$\lfloor T_B\rfloor=\lfloor T\rfloor$,那么$p_c(\lfloor T_B\rfloor)=p_c(\lfloor T\rfloor)$即$K\backslash B=K$,矛盾,所以$\lfloor T_B\rfloor\subset\lfloor T\rfloor$,所以$\lfloor T\rfloor\backslash\lfloor T_B\rfloor\neq\varnothing$,$\mathcal{T}\neq\varnothing$。

处于知识状态K的学生如果发生退步,知识状态最可能退步至$K\backslash B$,其中$B\in K^{\mathcal{IM}}$。对任意$B\in K^{\mathcal{IM}}$,存在$T_B\subseteq S$,使得$K\backslash B=p_c(T_B)$。对于任意$T_B'\in[T_B]$,任意$T_0\in\mathcal{T}$,有$T_0=\bigcup_{B\in K^{\mathcal{IM}}}\lfloor T\rfloor\backslash\lfloor T_B\rfloor\neq\varnothing$,又因为$\lfloor T_B\rfloor\subseteq\lfloor T\rfloor$,所以$\lfloor T_B\rfloor\cup T_0\supseteq\lfloor T_B\rfloor\cup(\lfloor T\rfloor\backslash\lfloor T_B\rfloor)=\lfloor T_B\rfloor\cup\lfloor T\rfloor=\lfloor T\rfloor$,又因为$T_B'\in[T_B]$,所以$T_B'\supseteq\lfloor T_B\rfloor$,所以$T_B'\cup T_0\supseteq\lfloor T\rfloor$,所以由定理2可得$p_c(T_B'\cup T_0)\supseteq p_c(\lfloor T\rfloor)=K$。

注1 内掌握边缘$K^{\mathcal{IM}}$中的所有问题集B都有可

能遗忘，都需要巩固。

注 2　对于学生是否巩固了知识状态 K，可以使用问题集 $\cup K^{\mathcal{IM}}$ 进行检验。

例子 4（续例子 3）　根据定理 6 给出巩固知识状态 K 的方案，其中 $K=\{b,e\}$，$B\in K^{\mathcal{IM}}=\{\{b\}\}$：

（1）遍历 B，求解 $\lfloor T_B\rfloor$，（其中 $T_B\subseteq S$，$K\backslash B=p_c(T_B)$）：当 $B=\{b\}$ 时 $\lfloor T_B\rfloor=\bigcup_{q\in\{e\}}\tau(q)=\{u\}$。

（2）求解 $\mathcal{T}$：因为 $\lfloor T\rfloor=\{s,u,v\}$，所以当 $B=\{b\}$ 时 $\lfloor T\rfloor\backslash\lfloor T_B\rfloor=\{s,v\}$，所以 $\mathcal{T}=\left\{\bigcup_{B\in K^{\mathcal{IM}}}\lfloor T\rfloor\backslash\lfloor T_B\rfloor\right\}=\{\{s,v\}\}$。

（3）给出推荐方案 $T_0(\in\mathcal{T})$：推荐学生巩固学习技能集 $\{s,v\}$。

这就是合取模型中基于能力的个性化巩固学习推荐过程，在这个过程中，我们不需要知道学生的具体能力状态，也不需要建立整个知识结构。

2.2　析取模型下的巩固学习推荐

定义 3[19]　设 (Q,S,p) 是一个问题函数，对 $T\subseteq S$，称

$$[T]=\left\{T'\subseteq S|p(T)=p(T')\right\}$$

为能力状态 T 的等价类。设 p 是一个析取问题函数，称

$$\lceil T\rceil=\cup[T]$$

为等价类 $[T]$ 的顶或能力状态 T 的顶。

定理 7　设 (Q,S,p_d) 是一个析取问题函数，有以下结论成立：

（1）$\lceil T\rceil\in[T]$，即 $p_d(\lceil T\rceil)=p_d(T)$。

（2）$\forall T'\in[T]$，$T'\subseteq\lceil T\rceil$。

证明　（1）因为 p_d 是析取问题函数，所以函数 p_d 保持并封闭，所以对 $\forall T_1,T_2\in[T]$，有

$$p_d(T_1\cup T_2)=p_d(T_1)\cup p_d(T_2)=$$
$$p_d(T)\cup p_d(T)=p_d(T)$$

成立，所以 $T_1\cup T_2\in[T]$，所以由数学归纳法可得 $\lceil T\rceil=\cup[T]\in[T]$，即问题函数析取时能力状态的等价类保持并封闭。

（2）由定义易知。

引理 2　设 (Q,S,p_d) 是一个析取问题函数，对 $\forall T,T_1\subseteq S$，有 $p_d(T_1)\subseteq p_d(\lceil T\rceil)\Leftrightarrow T_1\subseteq\lceil T\rceil$ 成立。

证明　充分性由定理 2 可证。下证必要性，因为 $p_d(T_1)\subseteq p_d(\lceil T\rceil)$，所以

$p_d(T_1\cup\lceil T\rceil)=p_d(T_1)\cup p_d(\lceil T\rceil)=p_d(\lceil T\rceil)=p_d(T)$，所以 $T_1\cup\lceil T\rceil\in[T]$，所以 $T_1\cup\lceil T\rceil\subseteq\lceil T\rceil$，$T_1\subseteq\lceil T\rceil$。

定理 8　设 (Q,S,τ) 是一个技能映射，p_d 是由技能映射 τ 诱导的析取问题函数，$\mathcal{K}=\{p_d(T)|T\subseteq S\}$ 是技能映射 τ 在析取模型下生成的知识结构，那么对于任意知识状态 $K\in\mathcal{K}$，都存在 $T\subseteq S$，使得 $K=p_d(T)$。此时，知识状态 K 的内掌握边缘可以刻画为：

$$K^{\mathcal{IM}}=\{B|B=$$
$$p_d(\lceil T\rceil)\backslash p_d(\lceil T\rceil\backslash T_0),T_0\subseteq\lceil T\rceil,B\text{非空极小}\},$$

其中极小性表示对任意 $B\in K^{\mathcal{IM}}$，都不存在非空集 $B'\subset B$，满足 $B'=p_d(\lceil T\rceil)\backslash p_d(\lceil T\rceil\backslash T_0)$，$T_0\subseteq\lceil T\rceil$。

证明　（1）先证 $\{B\subseteq K|K\backslash B\in\mathcal{K}\}=\{B|B=p_d(\lceil T\rceil)\backslash p_d(\lceil T\rceil\backslash T_0),T_0\subseteq\lceil T\rceil\}$。记

$$X=\{B\subseteq K|K\backslash B\in\mathcal{K}\},Y=\{B|B=p_d(\lceil T\rceil)\backslash$$
$$p_d(\lceil T\rceil\backslash T_0),T_0\subseteq\lceil T\rceil\}。$$

对 $\forall B\in X$，有 $K\backslash B\in\mathcal{K}$，$B\subseteq K$。记 $K_1=K\backslash B$，那么存在 $T_1\subseteq S$，使得 $K_1=p_d(T_1)$，并且有 $K_1\subseteq K$ 成立，即 $p_d(T_1)\subseteq p_d(\lceil T\rceil)$，所以由引理 2 可得 $T_1\subseteq\lceil T\rceil$。又因为 $B\subseteq K$，所以 $B=K\backslash K_1$。又因为 $T_1\subseteq\lceil T\rceil$，所以存在 $T_0=\lceil T\rceil\backslash T_1\subseteq\lceil T\rceil$，有 $T_1=\lceil T\rceil\backslash T_0$，$K_1=p_d(T_1)=p_d(\lceil T\rceil\backslash T_0)$，使得 $B=K\backslash K_1=p_d(\lceil T\rceil)\backslash p_d(\lceil T\rceil\backslash T_0)$，所以 $B\in Y$，所以 $X\subseteq Y$。

另一方面，对 $\forall B\in Y$，存在 $T_0\subseteq\lceil T\rceil$，使得 $B=p_d(\lceil T\rceil)\backslash p_d(\lceil T\rceil\backslash T_0)$，其中 $p_d(\lceil T\rceil)=K$，$p_d(\lceil T\rceil\backslash T_0)\in\mathcal{K}$，令 $K_1=p_d(\lceil T\rceil\backslash T_0)$，则 $B=K\backslash K_1\subseteq K$。又因为 $\lceil T\rceil\backslash T_0\subseteq\lceil T\rceil$，所以由定理 2 可得 $K_1=p_d(\lceil T\rceil\backslash T_0)\subseteq p_d(\lceil T\rceil)=K$，所以 $K\backslash B=K\backslash(K\backslash K_1)=K\cap K_1=K_1\in\mathcal{K}$，所以 $B\in X$，所以 $Y\subseteq X$。

综上：$X=Y$。

（2）对（1）中结果等式两边同时要求 B 非空极小，再由定义 1 即可证明。

注 3　如果将以上定理中的 $\lceil T\rceil$ 替换为能使 $K=p_d(T)$ 成立的任意集合 T，结论未必成立，如下例子所示。

例子 5（续例子 2）　对于知识状态 $K=$

$\{a,b,d,e\}$,取 $T=\{u\}$,显然 $p_d(T)=K$,由定义1可知 $B=\{a,d,e\}\in K^{\mathcal{IM}}$,且 $K\backslash B=\{b\}\in\mathcal{K}$,但是对于 $\forall T_0\subseteq T=\{u\}$,$p_d(T)\backslash p_d(T\backslash T_0)\neq B$。

同样地,下面给出通过技能映射直接获得所有表现为 K 能力状态 $[T]$ 的顶 $\lceil T\rceil$ 的方法。

定理9 设 (Q,S,τ) 是一个技能映射,p_d 是由技能映射 τ 诱导的析取问题函数,$\mathcal{K}=\{p_d(T)|T\subseteq S\}$ 是通过析取模型被映射 τ 描绘的知识结构,那么对于任意知识状态 $K\in\mathcal{K}$,都存在 $T\subseteq S$,使得 $K=p_d(T)$。此时,能力状态 T 的顶可以刻画为:$\lceil T\rceil=S\backslash\bigcup_{q\in Q\backslash K}\tau(q)$。

证明 一方面,因为 $p_d(\lceil T\rceil)=\{q\in Q|\tau(q)\cap\lceil T\rceil\neq\emptyset\}=K$,所以对 $\forall q\notin K,q\in Q\backslash K,\tau(q)\cap\lceil T\rceil=\emptyset$,因此 $\bigcup_{q\in Q\backslash K}\tau(q)\cap\lceil T\rceil=\emptyset$,进一步得 $S\backslash\bigcup_{q\in Q\backslash K}\tau(q)\supseteq\lceil T\rceil$。另一方面,对 $\forall q'\notin K,q'\in Q\backslash K$,$\tau(q')\subseteq\bigcup_{q\in Q\backslash K}\tau(q)$,因此 $\tau(q')\cap\left(S\backslash\bigcup_{q\in Q\backslash K}\tau(q)\right)=\emptyset$,由此得 $q'\notin p_d\left(S\backslash\bigcup_{q\in Q\backslash K}\tau(q)\right)$,所以 $p_d\left(S\backslash\bigcup_{q\in Q\backslash K}\tau(q)\right)\subseteq K=p_d(\lceil T\rceil)$,再由引理2可得 $S\backslash\bigcup_{q\in Q\backslash K}\tau(q)\subseteq\lceil T\rceil$。

综上:$\lceil T\rceil=S\backslash\bigcup_{q\in Q\backslash K}\tau(q)$。

例子6(续例子2) 根据定理8,定理9求解知识状态 $K=\{a,b,c,d\}$ 的内掌握边缘 $K^{\mathcal{IM}}$:

(1)求解 $\lceil T\rceil$,(其中 $T\subseteq S,K=p_d(T)$):

$$\lceil T\rceil=S\backslash\bigcup_{q\in Q\backslash K}\tau(q)=S\backslash\bigcup_{q\in\{e\}}\tau(q)=S\backslash\{u\}=\{s,t,v\}。$$

(2)获取 T_0 的取值范围:

$$T_0\subseteq\lceil T\rceil=\{s,t,v\},$$

所以

$$T_0\in\{\emptyset,\{s\},\{t\},\{v\},\{s,t\},\{t,v\},\{s,v\},\{s,t,v\}\}。$$

(3)遍历 T_0,求解 $B=p_d(\lceil T\rceil)\backslash p_d(\lceil T\rceil\backslash T_0)$:当 $T_0\in\{\emptyset,\{s\},\{v\}\}$ 时 $B=\emptyset$,当 $T_0\in\{\{s,v\}\}$ 时 $B=\{b\}$,当 $T_0\in\{\{t\},\{s,t\},\{t,v\}\}$ 时 $B=\{a,c,d\}$,当 $T_0\in\{\{s,t,v\}\}$ 时 $B=\{a,b,c,d\}$。

(4)要求 B 非空极小,得 $K^{\mathcal{IM}}=\{\{b\},\{a,c,d\}\}$。

至此,我们已经可以在析取模型中用技能函数刻画能力状态的顶,用问题函数刻画知识状态的内掌握边缘。当然,在基于能力的知识空间理论中,只获取知识状态的内掌握边缘是不够的,还需要推荐对应的技能集进行学习巩固,如下定理所示。

定理10 设 (Q,S,τ) 是一个技能映射,p_d 是由技能映射 τ 诱导的析取问题函数,$\mathcal{K}=\{p_d(T)|T\subseteq S\}$ 是技能映射 τ 在析取模型下生成的知识结构,那么对于任意知识状态 $K\in\mathcal{K}$,都存在 $T\subseteq S$,使得 $K=p_d(T)$。此时,知识状态 K 的内掌握边缘为 $K^{\mathcal{IM}}$,那么对于任意问题集 $B\in K^{\mathcal{IM}}$,存在 $T_B\subseteq S$,使得 $K\backslash B=p_d(T_B)$。而处于知识状态 K 的学生,要想巩固知识状态 K,只需要巩固学习技能集 T_0 即可,其中 $T_0\in\mathcal{T}=\left\{T_0|T_0=\bigcup_{B\in K^{\mathcal{IM}}}\{s\},s\in\lceil T\rceil\backslash\lceil T_B\rceil\right\}$。

证明 对于任意 $B\in K^{\mathcal{IM}},K\backslash B\in\mathcal{K}$,那么存在 $T_B\subseteq S$,使得 $K\backslash B=p_d(T_B)$。又因为 $B\neq\emptyset$,所以 $p_d(\lceil T_B\rceil)=K\backslash B\subset K=p_d(\lceil T\rceil)$,所以由引理2可得 $\lceil T_B\rceil\subseteq\lceil T\rceil$。假设 $\lceil T_B\rceil=\lceil T\rceil$,那么 $p_d(\lceil T_B\rceil)=p_d(\lceil T\rceil)$ 即 $K\backslash B=K$,矛盾,所以 $\lceil T_B\rceil\subset\lceil T\rceil$,所以 $\lceil T\rceil\backslash\lceil T_B\rceil\neq\emptyset,\mathcal{T}\neq\emptyset$。

处于知识状态 K 的学生如果发生退步,知识状态最可能退步至 $K\backslash B$,其中 $B\in K^{\mathcal{IM}}$。对任意 $B\in K^{\mathcal{IM}}$,存在 $T_B\subseteq S$,使得 $K\backslash B=p_d(T_B)$。对于任意 $T_B{}'\in[T_B]$,任意 $T_0\in\mathcal{T}$,存在 $s\in\lceil T\rceil\backslash\lceil T_B\rceil\neq\emptyset$,使得 $T_0\supseteq\{s\}$,令 $T_{0B}=\{s\}\neq\emptyset$。所以 $T_{0B}\nsubseteq\lceil T_B\rceil$ 但 $T_{0B}\subseteq\lceil T\rceil$。又因为 $T_B{}'\in[T_B]$ 且 $T_B{}'\subseteq\lceil T_B\rceil\subseteq\lceil T\rceil$,所以 $T_B{}'\subset T_B{}'\cup T_{0B}\subseteq\lceil T\rceil$。由定理2可得

$$K\backslash B=p_d(T_B{}')\subseteq p_d(T_B{}'\cup T_{0B})\subseteq p_d(\lceil T\rceil)=K。$$

假设 $p_d(T_B{}'\cup T_{0B})=K\backslash B$,那么 $T_B{}'\cup T_{0B}\in[T_B]$,所以 $T_B{}'\cup T_{0B}\subseteq\lceil T_B\rceil$,与 $T_{0B}\nsubseteq\lceil T_B\rceil$ 矛盾,所以 $p_d(T_B{}'\cup T_{0B})\supset K\backslash B$,又因为 $p_d(T_B{}'\cup T_{0B})\subseteq K$,所以存在 $B'=K\backslash p_d(T_B{}'\cup T_{0B})\subseteq K$,并且有 $K\backslash B'=p_d(T_B{}'\cup T_{0B})\in\mathcal{K}$,所以 $K\backslash B'=p_d(T_B{}'\cup T_{0B})\supset K\backslash B$。又因为 $B',B\subseteq K$,所以 $B'\subset B$,假设 $B'\neq\emptyset$,与 B 的极小性矛盾,所以 $B'=\emptyset$,所以 $p_d(T_B{}'\cup T_0)\supseteq p_d(T_B{}'\cup T_{0B})=K$。

注4 内掌握边缘 $K^{\mathcal{IM}}$ 中的所有问题集 B 都有可能遗忘,都需要巩固。

注5 对于学生是否巩固了知识状态 K,可以使用

问题集$\bigcup K^{\mathcal{IM}}$进行检验。

例子7(续例子6) 根据定理10给出巩固知识状态K的方案,其中$K=\{a,b,c,d\}$,$B\in K^{\mathcal{IM}}=\{\{b\},\{a,c,d\}\}$:

(1)遍历B,求解$\lceil T_B\rceil$,(其中$T_B\subseteq S$,$K\backslash B=p_d(T_B)$):当$B=\{b\}$时

$$\lceil T_B\rceil=S\backslash\bigcup_{q\in\{b,e\}}\tau(q)=S\backslash\{s,u,v\}=\{t\},$$

当$B=\{a,c,d\}$时$\lceil T_B\rceil=S\backslash\bigcup_{q\in\{a,c,d,e\}}\tau(q)=S\backslash\{t,u\}=\{s,v\}$。

(2)求解$\mathcal{T}$:因为$\lceil T\rceil=\{s,t,v\}$,所以当$B=\{b\}$时$\lceil T\rceil\backslash\lceil T_B\rceil=\{s,v\}$,当$B=\{a,c,d\}$时$\lceil T\rceil\backslash\lceil T_B\rceil=\{t\}$,所以

$$\mathcal{T}=\{T_0|T_0=\bigcup_{B\in K^{\mathcal{IM}}}\{s\},s\in\lceil T\rceil\backslash\lceil T_B\rceil\}=\{\{s,t\},\{v,t\}\}。$$

(3)给出推荐方案$T_0(\in\mathcal{T})$:推荐学生巩固学习技能集$\{s,t\}$或$\{v,t\}$。

这就是析取模型中基于能力的个性化巩固学习推荐过程,在这个过程中,我们不需要知道学生的具体能力状态,也不需要建立整个知识结构。

2.3 能力模型下的巩固学习推荐

因为能力模型的问题函数p既不满足并封闭也不满足交封闭,所以能力模型的能力状态的等价类不像析取模型和合取模型那样存在唯一的顶或底,所以对于能力模型我们只能退而求其次,研究顶空间,定义如下。

定义4 设(Q,S,p)是一个问题函数,对$T\subseteq S$,$[T]$是能力状态T的等价类,称

$$\lceil T\rceil^*=\{T'|T'\in[T],T'极大\}$$

为能力状态T的顶空间。其中极大性表示对任意$T'\in\lceil T\rceil^*$,都不存在$T''\supset T'$,满足$T''\in[T]$。

定理11 设(Q,S,p)是一个问题函数,有以下结论成立:

(1)$\forall T'\in\lceil T\rceil^*$,$T'\in[T]$,即$p(T')=p(T)$。

(2)$\forall T'\in[T]$,$\exists T''\in\lceil T\rceil^*$,使得$T''\supseteq T'$。

(3)$\forall T'\in\lceil T\rceil^*$,不存在$T''\in[T]$,使得$T''\supset T'$。

类比引理2和定理9我们可以得到以下引理和定理:

引理3 设(Q,S,p)是一个问题函数,对$\forall T,T_1\subseteq S$,有$p(T_1)\subseteq p(T)\Leftrightarrow\exists T'\in\lceil T\rceil^{**}$,$s.t.T_1\subseteq T'$成立。其中$\lceil T\rceil^{**}=\{T'|T'\in 2^S\backslash\bigcup_{q\in Q\backslash K}\bigcup_{\tau(q)\in\mu(q)}\{T''\in 2^S|T''\supseteq\tau(q)\},T'极大\}$。

其中极大性表示对任意$T'\in\lceil T\rceil^{**}$,都不存在$T''\supset T'$,满足

$$T''\in 2^S\backslash\bigcup_{q\in Q\backslash K}\bigcup_{\tau(q)\in\mu(q)}\{T''\in 2^S|T''\supseteq\tau(q)\}。$$

证明 先证充分性,因为$T'\in\lceil T\rceil^{**}$,所以由问题函数p的定义得$p(T')\subseteq K=p(T)$。又因为$T_1\subseteq T'$,所以由定理1可得$p(T_1)\subseteq p(T')$。所以$p(T_1)\subseteq p(T)$。再证必要性,因为$p(T_1)\subseteq p(T)=K$,所以由问题函数p的定义得,对任意$q\in Q\backslash K$,任意$\tau(q)\in\mu(q)$,都有$\tau(q)\not\subseteq T_1$,所以$T_1\in 2^S\backslash\bigcup_{q\in Q\backslash K}\bigcup_{\tau(q)\in\mu(q)}\{T''\in 2^S|T''\supseteq\tau(q)\}$,所以存在$T'\in\lceil T\rceil^{**}$,使得$T_1\subseteq T'$成立。

注6 $\lceil T\rceil^{**}$未必等于$\lceil T\rceil^*$,并且如果将以上引理中的$\lceil T\rceil^{**}$替换为$\lceil T\rceil^*$结论未必成立,如例子8所示。

例子8 给定技能多映射(Q,S,μ),其中$Q=\{a,b,c\}$,$S=\{s,t,u\}$,μ的定义如下:

$$\mu(a)=\{\{t\}\},\mu(b)=\{\{s\},\{t,u\}\},\mu(c)=\{\{s,t\}\}。$$

通过能力模型被给定技能多映射描绘的知识结构$\mathcal{K}=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{a,b\},Q\}$,其中$\varnothing=p(\varnothing)=p(\{u\})$;$\{a\}=p(\{t\})$;$\{b\}=p(\{s\})=p(\{s,u\})$;$\{a,b\}=p(\{t,u\})$;$Q=p(\{s,t\})=p(S)$。

对于能力状态$T=\{t,u\}$,可得$p(T)=\{a,b\}$,$\lceil T\rceil^{**}=\{\{s,u\},\{t,u\}\}$,$\lceil T\rceil^*=\{\{t,u\}\}$,$\lceil T\rceil^{**}\neq\lceil T\rceil^*$。再取能力状态$T_1=\{s\}$,可得$p(T_1)=\{b\}\subseteq\{a,b\}=p(T)$,但是对于$\forall T'\in\lceil T\rceil^*$,$T_1\not\subseteq T'$。

同样的,我们可以使用技能函数刻画能力状态的顶空间。

定理12 设(Q,S,μ)是一个技能多映射,p是由技能多映射μ诱导的问题函数,$\mathcal{K}=\{p(T)|T\subseteq S\}$是技能多映射$\mu$在能力模型下生成的知识结构,那么对于任意知识状态$K\in\mathcal{K}$,都存在$T\subseteq S$,使得$K=p(T)$。此时,能力状态$T$的顶空间可以刻画为:

$$\lceil T\rceil^{*}=\left\{T'|T'\in\lceil T\rceil^{**},p(T')=p(T)\right\},$$

其中

$$\lceil T\rceil^{**}=\{T'|T'\in 2^{S}\backslash \bigcup_{q\in Q\backslash K}\bigcup_{\tau(q)\in\mu(q)}\left\{T''\in 2^{S}|T''\supseteq\tau(q)\right\},T'\text{极大}\}。$$

其中极大性表示对任意 $T'\in\lceil T\rceil^{**}$，都不存在 $T''\supset T'$，满足

$$T''\in 2^{S}\backslash\bigcup_{q\in Q\backslash K}\bigcup_{\tau(q)\in\mu(q)}\left\{T''\in 2^{S}|T''\supseteq\tau(q)\right\}。$$

证明 记 $X=\left\{T'|T'\in[T],T'\text{极大}\right\}$，$Y=\{T'|T'\in\lceil T\rceil^{**},p(T')=p(T)\}$。

(1)对 $\forall T'\in X$，因为 T' 极大，所以不存在 $T''\supset T'$，满足 $T''\in[T]$。又因为 $T'\in[T]$，所以 $p(T')=p(T)=K$，所以由问题函数 p 的定义得，对任意 $q\in Q\backslash K$，任意 $\tau(q)\in\mu(q)$，都有 $\tau(q)\not\subseteq T'$，所以

$$T'\in 2^{S}\backslash\bigcup_{q\in Q\backslash K}\bigcup_{\tau(q)\in\mu(q)}\left\{T''\in 2^{S}|T''\supseteq\tau(q)\right\},$$

所以

$$[T]\subseteq 2^{S}\backslash\bigcup_{q\in Q\backslash K}\bigcup_{\tau(q)\in\mu(q)}\left\{T''\in 2^{S}|T''\supseteq\tau(q)\right\}。$$

假设 $T'\notin Y$，又因为 $p(T')=p(T)$，所以 $T'\notin\lceil T\rceil^{**}$，又因为

$$T'\in[T]\subseteq 2^{S}\backslash\bigcup_{q\in Q\backslash K}\bigcup_{\tau(q)\in\mu(q)}\left\{T''\in 2^{S}|T''\supseteq\tau(q)\right\},$$

所以存在 $T''\supset T'$，满足 $T''\in\lceil T\rceil^{**}$，所以 $p(T'')\subseteq p(T)=K$。又因为 $T''\supset T'$，所以 $p(T'')\supseteq p(T')=K$，所以 $p(T'')=K=p(T)$，所以 $T''\in[T]$，矛盾，所以 $T'\in Y$，所以 $X\subseteq Y$。

(2)另一方面，对 $\forall T'\in Y$，有 $p(T')=p(T)=K$，所以 $T'\in[T]$。又因为 $T'\in\lceil T\rceil^{**}$，所以 T' 极大，所以不存在 $T''\supset T'$，满足 $T''\in 2^{S}\backslash\bigcup_{q\in Q\backslash K}\bigcup_{\tau(q)\in\mu(q)}\left\{T''\in 2^{S}|T''\supseteq\tau(q)\right\}$。又因为 $[T]\subseteq 2^{S}\backslash\bigcup_{q\in Q\backslash K}\bigcup_{\tau(q)\in\mu(q)}\left\{T''\in 2^{S}|T''\supseteq\tau(q)\right\}$，所以不存在 $T''\supset T'$，满足 $T''\in[T]$，所以 $T'\in X$，所以 $Y\subseteq X$。

综上：$X=Y$，即 $\lceil T\rceil^{*}=\{T'|T'\in\lceil T\rceil^{**},p(T')=p(T)\}$，定理得证。

定理13 设 (Q,S,μ) 是一个技能多映射，p 是由技能多映射 μ 诱导的问题函数，$\mathcal{K}=\{p(T)|T\subseteq S\}$ 是技能多映射 μ 在能力模型下生成的知识结构，那么对于任意知识状态 $K\in\mathcal{K}$，都存在 $T\subseteq S$，使得 $K=p(T)$。此时，知识状态 K 的内掌握边缘可以刻画为：

$$K^{\mathcal{IM}}=\{B|B=K\backslash p(T'\backslash T_0),T_0\subseteq T',\ p(T'\backslash T_0)\subseteq K,B\text{非空极小}\},$$

其中

$$T'=\bigcup\lceil T\rceil^{**},$$

$$\lceil T\rceil^{**}=\{T'|T'\in 2^{S}\backslash\bigcup_{q\in Q\backslash K}\bigcup_{\tau(q)\in\mu(q)}\left\{T''\in 2^{S}|T''\supseteq\tau(q)\right\},\mathrm{T}'\text{极大}\}。$$

其中极大性表示对任意 $T'\in\lceil T\rceil^{**}$，都不存在 $T''\supset T'$，满足

$$T''\in 2^{S}\backslash\bigcup_{q\in Q\backslash K}\bigcup_{\tau(q)\in\mu(q)}\left\{T''\in 2^{S}|T''\supseteq\tau(q)\right\}。$$

其中极小性表示对任意 $B\in K^{\mathcal{IM}}$，都不存在非空集 $B'\subset B$，满足 $B'=K\backslash p(T'\backslash T_0)$，$T_0\subseteq T'$，$p(T'\backslash T_0)\subseteq K$。

证明 (1)先证 $\{B\subseteq K|K\backslash B\in\mathcal{K}\}=\{B|B=K\backslash p(T'\backslash T_0),T_0\subseteq T',p(T'\backslash T_0)\subseteq K\}$。记

$$X=\{B\subseteq K|K\backslash B\in\mathcal{K}\},Y=\{B|B=K\backslash p(T'\backslash T_0),T_0\subseteq T',p(T'\backslash T_0)\subseteq K\}。$$

对 $\forall B\in X$，有 $K\backslash B\in\mathcal{K}$。记 $K_1=K\backslash B$，那么存在 $T_1\subseteq S$，使得 $K_1=p(T_1)$，并且有 $K_1\subseteq K$ 成立，即 $p(T_1)\subseteq p(\mathrm{T})=K$，所以由引理3可得存在 $T''\in\lceil T\rceil^{**}$，使得 $T_1\subseteq T''$，所以 $T_1\subseteq T'$。又因为 $B\subseteq K$，所以 $B=K\backslash K_1$。又因为 $T_1\subseteq T'$，所以存在 $T_0=T'\backslash T_1\subseteq T'$，有 $T'\backslash T_0=T'\backslash(T'\backslash T_1)=T'\cap T_1=T_1$，$p(T'\backslash T_0)=p(T_1)=K_1$，使得 $B=K\backslash K_1=K\backslash p(T'\backslash T_0)$，所以 $B\in Y$，所以 $X\subseteq Y$。

另一方面，对 $\forall B\in Y$，存在 $T_0\subseteq T'$，使得 $B=K\backslash p(T'\backslash T_0)$，其中 $p(T'\backslash T_0)\in\mathcal{K}$，令 $K_1=p(T'\backslash T_0)$，则 $B=K\backslash K_1\subseteq K$。又因为 $K_1=p(T'\backslash T_0)\subseteq K$，所以 $K\backslash B=K\backslash(K\backslash K_1)=K\cap K_1=K_1\in\mathcal{K}$，所以 $B\in X$，所以 $Y\subseteq X$。

综上：$X=Y$。

(2)对(1)中结果等式两边同时要求 B 非空极小，再由定义1即可证明。

注7 如果将以上定理中的 $\lceil T\rceil^{**}$ 替换为 $\lceil T\rceil^{*}$ 结论未必成立，如下例子所示。

例子 9（续例子 8） 对于知识状态 $K=\{a,b\}$，取 $T=\{t,u\}$，显然 $p(T)=K$，由定义 1 可知 $B=\{a\}\in K^{\mathcal{IM}}$，且 $K\backslash B=\{b\}\in\mathcal{K}$，但是对于 $T'=\bigcup\lceil T\rceil^{*}=\{t,u\}$，再对 $\forall T_0\subseteq T'=\{t,u\}$，$K\backslash p(T'\backslash T_0)\neq B$。

并且我们可以发现当学生的知识状态 $K=\{a,b\}$ 时，他的能力状态只能是 $\{t,u\}$。在知识空间理论中，他可以通过遗忘问题 $\{a\}$ 达到知识状态 $\{b\}$，但在基于能力的知识空间理论中，因为他的能力状态是 $\{t,u\}$，所以无法通过遗忘技能达到知识状态 $\{b\}$，而是略过 $\{b\}$ 直接达到 $\varnothing$ 或 $\{a\}$。

所以在能力模型中，我们可以把知识状态 K 的内掌握边缘 $K^{\mathcal{IM}}$ 中那些一定无法通过遗忘技能而达到 $K\backslash B$ 的 B 剔除掉，得到知识状态 K 的基于能力的内掌握边缘 $K^{\mathcal{IM}*}$，使后面的技能推荐方案更严谨。并且我们知道知识状态为 K 的学生，他的能力状态只能是 $T'=\bigcup\lceil T\rceil^{*}$ 的子集，其中 $K=p(T)$，那他可以通过遗忘技能而达到的知识状态 $K\backslash B$ 对应的能力状态也只能是 T' 的子集，所以对于任意 $B\in K^{\mathcal{IM}*}$，一定存在 $T_0\subseteq T'$，使得 $p(T'\backslash T_0)=K\backslash B$。进而可以得到以下定理。

定理 14 设 (Q,S,μ) 是一个技能多映射，p 是由技能多映射 μ 诱导的问题函数，$\mathcal{K}=\{p(T)|T\subseteq S\}$ 是技能多映射 μ 在能力模型下生成的知识结构，那么对于任意知识状态 $K\in\mathcal{K}$，都存在 $T\subseteq S$，使得 $K=p(T)$。此时，知识状态 K 的基于能力的内掌握边缘可以刻画为：

$$K^{\mathcal{IM}*}=\{B|B=K\backslash p\left(T'\backslash T_0\right),T_0\subseteq T',\ p\left(T'\backslash T_0\right)\subseteq K,B\text{非空极小}\}$$

其中 $T'=\bigcup\lceil T\rceil^{*}$，其中极小性表示对任意 $B\in K^{\mathcal{IM}*}$，都不存在非空集 $B'\subset B$，满足 $B'=K\backslash p(T'\backslash T_0)$，$T_0\subseteq T'$，$p(T'\backslash T_0)\subseteq K$。

例子 10（续例子 1） 根据定理 13 求解知识状态 $K=\{a,b,c\}$ 的内掌握边缘 $K^{\mathcal{IM}}$：

（1）求解 $T'=\bigcup\lceil T\rceil^{**}$，（其中 $T\subseteq S$，$K=p(T)$）：因为 $\lceil T\rceil^{**}=\{\{s,u\}\}$，所以 $T'=\bigcup\lceil T\rceil^{**}=\{s,u\}$。

（2）获取 T_0 的取值范围：$T_0\subseteq T'=\{s,u\}$，所以 $T_0\in\{\varnothing,\{s\},\{u\},\{s,u\}\}$。

（3）遍历 T_0，求解 B，（当 $p(T'\backslash T_0)\subseteq K$ 时 $B=K\backslash p(T'\backslash T_0)$，否则 B 不存在）：当 $T_0\in\{\varnothing\}$ 时 $B=\varnothing$，当 $T_0\in\{\{s\}\}$ 时 $B=\{a,c\}$，当 $T_0\in\{\{u\}\}$ 时 $B=\{a,b\}$，当 $T_0\in\{\{s,u\}\}$ 时 $B=\{a,b,c\}$。

（4）要求 B 非空极小，得 $K^{\mathcal{IM}}=\{\{a,c\},\{a,b\}\}$。

例子 11（续例子 1） 根据定理 12，定理 14 求解知识状态 $K=\{a,b,c\}$ 的基于能力的内掌握边缘 $K^{\mathcal{IM}*}$：

(1)求解 $T'=\bigcup\lceil T\rceil^{*}$，(其中 $T\subseteq S$，$K=p(T)$)：因为 $\lceil T\rceil^{**}=\{\{s,u\}\}$，所以 $\lceil T\rceil^{*}=\{\{s,u\}\}$，所以 $T'=\bigcup\lceil T\rceil^{*}=\{s,u\}$。

（2）获取 T_0 的取值范围：$T_0\subseteq T'=\{s,u\}$，所以 $T_0\in\{\varnothing,\{s\},\{u\},\{s,u\}\}$。

（3）遍历 T_0，求解 B，（当 $p(T'\backslash T_0)\subseteq K$ 时 $B=K\backslash p(T'\backslash T_0)$，否则 B 不存在）：当 $T_0\in\{\varnothing\}$ 时 $B=\varnothing$，当 $T_0\in\{\{s\}\}$ 时 $B=\{a,c\}$，当 $T_0\in\{\{u\}\}$ 时 $B=\{a,b\}$，当 $T_0\in\{\{s,u\}\}$ 时 $B=\{a,b,c\}$。

（4）要求 B 非空极小，得 $K^{\mathcal{IM}*}=\{\{a,c\},\{a,b\}\}$。

至此，我们已经可以在能力模型中用技能函数刻画能力状态的顶空间，用问题函数（和顶空间）刻画知识状态的（基于能力的）内掌握边缘。当然在基于能力的知识空间理论中，只获取知识状态的内掌握边缘是不够的，还需要推荐对应的技能集进行学习巩固，但是我们发现使用顶空间推荐并不容易，所以下文将利用底空间进行推荐。

并且由下文第 3.3 节的实验可知，通过定理 13 的刻画获取知识状态的内掌握边缘耗时长、占用内存大，并且可以明显看出其中的关键是获取顶空间的过程比较耗时，所以下文将同时给出利用底空间获取内掌握边缘的方法，该方法耗时短、占用内存小。

定义 5 设 (Q,S,p) 是一个问题函数，对 $T\subseteq S$，$[T]$ 是能力状态 T 的等价类，称

$$\lfloor T\rfloor^{*}=\left\{T'|T'\in[T],T'\text{极小}\right\}$$

为能力状态 T 的底空间。其中极小性表示对任

意 $T'\in\lfloor T\rfloor^{*}$,都不存在 $T''\subset T'$,满足 $T''\in[T]$。

定理15 设(Q,S,p)是一个问题函数,有以下结论成立:

(1)$\forall T'\in\lfloor T\rfloor^{*}$, $T'\in[T]$,即 $p(T')=p(T)$。

(2)$\forall T'\in[T]$, $\exists T''\in\lfloor T\rfloor^{*}$,使得 $T''\subseteq T'$。

(3)$\forall T'\in\lfloor T\rfloor^{*}$,不存在 $T''\in[T]$,使得 $T''\subset T'$。

类比定理5,我们同样可以使用技能函数刻画能力状态的底空间。

定理16 设(Q,S,μ)是一个技能多映射,p 是由技能多映射 μ 诱导的问题函数,$\mathcal{K}=\{p(T)|T\subseteq S\}$是技能多映射 μ 在能力模型下生成的知识结构,那么对于任意知识状态 $K\in\mathcal{K}$,都存在 $T\subseteq S$,使得 $K=p(T)$。此时,能力状态 T 的底空间可以刻画为:

$$\lfloor T\rfloor^{*}=\{T'|T'\in\lfloor T\rfloor^{**}, p(T')=p(T), T'\text{极小}\},$$

其中$\lfloor T\rfloor^{**}=\{T'|T'=\bigcup_{q\in K}\tau(q), \tau(q)\in\mu(q), K=p(T)\}$。其中极小性表示对任意 $T'\in\lfloor T\rfloor^{*}$,都不存在 $T''\subset T'$,满足 $T''\in\lfloor T\rfloor^{**}$, $p(T'')=p(T)$。

证明 记 $X=\{T'|T'\in[T], T'\text{极小}\}$, $Y=\{T'|T'\in\lfloor T\rfloor^{**}, p(T')=p(T), T'\text{极小}\}$。

(1)对 $\forall T'\in X$,因为 T' 极小,所以不存在 $T''\subset T'$,满足 $T''\in[T]$。又因为 $T'\in[T]$,所以 $p(T')=p(T)=K$,所以由问题函数 p 的定义得,对任意 $q\in K$,都存在 $\tau(q)\in\mu(q)$,使得 $\tau(q)\subseteq T'$,所以$\bigcup_{q\in K}\tau(q)\subseteq T'$,所以由定理1可得$p\left(\bigcup_{q\in K}\tau(q)\right)\subseteq p(T')=K$。又由问题函数 p 的定义得$p\left(\bigcup_{q\in K}\tau(q)\right)\supseteq K$,所以$p\left(\bigcup_{q\in K}\tau(q)\right)=K$,所以$\bigcup_{q\in K}\tau(q)\in[T]$。假设$\bigcup_{q\in K}\tau(q)\subset T'$,所以存在 $T''=\bigcup_{q\in K}\tau(q)\subset T'$,满足 $T''\in[T]$,矛盾,所以 $T'=\bigcup_{q\in K}\tau(q)$,所以 $T'\in\lfloor T\rfloor^{**}$。假设 $T'\notin Y$,又因为 $T'\in\lfloor T\rfloor^{**}$, $p(T')=p(T)$,所以存在 $T''\subset T'$,满足 $T''\in Y$,所以 $p(T'')=p(T)=K$,所以 $T''\in[T]$,矛盾,所以 $T'\in Y$,所以 $X\subseteq Y$。

(2)另一方面,对 $\forall T'\in Y$,因为 T' 极小,所以不存在 $T''\subset T'$,满足 $T''\in\lfloor T\rfloor^{**}$, $p(T'')=p(T)$。又因为 $p(T')=p(T)=K$,所以 $T'\in[T]$。假设 $T'\notin X$,又因为 $T'\in[T]$,所以存在 $T''\subset T'$,满足 $T''\in X$,所以由(1)可得 $X\subseteq Y$,所以 $T''\in Y$,所以 $T''\in\lfloor T\rfloor^{**}$, $p(T'')=p(T)$,矛盾,所以 $T'\in X$,所以 $Y\subseteq X$。

综上:$X=Y$,即$\lfloor T\rfloor^{*}=Y$,定理得证。

注8 $\lfloor T\rfloor^{**}$的构造和将能力模型分解为多个合取模型的思想[20]一致。

引理4 设(Q,S,p)是一个问题函数,对 $\forall T, T_1\subseteq S$,有 $p(T_1)\subseteq p(T)\Rightarrow\exists T_1'\in[T_1]$, $T'\in\lfloor T\rfloor^{**}$, $s.t. T_1'\subseteq T'$ 成立。其中$\lfloor T\rfloor^{**}=\{T'|T'=\bigcup_{q\in K}\tau(q), \tau(q)\in\mu(q), K=p(T)\}$。

证明 因为 $T_1\in[T_1]$,所以$[T_1]\neq\varnothing$,所以$\lfloor T_1\rfloor^{*}\neq\varnothing$,所以存在 $T_1'\in\lfloor T_1\rfloor^{*}\subseteq[T_1]$。由定理16得,对任意 $q\in p(T_1)$,都存在 $\tau(q)\in\mu(q)$,使得 $T_1'=\bigcup_{q\in p(T_1)}\tau(q)$。又因为 $p(T_1)\subseteq p(T)$,所以对任意 $q\in p(T)\backslash p(T_1)$,任取 $\tau(q)\in\mu(q)$,那么存在

$$T'=\left(\bigcup_{q\in p(T_1)}\tau(q)\right)\cup\left(\bigcup_{q\in p(T)\backslash p(T_1)}\tau(q)\right)=\bigcup_{q\in p(T)}\tau(q)\in\lfloor T\rfloor^{**},$$

使得 $T_1'\subseteq T'$ 成立。

注9 以上引理反之未必成立,如例子12(1)所示。

注10 $\lfloor T\rfloor^{**}$未必等于$\lfloor T\rfloor^{*}$,并且如果将以上引理中的$\lfloor T\rfloor^{**}$替换为$\lfloor T\rfloor^{*}$结论未必成立,如例子12(2)所示。

例子12(续例子8) (1)对于能力状态 $T_1=\{s,t\}$, $[T_1]=\{\{s,t\},S\}$, $T=\{t,u\}$, $\lfloor T\rfloor^{**}=\{\{s,t\},\{t,u\}\}$,存在 $T_1'=\{s,t\}\in[T_1]$, $T'=\{s,t\}\in\lfloor T\rfloor^{**}$,使得 $T_1'\subseteq T'$ 成立,但是 $p(T_1)=Q\supset\{a,b\}=p(T)$。

(2)对于能力状态 $T_1=\{s\}$, $T=\{t,u\}$,可得 $p(T_1)=\{b\}\subseteq\{a,b\}=p(T)$, $[T_1]=\{\{s\},\{s,u\}\}$, $\lfloor T\rfloor^{**}=\{\{s,t\},\{t,u\}\}$, $\lfloor T\rfloor^{*}=\{\{t,u\}\}$, $\lfloor T\rfloor^{**}\neq\lfloor T\rfloor^{*}$,但是对于 $\forall T_1'\in[T_1]$, $T'\in\lfloor T\rfloor^{*}$,都有 $T_1'\nsubseteq T'$。

定理17 设(Q,S,μ)是一个技能多映射,p 是由技能多映射 μ 诱导的问题函数,$\mathcal{K}=\{p(T)|T\subseteq S\}$是技能多映射 μ 在能力模型下生成的知识结构,那么对于任意知识状态 $K\in\mathcal{K}$,都存在 $T\subseteq S$,使得 $K=p(T)$。此时,知识状态

K的内掌握边缘可以刻画为：

$$K^{\mathcal{IM}}=\{B|B=K\backslash p(T'\backslash T_0),T_0\subseteq T',\ p(T'\backslash T_0)\subseteq K,B\text{非空极小}\},$$

其中$T'=\bigcup\lfloor T\rfloor^{**}$,$\lfloor T\rfloor^{**}=\{T''|T''=\bigcup_{q\in K}\tau(q),\ \tau(q)\in\mu(q),K=p(T)\}$。其中极小性表示对任意$B\in K^{\mathcal{IM}}$，都不存在非空集$B'\subset B$，满足$B'=K\backslash p(T'\backslash T_0)$，$T_0\subseteq T'$，$p(T'\backslash T_0)\subseteq K$。

证明 （1）先证$\{B\subseteq K|K\backslash B\in\mathcal{K}\}=\{B|B=K\backslash p(T'\backslash T_0),T_0\subseteq T',p(T'\backslash T_0)\subseteq K\}$。记

$$X=\{B\subseteq K|K\backslash B\in\mathcal{K}\},$$
$$Y=\{B|B=K\backslash p(T'\backslash T_0),T_0\subseteq T',p(T'\backslash T_0)\subseteq K\}。$$

对$\forall B\in X$,有$K\backslash B\in\mathcal{K}$,$B\subseteq K$。记$K_1=K\backslash B$,那么存在$T_1\subseteq S$,使得$K_1=p(T_1)$,并且有$K_1\subseteq K$成立,即$p(T_1)\subseteq p(\mathrm{T})=K$,所以由引理4可得存在$T_1'\in[T_1]$,$T''\in\lfloor T\rfloor^{**}$,使得$T_1'\subseteq T''$,所以$T_1'\subseteq T'$。又因为$B\subseteq K$,所以$B=K\backslash K_1$。又因为$T_1'\subseteq T'$,所以存在$T_0=T'\backslash T_1'\subseteq T'$，有$T'\backslash T_0=T'\backslash(T'\backslash T_1')=T'\cap T_1'=T_1'$，$p(T'\backslash T_0)=p(T_1')=p(T_1)=K_1$,使得$B=K\backslash K_1=K\backslash p(T'\backslash T_0)$,所以$B\in Y$,所以$X\subseteq Y$。

另一方面，对$\forall B\in Y$，存在$T_0\subseteq T'$，使得$B=K\backslash p(T'\backslash T_0)$，其中$p(T'\backslash T_0)\in\mathcal{K}$，令$K_1=p(T'\backslash T_0)$，则$B=K\backslash K_1\subseteq K$。又因为$K_1=p(T'\backslash T_0)\subseteq K$，所以

$$K\backslash B=K\backslash(K\backslash K_1)=K\cap K_1=K_1\in\mathcal{K},$$

所以$B\in X$，所以$Y\subseteq X$。

综上：$X=Y$。

（2）对（1）中结果等式两边同时要求B非空极小，再由定义1即可证明。

注11 如果将以上定理中的$\lfloor T\rfloor^{**}$替换为$\lfloor T\rfloor^{*}$结论未必成立，如例子13所示。

例子13（续例子12） 对于知识状态$K=\{a,b\}$，取$T=\{t,u\}$，显然$p(T)=K$，由定义1可知$B=\{a\}\in K^{\mathcal{IM}}$，且$K\backslash B=\{b\}\in\mathcal{K}$，但是对于$T'=\bigcup\lfloor T\rfloor^{*}=\{t,u\}$，再对$\forall T_0\subseteq T'=\{t,u\}$，$K\backslash p(T'\backslash T_0)\neq B$。

例子14（续例子1） 根据定理17求解知识状态$K=\{a,b,c\}$的内掌握边缘$K^{\mathcal{IM}}$：

（1）求解$T'=\bigcup\lfloor T\rfloor^{**}$,（其中$T\subseteq S$，$K=p(T)$）：因为$\lfloor T\rfloor^{**}=\{\{s,u\},\{s,t,u\}\}$，所以$T'=\bigcup\lfloor T\rfloor^{**}=\{s,t,u\}$。

（2）获取T_0的取值范围：$T_0\subseteq T'=\{s,t,u\}$，所以

$$T_0\in\{\varnothing,\{s\},\{t\},\{u\},\{s,t\},\{t,u\},\{s,u\},\{s,t,u\}\}。$$

（3）遍历T_0，求解B（当$p(T'\backslash T_0)\subseteq K$时$B=K\backslash p(T'\backslash T_0)$，否则$B$不存在）：

当$T_0\in\{\varnothing,\{s\},\{u\},\{s,u\}\}$时$B$不存在，当$T_0\in\{\{t\}\}$时$B=\varnothing$，当$T_0\in\{\{s,t\}\}$时$B=\{a,c\}$，当$T_0\in\{\{t,u\}\}$时$B=\{a,b\}$，当$T_0\in\{\{s,t,u\}\}$时$B=\{a,b,c\}$。

（4）要求B非空极小，得$K^{\mathcal{IM}}=\{\{a,c\},\{a,b\}\}$。

至此，我们已经可以在能力模型中用技能函数刻画能力状态的底空间，用问题函数（和底空间）刻画知识状态的内掌握边缘，最后我们讨论如何根据知识状态的基于能力的内掌握边缘推荐需要学习巩固的技能集。

定理18 设(Q,S,μ)是一个技能多映射，p是由技能多映射μ诱导的问题函数，$\mathcal{K}=\{p(T)|T\subseteq S\}$是技能多映射$\mu$在能力模型下生成的知识结构，那么对于任意知识状态$K\in\mathcal{K}$，都存在$T\subseteq S$，使得$K=p(T)$。此时，知识状态$K$的基于能力的内掌握边缘为$K^{\mathcal{IM}*}$，那么对于任意问题集$B\in K^{\mathcal{IM}*}$，存在$T_B\subseteq S$，使得$K\backslash B=p(T_B)$。而处于知识状态$K$的学生，要想巩固知识状态$K$，只需要巩固学习技能集$T_0$即可，其中$T_0\in\mathcal{T}=\{T_0|T_0=\bigcup_{B\in K^{\mathcal{IM}*}}T'\backslash\bigcap\lfloor T_B\rfloor^{*},T'\in\lfloor T\rfloor^{*}\}$。

证明 易知$\lfloor T\rfloor^{*}\neq\varnothing$，那么对任意$T'\in\lfloor T\rfloor^{*}$，任意$B\in K^{\mathcal{IM}*}$，$K\backslash B\in\mathcal{K}$，存在$T_B\subseteq S$，使得$K\backslash B=p(T_B)$。取$T_B'=\bigcap\lfloor T_B\rfloor^{*}$，假设$T'\subseteq T_B'$，那么由定理1可得$K=p(T')\subseteq p(T_B')\subseteq p(T_B)=K\backslash B$，与$B\neq\varnothing$矛盾，所以$T'\nsubseteq T_B'$，所以$T'\backslash T_B'\neq\varnothing$，$\mathcal{T}\neq\varnothing$。

处于知识状态K的学生如果发生退步，知识状态最可能退步至$K\backslash B$，其中$B\in K^{\mathcal{IM}*}$。对任意$B\in K^{\mathcal{IM}*}$,存在$T_B\subseteq S$,使得$K\backslash B=p(T_B)$。对于任意$T_B''\in[T_B]$,任意$T_0\in\mathcal{T}$,取$T_B'=\bigcap\lfloor T_B\rfloor^{*}$,存在$T'\in\lfloor T\rfloor^{*}$，使得$T_0\supseteq T'\backslash T_B'$，又因为$T_B''\supseteq T_B'$，所以$T_B''\cup T_0\supseteq T_B''\cup(T'\backslash T_B')=T_B''\cup T'\supseteq T'$，所以由定理1可得$p(T_B''\cup T_0)\supseteq p(T')=K$。

注 12 内掌握边缘 $K^{\mathcal{IM}}$ 中的所有问题集 B 都有可能遗忘,都需要巩固。

注 13 对于学生是否巩固了知识状态 K,可以使用问题集 $\bigcup K^{\mathcal{IM}}$ 进行检验。

例子 15(续例子 11) 根据定理 18 给出巩固知识状态 K 的方案,其中 $K=\{a,b,c\}$,$B\in K^{\mathcal{IM}*}=\{\{a,c\},\{a,b\}\}$:

(1)遍历 B,求解 $\bigcap\lfloor T_B\rfloor^*$,(其中 $T_B\subseteq S, K\backslash B=p(T_B)$):当 $B=\{a,c\}$ 时 $\lfloor T_B\rfloor^*=\{\{u\}\}$,$\bigcap\lfloor T_B\rfloor^*=\{u\}$,当 $B=\{a,b\}$ 时 $\lfloor T_B\rfloor^*=\{\{s\},\{t\}\}$,$\bigcap\lfloor T_B\rfloor^*=\varnothing$。

(2)求解 $\mathcal{T}$:因为 $T'\in\lfloor T\rfloor^*=\{\{s,u\}\}$,所以当 $T'=\{s,u\}$ 时

$$T_0=\bigcup_{B\in K^{\mathcal{IM}*}}T'\backslash\bigcap\lfloor T_B\rfloor^*=\{s\}\cup\{s,u\}=\{s,u\},$$

所以

$$\mathcal{T}=\{T_0|T_0=\bigcup_{B\in K^{\mathcal{IM}*}}T'\backslash\bigcap\lfloor T_B\rfloor^*,T'\in\lfloor T\rfloor^*\}=\{\{s,u\}\}。$$

(3)给出推荐方案 $T_0(\in\mathcal{T})$:推荐学生巩固学习技能集 $\{s,u\}$。

这就是能力模型中基于能力的个性化巩固学习推荐过程,在这个过程中,我们不需要知道学生的具体能力状态,也不需要建立整个知识结构。

3 实验分析

本文在知识空间理论的框架下对原有的推荐方案进行了改进,推荐的准确性和有效性由理论框架保障。因此,本文的实验主要考察算法的耗时和内存占用。在本小节中,针对三种不同的模型,分别给出了根据定义和根据刻画定理获取内掌握边缘的算法,接着使用 Python 运行并对比这两种算法的耗时长短与占用内存大小(读取技能映射或技能多映射的过程不计入其中。本文中涉及的内存单位采用二进制标准进行定义,即 1 KB=1024 Bytes)。下面先根据定义 1 给出求解内掌握边缘的算法 1。

算法 1 已知知识状态和知识结构,根据定义求解内掌握边缘

输入:$K,\mathcal{K}$
输出:$K^{\mathcal{IM}}$
1 Initialization: $K^{\mathcal{IM}}\leftarrow\varnothing$
2 for L in $\mathcal{K}$ do
3   if $L\subset K$ then
4     $B=K\backslash L$
5   isMin = true
6   for B_1 in $K^{\mathcal{IM}}$ do
7   if $B_1\subseteq B$ then
8   isMin = false
9   break
10   end if
11   if $B_1\supset B$ then
12         $K^{\mathcal{IM}}\leftarrow K^{\mathcal{IM}}\backslash\{B_1\}$
13   end if
14   end for
15   if isMin then
16       $K^{\mathcal{IM}}\leftarrow K^{\mathcal{IM}}\cup\{B\}$
17   end if
18   end if
19 end for
20 Return: $K^{\mathcal{IM}}$

算法 1 的 5 至 17 行保证了 B 的极小性。

3.1 合取模型下获取内掌握边缘

(1)实验算法

①根据内掌握边缘和合取模型的定义给出求解内掌握边缘的算法 2。

算法 2 在合取模型中已知知识状态和技能映射,根据定义求解内掌握边缘

输入:K,S,τ
输出:$K^{\mathcal{IM}}$
1 $\mathcal{K}=\{p_c(T)|T\subseteq S\}$,其中 $p_c(T)=\{q\in Q|\tau(q)\subseteq T\}$
2 同算法 1 的 1 至 20 行

②根据合取模型中的两个刻画定理(推论 1、定理 5、例子 3)给出求解内掌握边缘算法 3。

算法 3 在合取模型中已知知识状态和技能映射,根据刻画定理求解内掌握边缘

输入:K,S,τ
输出:$K^{\mathcal{IM}}$
1 Initialization: $K^{\mathcal{IM}}\leftarrow\varnothing$
2 $\lfloor T\rfloor=\bigcup_{q\in K}\tau(q)$
3 for $T_0\subseteq\lfloor T\rfloor$ do
4   $L=p_c(\lfloor T\rfloor\backslash T_0)$,其中 $p_c(T)=\{q\in Q|\tau(q)\subseteq T\}$
5   if $K\neq L$ then
6 同算法 1 的 4 至 20 行

(2)实验数据,见表 1。

(3)实验步骤与结果

①利用算法 2 和 3 求解同一个知识状态的内掌握边缘,并对比这两种算法的耗时长短与占用内存大小,实验结果见表 2。

表1 合取技能映射$\tau(q)$的问题-技能表

Table 1 Question and skill for conjunctive skill mapping $\tau(q)$

问题	技能							
	a	b	c	d	e	f	g	h
1	0	0	0	1	0	1	1	0
2	0	0	0	1	0	0	1	0
3	0	0	0	1	0	0	1	0
4	0	1	1	0	1	0	1	0
5	0	1	0	1	0	0	1	1
6	0	0	0	0	0	0	1	0
7	1	1	0	0	0	0	1	0
8	0	0	0	0	0	0	1	0
9	0	1	0	0	0	0	0	0
10	0	1	0	0	1	0	1	1
11	0	1	0	0	1	0	1	0
12	0	0	0	0	0	0	1	1
13	0	1	0	1	1	0	1	0
14	0	1	0	0	0	0	1	0
15	1	0	0	0	0	0	1	0
16	0	1	0	0	0	0	1	0
17	0	1	0	0	1	0	1	0
18	0	1	0	0	1	1	1	0
19	1	1	1	0	1	0	1	0
20	0	1	1	0	1	0	1	0

注：实验数据来自文献[24]。其中关于问题和技能的描述如下：(1)$\frac{5}{3}-\frac{3}{4}$，(2)$\frac{3}{4}-\frac{3}{8}$，(3)$\frac{5}{6}-\frac{1}{9}$，(4)$3\frac{1}{2}-2\frac{3}{2}$，(5)$4\frac{3}{5}-3\frac{4}{10}$，(6)$\frac{6}{7}-\frac{4}{7}$，(7)$3-2\frac{1}{5}$，(8)$\frac{2}{3}-\frac{2}{3}$，(9)$3\frac{7}{8}-2$，(10)$4\frac{4}{12}-2\frac{7}{12}$，(11)$4\frac{1}{3}-2\frac{4}{3}$，(12)$1\frac{1}{8}-\frac{1}{8}$，(13)$3\frac{3}{8}-2\frac{5}{6}$，(14)$3\frac{4}{5}-3\frac{2}{5}$，(15)$2-\frac{1}{3}$，(16)$4\frac{5}{7}-1\frac{4}{7}$，(17)$7\frac{3}{5}-\frac{4}{5}$，(18)$4\frac{1}{10}-2\frac{8}{10}$，(19)$4-1\frac{4}{3}$，(20)$4\frac{1}{3}-1\frac{5}{3}$；(a)将整数转换为分数，(b)将整数与分数分离，(c)在减法前进行简化，(d)找到一个公分母，(e)从整数部分借用，(f)列借用从第一个分子中减去第二个分子，(g)减去分子，(h)将答案简化为最简单的形式。

②探究算法2和3的耗时长短与占用内存大小随知识状态元素个数变化的规律，实验结果见图1。算法3相较算法2耗时平均减少了72%，内存占用平均降低了49%。

(4)实验结果分析见3.4节。

3.2 析取模型下获取内掌握边缘

(1)实验算法

①根据内掌握边缘和析取模型的定义给出求解内掌握边缘的算法$2'$。

表2 举4个知识状态为例进行算法2和3的对比

Table 2 Comparison between algorithm 2 and algorithm 3 using four knowledge states as examples

输入K 输出$K^{\mathcal{IM}}$	耗时/ms		内存/KB	
	算法2	算法3	算法2	算法3
$\{6,8,15\}\{\{15\}\}$	4.986	0.993	12.0	4.0
$\{2,3,6,7,8,9,14,15,16\}$ $\{\{2,3\},\{7,15\},\{7,9,14,16\}\}$	5.981	0.997	12.0	4.0
$\{2,3,4,6,8,9,11,13,14,16,17,20\}\{\{4,20\},\{2,3,13\}\}$	4.986	0.997	12.0	8.0
$\{1,2,3,4,5,6,8,9,10,11,12,13,14,16,17,18,20\}$ $\{\{1,18\},\{4,20\},\{5,10,12\},\{1,2,3,5,13\}\}$	4.987	2.992	12.0	8.0

算法$2'$ 在析取模型中已知知识状态和技能映射，根据定义求解内掌握边缘

输入：K,S,τ

输出：$K^{\mathcal{IM}}$

$\mathcal{K}=\{p_d(T)|T\subseteq S\}$，其中$p_d(T)=\{q\in Q|\tau(q)\cap T\neq\varnothing\}$

同算法1的1至20行

②根据析取模型中的两个刻画定理（定理8、定理9、例子6）给出求解内掌握边缘算法$3'$。

算法$3'$ 在析取模型中已知知识状态和技能映射，根据刻画定理求解内掌握边缘

输入：K,S,τ

输出：$K^{\mathcal{IM}}$

```
Initialization: K^IM ← ∅
⌈T⌉ = S \ ⋃_{q∈Q\K} τ(q)
for T_0 ⊆ ⌈T⌉ do
    L = p_d(⌈T⌉ \ T_0), 其中 p_d(T) = {q∈Q | τ(q) ∩ T ≠ ∅}
    if K ≠ L then
同算法1的4至20行
```

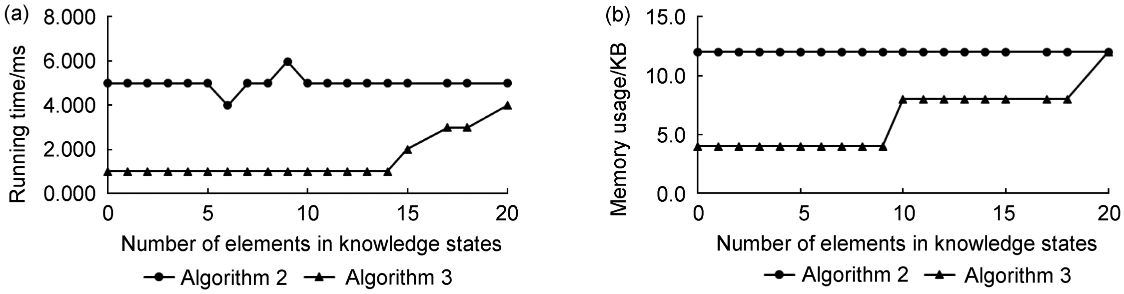
(2)实验数据，见表3。

(3)实验步骤与结果

①利用算法$2'$和$3'$求解同一个知识状态的内掌握边缘，并对比这两种算法的耗时长短与占用内存大小，实验结果见表4。

②探究算法$2'$和$3'$的耗时长短与占用内存大小随知识状态元素个数变化的规律，实验结果见图2。算法$3'$相较算法$2'$耗时平均减少了86%，内存占用平均降低了85%。

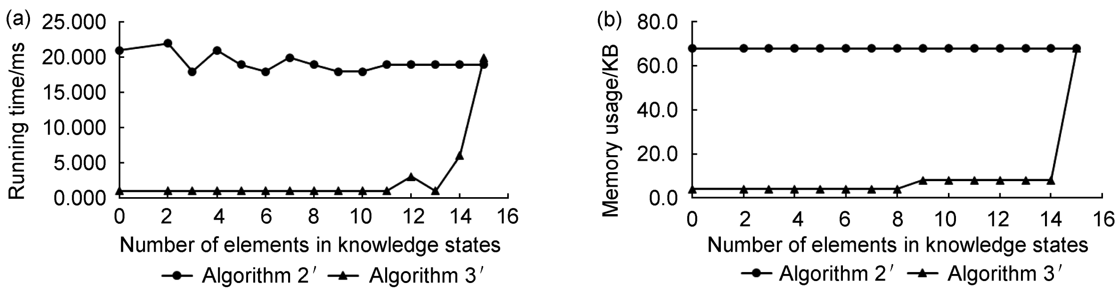
(4)实验结果分析见3.4节。



(a) 算法运行时间对比 (b) 算法占用内存对比

图1 不同元素个数的知识状态各举一例进行算法2和3的对比

Fig. 1 Comparison between algorithm 2 and algorithm 3 using examples of knowledge states with different element counts



(a) 算法运行时间对比 (b) 算法占用内存对比

图2 不同元素个数的知识状态各举一例进行算法2′和3′的对比

Fig. 2 Comparison between algorithm 2′ and algorithm 3′ using examples of knowledge states with different element counts

表3 析取技能映射$\tau(q)$的问题-技能表

Table 3 Question and skill for disjunctive skill mapping $\tau(q)$

问题	技能									
	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
1	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0
2	0	1	1	0	1	0	0	1	1	0
3	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0
4	0	1	1	1	1	0	1	0	0	0
5	0	1	1	0	1	0	0	1	1	0
6	0	1	1	1	1	1	0	1	1	0
7	1	0	1	0	0	0	0	1	1	0
8	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0
9	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1
10	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1
11	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1
12	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1
13	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0
14	1	1	1	0	1	0	0	0	0	1
15	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1

注:实验数据来自文献[20]。1—15表示15个不同的问题,a—j表示10个不同的技能。

表4 举4个知识状态为例进行算法2′和3′的对比

Table 4 Comparison between algorithm 2′ and algorithm 3′ using four knowledge states as examples

输入K 输出$K^{\mathcal{IM}}$	耗时/ms		内存/KB	
	算法2′	算法3′	算法2′	算法3′
$\{1,3,4\}$ $\{\{1,3,4\}\}$	17.949	0.997	68.0	4.0
$\{2,3,4,5,6,14\}$ $\{\{2,4,5,14\}\}$	17.951	0.997	68.0	4.0
$\{7,9,10,11,12,14,15\}$ $\{\{7\},\{15\}\}$	19.944	0.997	68.0	4.0
$\{1,3,4,6,7,9,10,11,12,$ $14,15\}\{\{6\},\{7\},\{15\},\{1,4\}\}$	18.949	0.997	68.0	8.0

算法2″ 在能力模型中已知知识状态和技能多映射,根据定义求解内掌握边缘

输入:K,S,μ

输出:$K^{\mathcal{IM}}$

1 $\mathcal{K}=\{p(T)|T\subseteq S\}$,其中$p(T)=\{q\in Q|\exists C\in\mu(q),C\subseteq T\}$

2 同算法1的1至20行

3.3 能力模型下获取内掌握边缘

(1)实验算法

①根据内掌握边缘和能力模型的定义给出求解内掌握边缘的算法2″。

②根据能力模型中的两个刻画定理(定理13、例子10)给出求解内掌握边缘算法3″。

③根据能力模型中的两个刻画定理(定理17、例子14)给出求解内掌握边缘算法4″。

算法 $3''$　在能力模型中已知知识状态和技能多映射,根据刻画定理求解内掌握边缘

输入:K,S,μ

输出:$K^{\mathcal{IM}}$

Initialization: $K^{\mathcal{IM}}\leftarrow\varnothing$

$T'=\bigcup\lceil T\rceil^{**}$,其中

$\lceil T\rceil^{**}=\{T'|T'\in 2^S\setminus\bigcup_{q\in Q\setminus K}\bigcup_{\tau(q)\in\mu(q)}\{T''\in 2^S|T''\supseteq\tau(q)\},T'\text{极大}\}$

for $T_0\subseteq T'$ do

　$L=p(T'\setminus T_0)$,其中 $p(T)=\{q\in Q|\exists C\in\mu(q),C\subseteq T\}$

　if $L\subset K$ then

同算法1的4至20行

算法 $4''$　在能力模型中已知知识状态和技能多映射,根据刻画定理求解内掌握边缘

输入:K,S,μ

输出:$K^{\mathcal{IM}}$

Initialization: $K^{\mathcal{IM}}\leftarrow\varnothing$

$T'=\bigcup\lfloor T\rfloor^{**}$,其中 $\lfloor T\rfloor^{**}=\{T''|T''=\bigcup_{q\in K}\tau(q),\tau(q)\in\mu(q)\}$

for $T_0\subseteq T'$ do

　$L=p(T'\setminus T_0)$,其中 $p(T)=\{q\in Q|\exists C\in\mu(q),C\subseteq T\}$

　if $L\subset K$ then

同算法1的4至20行

(2)实验数据,见表5。

(3)实验步骤与结果

①利用算法 $2''$、$3''$ 和 $4''$ 求解同一个知识状态的内掌握边缘,并对比这三种算法的耗时长短与占用内存大小,实验结果见表6。

②探究算法 $2''$、$3''$ 和 $4''$ 的耗时长短与占用内存大小随知识状态元素个数变化的规律,实验结果见图3。算法 $4''$ 相较算法 $2''$ 耗时平均减少了73%,内存占用平均降低了68%。

(4)实验结果分析见3.4节。

3.4　三种模型的实验结果分析

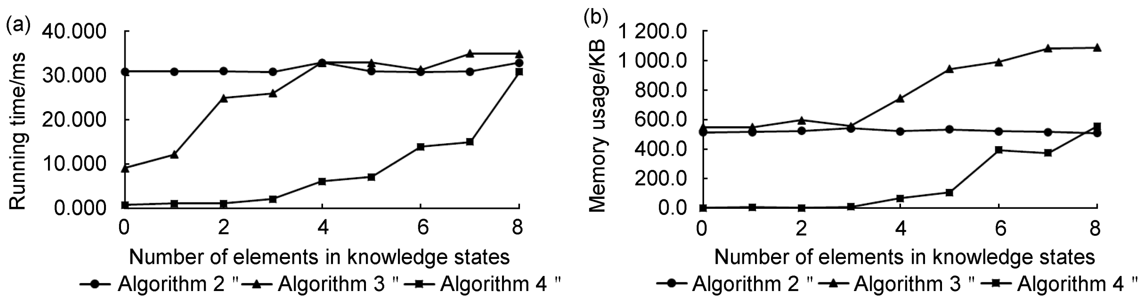
由3.1至3.3节的实验步骤(3.1)及其结果可知原算法 $2(2',2'')$ 和新算法 $3(3',4'')$ 解同一个知识状态的内掌握边缘的结果是一致的,说明了算法的准确性。当然,通过第2节中严格的证明也能得出该结论。虽然算法的运行时间

表5　技能多映射 $\mu(q)$ 的问题-技能表

Table 5　Question and skill for skill multimap $\mu(q)$

问题	技能 a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l
1	0	1	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0
2	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1
3	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
4	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
4	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0
4	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0
4	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
5	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0
7	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0
8	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0
8	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0

注:实验数据来自文献[25]。其中关于问题和技能的描述如下:(1)如果我碰到一只动物,我就会觉得自己被污染了;(2)我用了太多的肥皂来洗自己;(3)我并不太关心清洁度;(4)我并不太担心细菌和疾病;(5)碰到钱后,我的手感觉很脏;(6)我花了很长时间在早上完成我的洗涤;(7)我使用了大量的洗涤剂和防腐剂;(8)晚上挂衣服和叠衣服要花很长时间。(a)在一个或多种情况下,人们认为他的想法被夸大了;(b)反复思考;(c)思考会引起强烈的焦虑和不安;(d)不仅仅是正确的体验;(e)耗时;(f)思想是由病人自己的思想所产生的;(g)洗涤;(h)病人试图通过其他的想法或行动来抵消这些强迫症;(i)细菌和疾病;(j)动物;(k)防腐剂的使用;(l)肥皂的使用。



(a) 算法运行时间对比　　(b) 算法占用内存对比

图3　不同元素个数的知识状态各举一例进行算法 $2''$、$3''$ 和 $4''$ 的对比

Fig. 3　Comparison among algorithms $2''$, $3''$ and $4''$ using examples of knowledge states with different element counts

表6 举4个知识状态为例进行算法$2''$、$3''$和$4''$的对比

Table 6 Comparison among algorithms $2''$, $3''$ and $4''$ using four knowledge states as examples

输入K 输出$K^{\mathcal{IM}}$	耗时/ms			内存/KB		
	算法$2''$	算法$3''$	算法$4''$	算法$2''$	算法$3''$	算法$4''$
$\{3,5,8\}$ $\{\{5\},\{8\}\}$	30.771	25.943	1.995	540.0	556.0	8.0
$\{1,3,4,7,8\}$ $\{\{1\},\{4\},\{7\},\{8\}\}$	30.947	32.913	7.005	532.0	944.0	104.0
$\{1,2,3,4,6,8\}$ $\{\{1\},\{2\},\{4\},\{6\}\}$	30.765	31.279	13.865	520.0	992.0	392.0
$\{2,3,4,5,6,7,8\}$ $\{\{2\},\{4\},\{5\},\{6\},\{7\}\}$	30.897	34.938	14.937	516.0	1084.0	372.0

和占用内存会受到各种不可控因素的影响,但是我们从实验步骤(3.2)及其结果还是可以很明显地看出算法3($3'$,$4''$)的运行时间和占用内存比算法2($2'$,$2''$)的低,并且算法3($3'$,$4''$)的运行时间和占用内存大致上会随着知识状态元素个数的减少而降低,而算法2($2'$,$2''$)的不受影响。从数据上看,新算法相较原算法耗时平均减少了77%,内存占用平均降低了67%。当然,这些结论也可以从算法中分析出来,本文算法涉及大量的集合运算,很难精确地表示出算法整体的时间和空间复杂度,但我们会发现需要对比的算法实际上只有部分行是不同的,而其他相同行的代码即使有不同的实现方式也可以保持一致,所以我们只考虑对比算法中的不同行。观察算法2($2'$,$2''$)的第1行、算法3($3'$,$4''$)的第3和第4行,我们会发现算法2($2'$,$2''$)因为要先根据模型的定义构建出整个知识结构,所以能力状态要遍历S幂集的全部子集,即算法2($2'$,$2''$)的第1行的时间空间复杂度分别均为$O\left(2^{|S|}\right)\left(O\left(2^{|S|}\right);\ O\left(2^{|S|}\right)\right)$,而算法3($3'$,$4''$)不需要构建整个知识结构,所以可以只遍历$S$幂集的部分子集,即算法3($3'$,$4''$)的1—5行的时间空间复杂度分别均为$O\left(2^{|\lfloor T\rfloor|}\right)\left(O\left(2^{|\lceil T\rceil|}\right);\ O\left(2^{\left|\bigcup\lfloor T\rfloor^{**}\right|}\right)\right)$,所以算法3($3'$,$4''$)的运行时间和占用内存比算法2($2'$,$2''$)的低,并且这部分子集是包含于学生已掌握技能集的子集。一般,学生的知识状态的元素个数越少,已经掌握的技能就越少,S幂集中包含于已掌握技能集的子集就越少,所以算法3($3'$,$4''$)的运行时间和占用内存大致上会随着知识状态元素个数的减少而降低。

4 结论

本文提出一种基于同一类能力的顶或底直接计算知识状态内掌握边缘,进行个性化巩固学习推荐的一般方法,给出并利用两个刻画定理提高算法效率,使其耗时更短、占用内存更小。方法步骤如下:先通过测试获得当前知识状态,再通过算法3($3'$,$4''$)获取当前知识状态的(基于能力的)内掌握边缘,而内掌握边缘中的所有问题集都是需要巩固的,再通过定理6(10,18)获取技能集族$\mathcal{T}$,接着让学生从中选择一个技能集进行巩固学习即可保持当前知识状态并且可以使用内掌握边缘中的问题集进行检验,这就是巩固学习推荐的过程。

参考文献:

[1] 中华人民共和国教育部. 中共中央办公厅 国务院办公厅印发《关于进一步减轻义务教育阶段学生作业负担和校外培训负担的意见》[EB/OL]. (2021-07-24) [2023-09-21]. http://www. moe. gov. cn/jyb_xxgk/moe_1777/moe_1778/202107/t20210724_546576.html.
The Ministry of Education of the People's Republic of China. The General Office of the Central Committee of the Communist Party of China, and the General Office of the State Council have issued the "Opinions on Further Reducing the Homework Burden and Off campus Training Burden of Students in Compulsory Education"[EB/OL]. (2021-07-24) [2023-09-21]. http://www. moe. gov. cn/jyb_xxgk/moe_1777/moe_1778/202107/t20210724_546576.html.

[2] 贾积有, 乐惠骁, 张誉月, 等. 基于大数据挖掘的智能评测和辅导系统设计[J]. 中国电化教育, 2023(3): 112-119. DOI: 10.3969/j.issn.1006-9860.2023.03.016.
JIA J Y, LE H X, ZHANG Y Y, *et al*. The Design of an Intelligent Assessment and Tutoring System Based on Big Data Mining[J]. *China Educ Technol*, 2023(3): 112-119. DOI: 10.3969/j.issn.1006-9860.2023.03.016.

[3] REDDY A A, HARPER M. ALEKS-based Placement at the University of Illinois[M]//Knowledge Spaces. Berlin, Heidelberg: Springer, 2013: 51-68.

[4] DE CHIUSOLE D, STEFANUTTI L, ANSELMI P, *et al*. Stat-knowlab. Assessment and Learning of Statistics with Competence-based Knowledge Space Theory[J]. *Int J Artif Intell Educ*, 2020, **30**(4): 668–700. DOI: 10.1007/s40593-020-00223-1.

[5] HELLER J, STEFANUTTI L, ANSELMI P, *et al*. On the Link between Cognitive Diagnostic Models and Knowledge Space Theory[J]. *Psychometrika*, 2015, **80**(4): 995–1019. DOI: 10.1007/s11336-015-9457-x.

[6] HELLER J, STEFANUTTI L, ANSELMI P, *et al*. Erratum To: On the Link between Cognitive Diagnostic Models and Knowledge Space Theory[J]. *Psychometrika*, 2016, **81**(1): 250–251. DOI: 10.1007/s11336-015-9494-5.

[7] FALMAGNE J C, DOIGNON J P. Learning Spaces: Interdisciplinary Applied Mathematics[M]. Heidelberg: Springer Berlin, Heidelberg, 2010. DOI: 10.1007/978-3-642-01039-2.

[8] FALMAGNE J C, KOPPEN M, VILLANO M, *et al*. Introduction to Knowledge Spaces: How to Build, Test, and Search them[J]. *Psychol Rev*, 1990, **97**(2): 201–224. DOI: 10.1037//0033-295x.97.2.201.

[9] DOIGNON J P. Knowledge Spaces and Skill Assignments[M]//FISCHER GH, LAMING D. Contributions to Mathematical Psychology, Psychometrics, and Methodology. New York: Springer, 1994: 111–121.10.1007/978–1–4612–4308–3_8.

[10] DÜNTSCH I, GEDIGA G. Skills and Knowledge Structures[J]. *Brit J Math Statis*, 1995, **48**(1): 9–27. DOI: 10.1111/j.2044-8317.1995.tb01047.x.

[11] GEDIGA G, DÜNTSCH I. Skill Set Analysis in Knowledge Structures[J]. *Br J Math Stat Psychol*, 2002, **55**(Pt 2): 361–384. DOI: 10.1348/000711002760554516.

[12] KOROSSY K. Extending the Theory of Knowledge Spaces: A Competence-Performance Approach[J]. *Zeitschrift fur Psychologie*, 1997, **205**(1): 53–82.

[13] KOROSSY K. Modeling Knowledge as Competence and Performance[M]//Knowledge Spaces. Psychology Press, 1999: 115–144. DOI: 10.4324/9781410602077-14.

[14] HELLER J, ÜNLÜ A, ALBERT D. Skills, Competencies, and Knowledge Structures[M]//Knowledge Spaces: Applications in Education. Berlin, Germany: Springer–Verlag, 2013: 229–242. DOI: 10.1007/978-3-642-35329-111.

[15] HELLER J, STEINER C, HOCKEMEYER C, *et al*. Competence-Based Knowledge Structures for Personalised Learning[J]. *IJEL*, 2006, **5**(1): 75–88. DOI: https://www.learntechlib.org/p/21759/.

[16] HELLER J, ANSELMI P, STEFANUTTI L, *et al*. A Necessary and Sufficient Condition for Unique Skill Assessment[J]. *J Math Psychol*, 2017, **79**: 23–28. DOI: 10.1016/j.jmp.2017.05.004.

[17] ANSELMI P, HELLER J, STEFANUTTI L, *et al*. Constructing, Improving, and Shortening Tests for Skill Assessment[J]. *J Math Psychol*, 2022, **106**: 102621. DOI: 10.1016/j.jmp.2021.102621.

[18] ANSELMI P, HELLER J, STEFANUTTI L, *et al*. Constructing Tests for Skill Assessment with Competence-based Test Development[J]. *Br J Math Stat Psychol*, 2024, **77**(3): 429–458. DOI: 10.1111/bmsp.12335.

[19] STEFANUTTI L, DE CHIUSOLE D. On the Assessment of Learning in Competence Based Knowledge Space Theory[J]. *J Math Psychol*, 2017, **80**: 22–32. DOI: 10.1016/j.jmp.2017.08.003.

[20] 周银凤. 形式背景下构建知识结构与寻找学习路径的方法研究[D]. 漳州: 闽南师范大学, 2022.
ZHOU Y F. Research on the Method of Constructing Knowledge Structure and Finding Learning Path Under the Formal Background[D]. Zhangzhou: Minnan Normal University, 2022.

[21] 周银凤, 李进金, 冯丹露, 等. 形式背景下的学习路径与技能评估[J]. 模式识别与人工智能, 2021, **34**(12): 1069–1084. DOI: 10.16451/j.cnki.issn1003-6059.202112001.
ZHOU Y F, LI J J, FENG D L, *et al*. Learning Paths and Skills Assessment in Formal Context[J]. *Pattern Recognit Artif Intell*, 2021, **34**(12): 1069–1084. DOI: 10.16451/j.cnki.issn1003-6059.202112001.

[22] NOVENTA S, SPOTO A, HELLER J, *et al*. On a Generalization of Local Independence in Item Response Theory Based on Knowledge Space Theory[J]. *Psychometrika*, 2019, **84**(2): 395–421. DOI: 10.1007/s11336-018-9645-6.

[23] STEFANUTTI L. On the Assessment of Procedural Knowledge: From Problem Spaces to Knowledge Spaces[J]. *Br J Math Stat Psychol*, 2019, **72**(2): 185–218. DOI: 10.1111/bmsp.12139.

[24] ANSELMI P, ROBUSTO E, STEFANUTTI L, *et al*. An Upgrading Procedure for Adaptive Assessment of Knowledge[J]. *Psychometrika*, 2016, **81**(2): 461–482. DOI: 10.1007/s11336-016-9498-9.

[25] SPOTO A, STEFANUTTI L, VIDOTTO G. On the Unidentifiability of a Certain Class of Skill Multi Map Based Probabilistic Knowledge Structures[J]. *J Math Psychol*, 2012, **56**(4): 248–255. DOI: 10.1016/j.jmp.2012.05.001.