山西大学学报(自然科学版)48(1):89-100,2025
Journal of Shanxi University(Nat. Sci. Ed.)

DOI:10.13451/j.sxu.ns.2024152

不完备决策背景下对象导出三支概念格的规则提取

王田燕[1],万仁霞[1,2*],苗夺谦[2,3],赵杰[1]
(1.北方民族大学 数学与信息科学学院,宁夏 银川 750021;
2.宁夏智能信息与大数据处理重点实验室,宁夏 银川 750021;
3.同济大学 计算机科学与技术系,上海 201804)

摘　要:规则提取是形式概念分析研究的一个重要内容,而三支形式概念分析又是形式概念理论分析发展的一个重要成果。针对当前的三支形式概念分析研究并没有充分考虑形式背景不完备的情况,本文探讨在不完备决策背景下对象导出三支概念格的决策规则的提取问题。首先刻画了乐观型的不完备决策背景和悲观型的不完备决策背景,在这两种背景下给出三支概念格之间的细于关系;然后分别给出了在乐观型和悲观型的决策背景下对象导出三支概念格及决策规则的提取;最后讨论了对象导出三支概念格、乐观型对象导出三支概念格和悲观型对象导出三支概念格之间的规则提取关系,得出了不完备决策背景下,对象导出三支正规则集合与悲观型对象导出三支正规则集合相同以及决策近似概念格细于悲观型背景下的决策概念格等结论。研究结果可为不完备形式背景下的三支概念格及规则提取等相关研究提供有益的理论支持。

关键词:不完备决策背景;规则提取;对象导出三支概念格;乐观型;悲观型
中图分类号:TP18　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:0253-2395(2025)01-0089-12

Rule Acquisition Based on Object-induced Three-way Concept Lattice in Incomplete Formal Decision Context

WANG Tianyan[1], WAN Renxia[1,2*], MIAO Duoqian[2,3], ZHAO Jie[1]
(1. *School of Mathematics and Information Science, North Minzu University, Yinchuan* 750021*, China;*
2. *Ningxia Key Laboratory of Intelligent Information and Big Data Processing, Yinchuan* 750021*, China;*
3. *Faculty of Computer Science and Technology, Tongji University, Shanghai* 201804*, China*)

Abstract: Rule extraction plays an important role in formal concept research, while three-way formal concept analysis represents a significant advancement in the development of formal concept analysis theory. Considering that current research on three-way formal concept analysis does not adequately address incomplete formal contexts, this paper delves into the issue of extracting decision rules from object-induced three-way concept lattices under incomplete decision contexts. Firstly, the optimistic and pessimistic decision contexts of incomplete decision contexts are characterized and the detailed relations between three-way concepts in these two contexts are then provided. The extraction of the three-way concept lattice and decision rules for both optimistic and pessimistic decision objects are subsequently presented. Finally, the relationships in rule acquisition among object-induced three-way concept lattices, optimistic object-induced three-way concept lattices and pessimistic object-induced three-way concept lattices are discussed. The study concluded that in an incomplete decision context, the set of object-induced three-way positive rules is identical to the set of pessimistic object-induced three-way positive rules, and that the decision approximate concept lattice is finer than the decision con-

收稿日期:2024-06-16;**接受日期**:2024-10-24
基金项目:国家自然科学基金(62066001);宁夏科技领军人才项目(2022GKLRLX08);宁夏自然科学基金(2021AAC03203)
作者简介:王田燕(2000—),女,宁夏石嘴山人,硕士研究生,研究方向为三支决策、数据挖掘。E-mail:wangty@163.com
* **通信作者**:万仁霞(WAN Renxia),E-mail:wanrx1022@nmu.edu.cn
引文格式:王田燕,万仁霞,苗夺谦,等.不完备决策背景下对象导出三支概念格的规则提取[J].山西大学学报(自然科学版),2025,48(1):89-100. DOI:10.13451/j.sxu.ns.2024152.

cept lattice in a pessimistic context.These findings provide valuable theoretical support for the study of three-way concept lattices and rule extraction in contexts involving incomplete information.

Key words: incomplete formal decision context; rule acquisition; object-induced three-way concept lattice; optimistic; pessimistic

0 引言

在二十世纪八十年代初,德国数学家Wille为了重构格理论提出了形式概念分析(Formal Concept Analysis, FCA)[1-2],是一种基于形式背景进行数据分析的理论。形式背景是FCA的基础数据结构,由对象集、属性集以及它们之间的二元关系组成,同时以外延和内涵构成形式概念。FCA已广泛应用于机器学习、数据挖掘、模式识别、医学诊断等领域[3-7]。概念格[1,8-10]作为形式概念分析的关键工具,在数据分析处理中发挥着重要作用,也是一种发掘数据间关联性的有效方法。三支决策[11](Three-way Decision, 3WD)是Yao Yiyu教授提出的一种决策理论,用以刻画决策者面对不确定事物时的决策行为,即,在决策过程中,对于具有充分把握做出判断的事物采取接受或拒绝决策,而对于那些不能立即做出判断的事物采取延迟决策的做法。Qi等[12-13]将FCA与三支决策相结合,提出了三支概念分析(Three-way Concept Analysis,3WCA),从“共同具有”和“共同不具有”的角度,从而实现了对对象(属性)集三划分处理,并提出了由对象导出的三支概念格和由属性导出的三支概念格。三支概念分析一经提出,便得到了学界的广泛关注,许多学者对三支概念分析的理论和应用方面开展了研究。例如:Singh[14]根据病人所表现出的病症,运用模糊三支概念来诊断病人的疾病。钱婷等[15-16]通过研究形式背景的特征,讨论了三支概念格与传统概念格之间的同构性,证明了在属性对偶背景及属性对偶补背景下,对象导出的三支概念格与概念格是相互同构的,并给出了相应的判定方法。Mao等[17]将半概念理论与三支决策相结合,提出了三支半概念,并分析了三支概念、三支半概念和半概念之间的关系,同时提出了构建OE-半概念和AE-半概念的算法。Qu等[18]首次在决策形式背景中引入了决策蕴涵概念,并将模糊集合理论纳入三支概念分析中,在模糊形式背景下研究了属性导出的模糊三支概念与对象导出的模糊三支概念,从而将三支概念研究扩展到模糊三支概念范畴。

在形式概念分析的研究中,规则提取是一个重要的方向。Li等[19]构建了一种知识约简的理论,该理论不仅适用于通用的决策形式背景,而且有利于揭示其中的蕴含规则。基于该理论,他们提出了从决策形式背景中导出所有非冗余决策规则的方法[20]。刘琳等[21]给出了属性导出三支概念格的协调形式背景和规则获取的方法,并探讨了所获规则与形式背景下获得规则的内在联系。刘美玉等[22]针对基于形式概念分析的关联规则提取方法侧重于属性之间的正关联而忽略了负关联的问题,提出了一种结合三支概念格的泛化和实例化结构的关联规则提取算法,可以有效地提取正负关联规则。Zhao等[23]则从广义的角度对三支半概念进行规则提取研究,进一步充实了三支概念格的规则提取方法。

形式背景(Formal Context, FC)为形式概念分析提供了对象和属性之间关系的框架,是进行概念分析的基础。完备决策背景下概念格的规则提取问题已得到了广泛研究。然而,由于现实世界中普遍存在的数据不完整性,使得不完备决策形式背景已成为概念格的规则提取、属性约简等问题研究的重要挑战。Li等[24]依托粗糙集理论,给出了不完备决策背景的近似概念格,并从肯定共同具有和可能共同具有的角度,探讨了近似决策规则的近似提取方法。刘琳等[2]对于非协调决策背景下提取的决策规则赋予置信度,从而使得在任意0-1型决策背景下都能够获得具有一定置信水平的决策规则。Li等[25]将三支概念应用在不完备形式背景中,通过两种模型构建了三支近似概念格,并分析了所构造格的属性特征及其约简问题。本文研究在不完备决策背景下,如何从对象导出三支概念格中提取规则的问题,得到了在乐观和悲观形式背景下的三支概念格及对应

的规则提取方法，并分析了提取到的规则之间的关系。

1 预备知识

在这一节中，我们将回顾一些相关知识，包括形式概念分析、三支概念分析以及概念格中规则提取的基本概念和性质。

1.1 形式概念分析

定义 1[8,10] 称三元组 (G,M,I) 为一个形式背景，其中 $G=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 为所有对象的集合，$M=\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$ 为所有属性的集合，I 是 G 和 M 之间的二元关系。对于任意的 $x\in G$ 和任意的 $a\in M$，若 xIa，表示对象 x 具有属性 a，或者属性 a 被对象 x 拥有，记为 $(x,a)\in I$。

定义 2[8,26] 设 (G,M,I) 为一个形式背景，对象子集 $X\subseteq G$，属性子集 $A\subseteq M$。一对正算子被定义为：

$*:P(G)\to P(M),X^*=\{a\in M|\forall x\in X,(x,a)\in I\}$;

$*:P(M)\to P(G),A^*=\{x\in G|\forall a\in A,(x,a)\in I\}$。

其中 $P(G)$ 和 $P(M)$ 分别表示为 G 和 M 的幂集。

定义 3[8] 对于形式背景 (G,M,I)，如果二元组 (X,A)，满足 $X^*=A$ 并且 $A^*=X$，则称 (X,A) 是一个概念。其中 X、A 分别称为 (X,A) 的外延和内涵。

形式背景 (G,M,I) 由正算子生成的全部概念由 $L(G,M,I)$ 表示，对于任意 $(X_1,A_1),(X_2,A_2)\in L(G,M,I)$，其偏序关系定义为：

$$(X_1,A_1)\leqslant(X_2,A_2)\Leftrightarrow X_1\subseteq X_2\Leftrightarrow A_1\supseteq A_2。$$

其下确界与上确界定义为：

$$(X_1,A_1)\wedge(X_2,A_2)=(X_1\cap X_2,(A_1\cup A_2)^{**}),\ (X_1,A_1)\vee(X_2,A_2)=((X_1\cup X_2)^{**},A_1\cap A_2)。$$

可以验证，$L(G,M,I)$ 为完备格，称为概念格。

性质 1[25-27] 设 (G,M,I) 为一个形式背景，对于任意的 $X,X_1,X_2\subseteq G,A,A_1,A_2\subseteq M$，可以得到以下结论：

(1) $X_1\subseteq X_2\Rightarrow X_2^*\subseteq X_1^*,A_1\subseteq A_2\Rightarrow A_2^*\subseteq A_1^*$;

(2) $X\subseteq X^{**},A^*\subseteq A^{**}$;

(3) $X=X^{***},A^*=A^{***}$;

(4) $X\subseteq A^*\Leftrightarrow A\subseteq X^*$;

(5) $(X_1\cup X_2)^*=X_1^*\cap X_2^*,(A_1\cup A_2)^*=A_1^*\cap A_2^*$;

(6) $(X_1\cap X_2)^*=X_1^*\cup X_2^*,(A_1\cap A_2)^*=A_1^*\cup A_2^*$。

1.2 三支概念分析

定义 4[11] 设 (G,M,I) 是一个形式背景，对于 $X\subseteq G,A\subseteq M$，定义一对负算子：

$$\bar{*}:P(G)\to P(M),X^{\bar{*}}=\{a\in M|\forall x\in X,\neg(xIa)\}=\{a\in M|\forall x\in X,xI^ca\};$$

$$\bar{*}:P(M)\to P(G),A^{\bar{*}}=\{x\in G|\forall a\in A,\neg(xIa)\}=\{x\in G|\forall a\in A,xI^ca\}。$$

其中 $I^c=(G\times M)-I$。

我们用 $NL(G,M,I)$ 表示在形式背景 (G,M,I) 下由负算子生成的所有概念的集合。同样，$NL(G,M,I)$ 在上述定义的偏序关系"$\leqslant$"下也是一个完备格。

定义 5[28] 设 (G,M,I) 是一个形式背景，$X,Y\subseteq G,A,B\subseteq M$，定义三支算子如下：

$$\lhd:P(G)\to DP(M),X^{\lhd}=(X^*,X^{\bar{*}});$$

$$\lhd:P(M)\to DP(G),A^{\lhd}=(A^*,A^{\bar{*}})。$$

三支算子的逆运算被定义为：

$$\rhd:DP(M)\to P(G),(A,B)^{\rhd}=\{x\in G|x\in A^*,x\in B^{\bar{*}}\}=A^*\cap B^{\bar{*}};$$

$$\rhd:DP(G)\to P(M),(X,Y)^{\rhd}=\{a\in M|a\in X^*,a\in Y^{\bar{*}}\}=X^*\cap Y^{\bar{*}}。$$

其中 $P(G)$ 和 $P(M)$ 分别表示 G 和 M 的幂集，$DP(G)$ 和 $DP(M)$ 分别表示 $P(G)\times P(G)$ 和 $P(M)\times P(M)$。

定义 6[28] 形式背景 (G,M,I) 下，$X\subseteq G,A,B\subseteq M$，若满足 $X^{\lhd}=(A,B)$ 并且 $(A,B)^{\rhd}=X$，则称 $(X,(A,B))$ 为由对象导出的三支概念（简称 OE-概念）。X 称为 OE-概念的外延，(A,B) 称为 OE-概念的内涵。

对于任意的 OE-概念 $(X,(A,B)),(Y,(C,D))$，其偏序关系被定义为：

$$(X,(A,B))\leqslant(Y,(C,D))\Leftrightarrow X\subseteq Y\Leftrightarrow(A,B)\supseteq(C,D)。$$

所有 OE-概念的集合记为 $OEL(G,M,I)$。$OEL(G,M,I)$ 在偏序关系"$\leqslant$"下是一个完备格，称之为由对象导出的三支概念格。

其下、上确界为：

$$(X,(A,B))\wedge(Y,(C,D))=$$
$$(X\cap Y,((A,B)\cup(C,D))^{\rhd\lhd}),$$
$$(X,(A,B))\vee(Y,(C,D))=$$
$$((X\cup Y)^{\lhd\rhd},((A,B)\cap(C,D)))。$$

1.3 概念格的规则提取

定义 7[29] 设 $L(G,M,I)$ 和 $L(G,N,J)$ 是两个概念格,若对于任意 $(X,A)\in L(G,N,J)$,存在 $(Y,B)\in L(G,M,I)$,使得 $X=Y$,则称 $L(G,M,I)$ 细于 $L(G,N,J)$。记作 $L(G,M,I)\leqslant L(G,N,J)$。

定义 8[29] 设 (G,M,I) 和 (G,N,J) 是两个形式背景,则称 (G,M,I,N,J) 是一个决策形式背景。若 $L(G,M,I)\leqslant L(G,N,J)$,称该决策形式背景是协调的。

定义 9[29] 设 $L(G,M,I)\leqslant L(G,N,J)$,若对于 $X,Y\subseteq G$,$(X,A)\in L(G,M,I)$,$(Y,B)\in L(G,N,J)(Y\neq\varnothing,U$,且$B\neq\varnothing)$,满足 $X\subseteq Y$,则称 $A\to B$ 是一个决策规则,记作 if A, then B,其中 X、Y 分别为概念 (X,A) 和 (Y,B) 的外延。

2 不完备决策背景下的规则提取

本节我们将探讨不完备形式背景下的规则提取问题。在给出不完备形式背景的乐观型和悲观型刻画的基础上,提取不完备形式背景下的决策规则。

2.1 不完备形式背景

定义 10[30-31] 称 $(G,M,\{+,?,-\},I)$ 为一个不完备形式背景,其中 $G=\{g_1,g_2,\cdots,g_p\}$ 是所有对象的集合,$M=\{m_1,m_2,\cdots,m_q\}$ 是所有属性的集合,I 是一个三元关系:$I\subseteq G\times M\times\{+,?,-\}$。如果 $(g,m,+)\in I$,则表示对象 g 具有属性 m;如果 $(g,m,-)\in I$,则表示对象 g 不具有属性 m;如果 $(g,m,?)\in I$,则表示未知对象 g 是否具有属性 m。

定义 11[24] 称六元组 $(G,C,I,\{+,?,-\},D,J)$ 为一个不完备决策背景,$(G,C,\{+,?,-\},I)$ 和 $(G,D,\{+,?,-\},J)$ 至少有一个是不完备形式背景,且 $C\cap D=\varnothing$,其中 C 为条件属性集,D 为决策属性集。$(G,C,\{+,?,-\},I)$ 和 $(G,D,\{+,?,-\},J)$ 分别称为不完备决策背景 $(G,C,I,\{+,?,-\},D,J)$ 的条件子背景和决策子背景,它们的 OE-概念格分别称为 OE-条件概念格和 OE-决策概念格,记作 $OEL(G,C,\{+,?,-\},I)$ 和 $OEL(G,D,\{+,?,-\},J)$,简记为 OEL_C 和 OEL_D。进一步,如果 $OEL_C\leqslant OEL_D$,则称 $(G,C,I,\{+,?,-\},D,J)$ 为 OE-协调的不完备决策背景。

定义 12[32] 设不完备决策背景 $(G,C,I,\{+,?,-\},D,J)$ 是 OE-协调的。若对于 $(X,(A,B))\in OEL_C(A,B\neq\varnothing)$,存在 $(Y,(E,F))\in OEL_D(Y\neq\varnothing,G$且$E,F\neq\varnothing)$,使得 $X\subseteq Y$,则称 $A\to E$ 为对象导出三支正规则(简称 OE-P 规则),记作 if A, then E。所有 OE-P 规则的集合表示为 OE-PR。同时,称 not $B\to$ not F 为对象导出三支负规则(简称 OE-N 规则),记作 if not B, then not F。所有 OE-N 规则的集合表示为 OE-NR。

定义 13[32-33] 设 $(G,C,I,\{+,?,-\},D,J)$ 是一个不完备决策背景,$(G,C,\{+,+,-\},I)\leqslant(G,D,\{+,+,-\},J)$,$A\to B$ 与 $A'\to B'$ 是两个 OE-P 规则,若 $A\subseteq A'$ 且 $B'\subseteq B$,则称规则 $A\to B$ 蕴含 $A'\to B'$,并称 $A'\to B'$ 是冗余的。对于 OE-N 规则 not C $\to$ not D 与 not $C'\to$ not D',若 $C\subseteq C'$ 且 $D\subseteq D'$,则称 not C $\to$ not D 蕴含 not $C'\to$ not D',并称 not $C'\to$ not D' 是冗余的。

下面我们用例 1 来展示在不完备的决策背景下如何利用对象导出三支概念格来提取决策规则。

例 1 表 1 给出了一不完备决策背景 $(G,C,I,\{+,?,-\},D,J)$[32],其中,对象集 $G=\{1,2,3,4\}$,条件属性集 $C=\{a,b,c,d,e,f\}$,决策属性集 $D=\{g,h,i,j\}$。由表 1 可知 $(G,C,\{+,?,-\},I)$ 和 $(G,D,\{+,?,-\},J)$ 均为不完备形式背景。图 1 和图 2 分别表示 $(G,C,I,\{+,?,-\},D,J)$ 的 OE-条件概念格 OEL_C 和 OE-决策概念格 OEL_D,容易判断 $OEL_C\leqslant OEL_D$,所以 $(G,C,I,\{+,?,-\},D,J)$ 是 OE-协调的。根据上述定义,可得对象导出的三支规则集(表 2 所示),非冗余的对象导出三支规则集(表 3 所示)。

2.2 乐观型形式背景

定义 14 设 $(G,M,\{+,?,-\},I)$ 为一个不完备形式背景。$X\subseteq G$,$A\subseteq M$,定义 $*'$ 算子

表1 不完备决策背景$(G,C,I,\{+,?,-\},D,J)$

Table 1 An incomplete formal decision context $(G,C,I,\{+,?,-\},D,J)$

<table>
<tr><th>对象</th><th>a</th><th>b</th><th>c</th><th>d</th><th>e</th><th>f</th><th>g</th><th>h</th><th>i</th><th>j</th></tr>
<tr><td rowspan="2">1</td><td rowspan="2">+</td><td></td><td rowspan="2">+</td><td rowspan="2">−</td><td rowspan="2">−</td><td rowspan="2">+</td><td rowspan="2">−</td><td></td><td rowspan="2">+</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">−</td><td rowspan="2">+</td><td rowspan="2">−</td></tr>
<tr><td rowspan="2">2</td><td rowspan="2">−</td><td rowspan="2">−</td><td rowspan="2">+</td><td rowspan="2">+</td><td rowspan="2">+</td><td rowspan="2">−</td><td rowspan="2">+</td></tr>
<tr><td rowspan="2">?</td><td rowspan="2">?</td><td rowspan="2">+</td></tr>
<tr><td rowspan="2">3</td><td rowspan="2">+</td><td rowspan="2">+</td><td rowspan="2">−</td><td rowspan="2">+</td><td rowspan="2">+</td><td rowspan="2">−</td><td rowspan="2">+</td></tr>
<tr><td rowspan="2">−</td><td rowspan="2">−</td><td rowspan="2">?</td></tr>
<tr><td rowspan="2">4</td><td rowspan="2">−</td><td rowspan="2">?</td><td rowspan="2">+</td><td rowspan="2">+</td><td rowspan="2">−</td><td rowspan="2">+</td><td rowspan="2">−</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

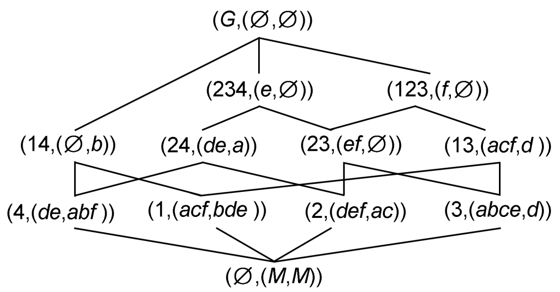

图1 OE-条件概念格$OEL_C(G,C,I)$

Fig. 1 OE conditional concept lattice $OEL_C(G,C,I)$

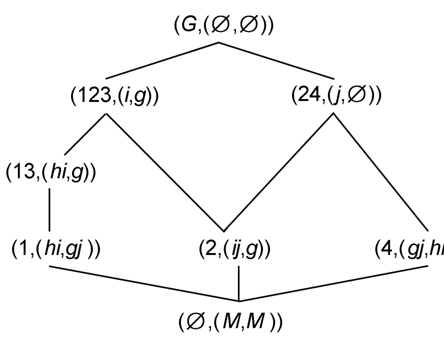

图2 OE-决策概念格$OEL_D(G,D,J)$

Fig. 2 OE decision concept lattice $OEL_D(G,D,J)$

表2 对象导出的三支规则集

Table 2 The object-induced three-way rules

正规则		负规则
$f\to i$	$de\to j$	not $d\to$ not g
$ef\to i$	$def\to j$	not $bde\to$ not g
$def\to i$	$acf\to hi$	not $ac\to$ not g
$acf\to i$	$abcef\to hi$	not $bde\to$ not gj
$abcef\to i$	$def\to ij$	not $abf\to$ not hi
	$de\to gj$	

(正算子)为:

$X^{*'}=\{m\in M|\forall g\in X,(g,m,+)\in I\vee(g,m,?)\in I\}$,

$A^{*'}=\{g\in G|\forall m\in A,(g,m,+)\in I\vee(g,m,?)\in I\}$。

$\bar{*}'$算子(负算子)为:

$X^{\bar{*}'}=\{m\in M|\forall g\in X,(g,m,-)\in I\}$,

$A^{\bar{*}'}=\{g\in G|\forall m\in A,(g,m,-)\in I\}$。

表3 对象导出的非冗余三支规则集

Table 3 The irredundant object-induced three-way rules

正规则	负规则
$f\to i$	not $d\to$ not g
$de\to j$	not $ac\to$ not g
$de\to gj$	not $bde\to$ not gj
$acf\to hi$	not $abf\to$ not hi
$def\to ij$	

定义15 称$(G,M,\{+,+,-\},I)$为一个乐观型形式背景,其中$G=\{g_1,g_2,\cdots,g_p\}$是所有对象的集合,$M=\{m_1,m_2,\cdots,m_q\}$是所有属性的集合,I是一个三元关系,$I\subseteq G\times M\times\{+,+,-\}$。若$(g,m,+)\in I$,则代表对象$g$拥有属性$m$;$(g,m,-)\in I$,则代表对象$g$不拥有属性$m$。

定义16 设$(G,M,\{+,+,-\},I)$为乐观型形式背景。对于任意的$X,Y\in P(G)$,$A,B\in P(M)$,其中$P(U)$表示U的幂集,$DP(U)$表示$P(U)\times P(U)$,乐观型的三支算子定义为:

$\lhd':P(G)\to DP(M),X^{\lhd'}=(X^{*'},X^{\bar{*}'})$,

$\lhd':P(M)\to DP(G),A^{\lhd'}=(A^{*'},A^{\bar{*}'})$。

其逆算子定义如下:

$\rhd':DP(G)\to P(M),(X,Y)^{\rhd'}=X^{*'}\cap Y^{\bar{*}'}$,

$\rhd':DP(M)\to P(G),(A,B)^{\rhd'}=A^{*'}\cap B^{\bar{*}'}$。

与性质1类似,我们可得乐观型的三支算子的如下性质。

性质2 设$(G,M,\{+,+,-\},I)$为乐观型形式背景。对于任意的$X,X_1,X_2\in P(G)$,$A,A_1,A_2\in P(M)$,有:

(1) $X_1\subseteq X_2\Rightarrow X_1^{\lhd'}\sqsupseteq X_2^{\lhd'}$,$A_1\subseteq A_2\Rightarrow A_1^{\rhd'}\sqsupseteq A_2^{\rhd'}$;

(2) $X\subseteq X^{\lhd'\rhd'}$,$A\subseteq A^{\rhd'\lhd'}$;

(3) $X^{\lhd'}=X^{\lhd'\rhd'\lhd'}$,$A^{\rhd'}=A^{\rhd'\lhd'\rhd'}$;

(4) $X\subseteq A^{\rhd'}\Leftrightarrow A\subseteq X^{\lhd'}$,$X\subseteq A^{\rhd'}\Leftrightarrow A\subseteq X^{\lhd'}$;

(5) $(X_1\cup X_2)^{\lhd'}=X_1^{\lhd'}\cap X_2^{\lhd'}$,
$(A_1\cup A_2)^{\rhd'}=A_1^{\rhd'}\cap A_2^{\rhd'}$;

(6) $(X_1\cap X_2)^{\lhd'}=X_1^{\lhd'}\cup X_2^{\lhd'}$,
$(A_1\cap A_2)^{\rhd'}=A_1^{\rhd'}\cup A_2^{\rhd'}$。

2.3 乐观型决策背景下的规则提取

定义17 设$(G,M,\{+,+,-\},I)$是一个乐观型形式背景。$X\subseteq G$,$A,B\subseteq M$,若$X^{\lhd'}=(A,B)$和$(A,B)^{\rhd'}=X$同时满足,则称$(X,(A,B))$为乐观型对象导出的三支概念(简称乐观型OE-概念),X、(A,B)分别称为乐观

型 OE-概念的外延和内涵。

对于任意的乐观型 OE-概念 $(X,(A,B))$, $(Y,(C,D))$,定义其偏序关系如下:

$$(X,(A,B))\leqslant(Y,(C,D))\Leftrightarrow X\subseteq Y\Leftrightarrow (A,B)\supseteq(C,D)。$$

乐观型形式背景 $(G,M,\{+,+,-\},I)$ 下的所有乐观型 OE-概念在该偏序关系下是完备格,称之为乐观型对象导出的三支概念格,记为 $OOEL(G,M,I)$。

其下确界和上确界为:

$$(X,(A,B))\wedge(Y,(C,D))= (X\cap Y,((A,B)\cup(C,D))^{\triangleright\prime\triangleleft\prime}),$$
$$(X,(A,B))\vee(Y,(C,D))= ((X\cup Y)^{\triangleleft\prime\triangleright\prime},((A,B)\cap(C,D)))。$$

定义 18 设 $(G,M,\{+,+,-\},I)$ 和 $(G,N,\{+,+,-\},J)$ 是两个乐观型的形式背景,如果对于任意

$(X,(A,B))\in OOEL(G,N,\{+,+,-\},J)$,

存在 $(Y,(C,D))\in OOEL(G,M,\{+,+,-\},I)$,使得 $X=Y$, 则称 $OOEL(G,M,\{+,+,-\},I)$ 细于 $OOEL(G,N,\{+,+,-\},J)$,记作

$$OOEL(G,M,\{+,+,-\},I)\leqslant OOEL(G,N,\{+,+,-\},J)。$$

定义 19 设 $(G,C,I,\{+,+,-\},D,J)$ 是一个乐观型决策背景,若 $OOEL(G,C,\{+,+,-\},I)\leqslant OOEL(G,D,\{+,+,-\},J)$, 则称决策背景 $(G,C,I,\{+,+,-\},D,J)$ 是协调的。

基于乐观型决策形式背景的协调性,我们就可以给出该背景下的决策规则,并讨论所得规则的冗余性。

定义 20 设 $(G,C,I,\{+,+,-\},D,J)$ 是一个乐观型决策背景,

$$OOEL(G,C,\{+,+,-\},I)\leqslant OOEL(G,D,\{+,+,-\},J)。$$

对于 $(X,(A,B))\in OOEL(G,C,\{+,+,-\},I)$, $(Y,(E,F))\in OOEL(G,D,\{+,+,-\},J)$ $(Y\neq\varnothing, U 且 E,F\neq\varnothing)$,

满足 $X\subseteq Y$, 则称 $A\rightarrow E$ 为决策背景 OE-协调下的乐观型对象导出三支正规则(简称 OOE-P 规则),记作 if A, then E。所有 OOE-P 规则的集合表示为 OOE-PR。同时,称 not $B\rightarrow$ not F 是决策背景 OE-协调下的乐观型对象导出三支负规则(简称 OOE-N 规则),记作 if not B, then not F,所有 OOE-N 规则的集合表示为 OOE-NR。

定义 21 设 $(G,C,I,\{+,+,-\},D,J)$ 是一个乐观型决策背景,$OOEL(G,C,\{+,+,-\},I)\leqslant OOEL(G,D,\{+,+,-\},J)$, $A\rightarrow B$ 和 $A'\rightarrow B'$ 是两个 $OOE-P$ 规则,若 $A\subseteq A'$ 且 $B'\subseteq B$, 则称规则 $A\rightarrow B$ 蕴含 $A'\rightarrow B'$, 并称 $A'\rightarrow B'$ 是冗余的。对于 OOE-N 规则的 not $C\rightarrow$ not D 与 not $C'\rightarrow$ not D', 若满足 $C\subseteq C'$ 且 $D\subseteq D'$, 则称 not $C\rightarrow$ not D 蕴含 not $C'\rightarrow$ not D',并称 not $C'\rightarrow$ not D' 是冗余的。

例 2 展示了在乐观型的决策背景下对象导出三支概念格的决策规则提取。

例 2(续例 1) 不完备形式背景 $(G,C,I,\{+,?,-\},D,J)$ 所对应的乐观型决策背景如表 4 所示,相应的对象导出的条件概念格和决策概念格分别如图 3—4 所示。易得 $OOEL(G,C,\{+,+,-\},I)\leqslant OOEL(G,D,\{+,+,-\},J)$, 故背景是 OE-协调的。根据上述定义,可得乐观型对象导出的三支规则集(表 5 所示)和乐观型非冗余的对象导出三支规则集(表 6 所示)。

表 4 乐观型决策背景 $(G,M,\{+,+,-\},I)$

Table 4 Optimism formal decision context $(G,M,\{+,+,-\},I)$

对象	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
1	+	−	+	−	−	+	−	+	+	−
2	−	+	−	+	+	+	−	+	+	+
3	+	+	+	−	+	+	−	+	+	+
4	−	−	+	+	+	−	+	−	−	+

和 2.2 节类似,接下来讨论在悲观型决策背景下对象导出三支概念格及其规则提取。

2.4 悲观型形式背景

定义 22 设 $(G,M,\{+,?,-\},I)$ 为一个不完备形式背景。$X\subseteq G$, $A\subseteq M$,定义 $*''$ 算子(正算子)为:

$$X^{*''}=\{m\in M|\forall g\in X,(g,m,+)\in I\},$$
$$A^{*''}=\{g\in G|\forall m\in A,(g,m,+)\in I\}。$$

$\bar{*}''$ 算子(负算子)为:

$$X^{\bar{*}''}=\{m\in M|\forall g\in X,(g,m,-)\in I\vee(g,m,?)\in I\},$$
$$A^{\bar{*}''}=\{g\in G|\forall m\in A,(g,m,-)\in I\vee(g,m,?)\in I\}。$$

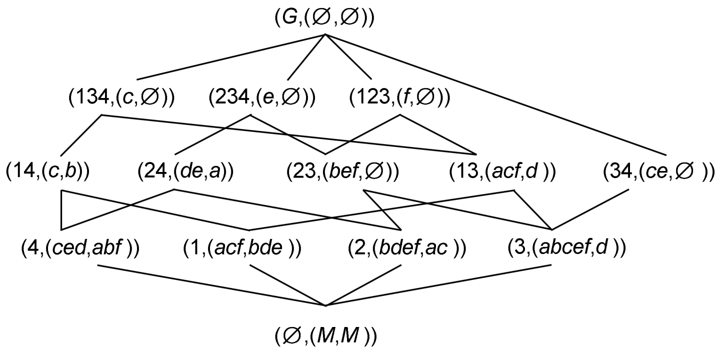

图3 乐观型 OE-条件概念格 $OOEL_C(G,C,I)$

Fig. 3 Optimistic OE-conditional concept lattice $OOEL_C(G,C,I)$

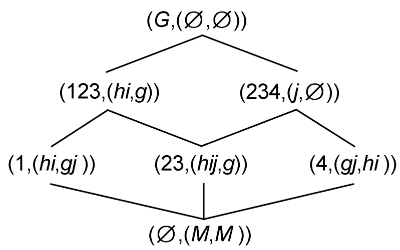

图4 乐观型 OE-决策概念格 $OOEL_D(G,D,J)$

Fig. 4 Optimistic OE-decision concept lattice $OOEL_D(G,D,J)$

表5 乐观型对象导出的三支规则集

Table 5 The optimism object-induced three-way rules

正规则			负规则
$f\to hi$	$e\to j$	$bef\to hij$	not $d\to$ not g
$acf\to hi$	$ce\to j$	$bdef\to hij$	not $bde\to$ not g
$bef\to hi$	$de\to j$	$abcef\to hij$	not $ac\to$ not g
$bdef\to hi$	$bef\to j$	$cde\to gj$	not $bde\to$ not gj
$abcef\to hi$	$cde\to j$		not $abf\to$ not hi
$abcef\to j$	$bdef\to j$		

表6 乐观型对象导出的非冗余三支规则集

Table 6 The irredundant optimism object-induced three-way rules

正规则	负规则
$e\to j$	not $d\to$ not g
$cde\to gj$	not $ac\to$ not g
$f\to hi$	not $bde\to$ not gj
$bef\to hij$	not $abf\to$ not hi

定义23 悲观型形式背景$(G,M,\{+,-,-\},I)$，其中$G=\{g_1,g_2,\cdots,g_p\}$是所有对象的集合，$M=\{m_1,m_2,\cdots,m_q\}$是所有属性的集合，I是一个三元关系，$I\subseteq G\times M\times\{+,-,-\}$。如果$(g,m,+)\in I$，则代表对象$g$被赋予属性$m$；如果$(g,m,-)\in I$，则代表对象$g$不具备属性$m$。

定义24 设$(G,M,\{+,-,-\},I)$为悲观型形式背景。对于任意的$X,Y\in P(G)$，$A,B\in P(M)$，其中$P(U)$表示U的幂集，$DP(U)$表示$P(U)\times P(U)$，悲观型的三支算子定义为：

$$\lhd'':P(G)\to DP(M),\ X^{\lhd''}=(X^{*''},X^{\bar{*}''}),$$

$$\lhd'':P(M)\to DP(G),\ A^{\lhd''}=(A^{*''},A^{\bar{*}''})。$$

其逆算子定义如下：

$$\rhd'':DP(G)\to P(M),\ (X,Y)^{\rhd''}=X^{*''}\cap Y^{\bar{*}''},$$

$$\rhd'':DP(M)\to P(G),\ (A,B)^{\triangledown''}=A^{*''}\cap B^{\bar{*}''}。$$

与性质1类似，我们可得悲观型的三支算子的如下性质。

性质3 设$(G,M,\{+,-,-\},I)$为悲观型形式背景。对于任意的$X,X_1,X_2\in P(G)$，$A,A_1,A_2\in P(M)$，有：

(1) $X_1\subseteq X_2\Rightarrow X_1^{\lhd''}\supseteq X_2^{\lhd''}$，$A_1\subseteq A_2\Rightarrow A_1^{\rhd''}\supseteq A_2^{\rhd''}$；

(2) $X\subseteq X^{\lhd''\rhd''}$，$A\subseteq A^{\rhd''\lhd''}$；

(3) $X^{\lhd''}=X^{\lhd''\rhd''\lhd''}$，$A^{\rhd''}=A^{\rhd''\lhd''\rhd''}$；

(4) $X\subseteq A^{\rhd''}\Leftrightarrow A\subseteq X^{\lhd''}$；

(5) $(X_1\cup X_2)^{\lhd''}=X_1^{\lhd''}\cap X_2^{\lhd''}$，
$(A_1\cup A_2)^{\rhd''}=A_1^{\rhd''}\cap A_2^{\rhd''}$；

(6) $(X_1\cap X_2)^{\lhd''}=X_1^{\lhd''}\cup X_2^{\lhd''}$，
$(A_1\cap A_2)^{\rhd''}=A_1^{\rhd''}\cup A_2^{\rhd''}$。

2.5 悲观型决策背景下的规则提取

定义25 给定悲观型形式背景$(G,M,\{+,-,-\},I)$，$(X,(A,B))$称为悲观型对象导出的三支概念（简称悲观型OE-概念），满足$X^{\lhd''}=(A,B)$，$(A,B)^{\rhd''}=X$，其中$X\subseteq G$，$A,B\subseteq M$。X称为悲观型OE-概念的外延，(A,B)称为悲观型OE-概念的内涵。

对于任意的悲观型OE-概念$(X,(A,B))$，$(Y,(C,,D))$，定义其偏序关系"$\leqslant$"如下：

$$(X,(A,B))\leqslant(Y,(C,D))\Leftrightarrow X\subseteq Y\Leftrightarrow (A,B)\supseteq(C,D)。$$

悲观型形式背景$(G,M,\{+,-,-\},I)$下生成的所有悲观型OE-概念的集合记为$POEL(G,M,I)$,其在上述定义的"$\leqslant$"下是一个完备格,称之为悲观型对象导出的三支概念格。

其下确界、上确界分别为:

$$(X,(A,B))\wedge(Y,(C,D))= (X\cap Y,((A,B)\cup(C,D))^{\lhd''\rhd''}),$$

$$(X,(A,B))\vee(Y,(C,D))= ((X\cup Y)^{\rhd''\lhd''},((A,B)\cap(C,D)))。$$

定义26 设$POEL(G,M,\{+,-,-\},I)$和$POEL(G,N,\{+,-,-\},J)$是两个悲观型的OE-概念格,如果对于任意

$$(X,(A,B))\in POEL(G,N,\{+,-,-\},J),$$

总存在$(Y,(C,D))\in POEL(G,M,\{+,-,-\},I)$,使得$X=Y$,则称$POEL(G,M,\{+,-,-\},I)$细于$POEL(G,N,\{+,-,-\},J)$,记作

$$POEL(G,M,\{+,-,-\},I)\leqslant POEL(G,N,\{+,-,-\},J)。$$

定义27 设$(G,C,I,\{+,-,-\},D,J)$是一个悲观型决策背景,若

$$POEL(G,C,\{+,-,-\},I)\leqslant POEL(G,D,\{+,-,-\},J),$$

则称决策背景$(G,C,I,\{+,-,-\},D,J)$是协调的。

与乐观型决策背景类似,下面我们基于悲观型决策背景的协调性,讨论悲观型对象导出的决策规则及其冗余性问题。

定义28 设$(G,C,I,\{+,-,-\},D,J)$是一个悲观型决策背景,$POEL(G,C,\{+,-,-\},I)\leqslant POEL(G,D,\{+,-,-\},J)$。对于

$$(X,(A,B))\in POEL(G,C,\{+,-,-\},I),$$

$$(Y,(E,F))\in POEL(G,D,\{+,-,-\},J)$$

$$(Y\neq\varnothing,\ U且E,F\neq\varnothing),$$

满足$X\subseteq Y$,则称$A\rightarrow E$,为决策背景OE-协调下的悲观型对象导出三支正规则(简称POE-P规则),记作if A, then E,所有POE-P规则的集合表示为POE-PR。同时,称not $B\rightarrow$ not F是决策背景OE-协调下的悲观型对象导出三支负规则(简称POE-N规则),记作if not B, then not F,所有POE-N规则的集合表示为POE-NR。

定义29 设$(G,C,I,\{+,-,-\},D,J)$是一个悲观型决策背景,$POEL(G,C,\{+,-,-\},I)\leqslant POEL(G,D,\{+,-,-\},J)$,$A\rightarrow B$和$A'\rightarrow B'$是两个POE-P规则,若$A\subseteq A'$且$B'\subseteq B$,则称规则$A\rightarrow B$蕴含$A'\rightarrow B'$,并称$A'\rightarrow B'$是冗余的。对于POE-N规则的not C$\rightarrow$ not D与not $C'\rightarrow$ not D',若满足$C\subseteq C'$且$D\subseteq D'$,则称not C$\rightarrow$ not D蕴含not $C'\rightarrow$ not D',并称not $C'\rightarrow$ not D'是冗余的。

下面我们通过例3来展示在悲观型的决策背景下对象导出三支概念格及其决策规则的提取。

例3(续例1) 不完备形式背景$(G,C,I,\{+,?,-\},D,J)$所对应的悲观型决策背景如表7所示,相应的对象导出的条件概念格由图5所示,图6为决策概念格。易得

$$POEL(G,C,\{+,-,-\},I)\leqslant POEL(G,D,\{+,-,-\},J),$$

故背景是OE-协调的。根据上述定义,可得悲观型对象导出的三支规则集(表8所示),悲观型非冗余的对象导出三支规则集(表9所示)。

表7 悲观型决策背景$(G,M,\{+,-,-\},I)$

Table 7 Pessimistic formal decision context $(G,M,\{+,-,-\},I)$

对象	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
1	+	−	+	−	−	+	−	+	+	−
2	−	−	−	+	+	+	−	−	+	+
3	+	+	+	−	+	+	−	+	+	−
4	−	−	−	+	+	−	+	−	−	+

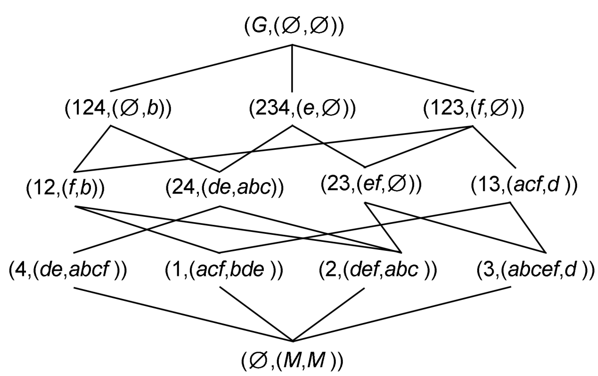

图5 悲观型OE-条件概念格$POEL_C(G,C,I)$

Fig 5 Pessimistic OE-conditional concept lattice $POEL_C(G,C,I)$

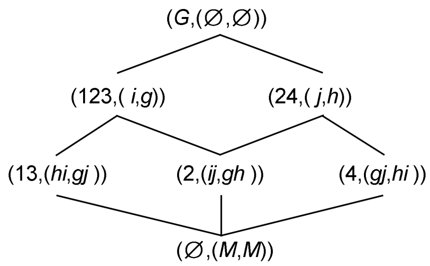

图6 悲观型 OE-决策概念格 $POEL_D(G,C,I)$

Fig 6 Pessimistic OE-decision concept lattice $POEL_D(G,C,I)$

表8 悲观型对象导出的三支规则集

Table 8 The pessimistic object-induced three-way rules

正规则		负规则	
$f\to i$	$de\to j$	not $d\to$ not g	not $abcf\to$ not h
$ef\to i$	$def\to j$	not $b\to$ not g	not $d\to$ not gj
$def\to i$	$acf\to hi$	not $abc\to$ not g	not $bde\to$ not gj
$acf\to i$	$abcef\to hi$	not $bde\to$ not g	not $abc\to$ not gh
$abcef\to i$	$def\to ij$	not $abc\to$ not h	not $abcf\to$ not hi
	$de\to gj$		

表9 悲观型对象导出的非冗余三支规则集

Table 9 The irredundant pessimistic object-induced three-way rules

正规则	负规则
$f\to i$	not $b\to$ not g
$de\to j$	not $d\to$ not g
$de\to gj$	not $d\to$ not gj
$acf\to hi$	not $abc\to$ not h
$def\to ij$	not $abc\to$ not gh
	not $abcf\to$ not hi

3 不完备决策背景下的对象导出三支概念格规则提取之间的关系

在相同的不完备决策背景下，我们分别构建了基于对象导出的三支概念格、乐观型对象导出的三支概念格及悲观型对象导出的三支概念格，并对应地提取了各自的规则集。这些不同背景下提取的规则集之间存在一定的内在联系。

命题1 设 $(G,C,I,\{+,?,-\},D,J)$ 为一个不完备决策背景，则下列结论成立：

(1) $X^*\subseteq X^{*\prime}$，

(2) $X^{\bar{*}}\subseteq X^{\bar{*}''}$。

证明 根据定义4、定义13、定义20，易证。

定理1 设 $(G,C,I,\{+,?,-\},D,J)$ 为一个不完备决策背景，则下列结论成立：

(1) $OEL_{D_E}\supseteq POEL_{D_E}$，

(2) $OEL_{C_E}\supseteq OOEL_{C_E}$。

其中 $OEL_{D_E}, POEL_{D_E}, OEL_{C_E}, OOEL_{C_E}$ 分别是 OEL_D，$POEL_D, OEL_C, OOEL_C$ 的外延。

证明 (1)对于 $OEL_{D_E}\supseteq POEL_{D_E}$，本文使用反证法，假设 $OEL_{D_E}\subset POEL_{D_E}$，对于 $\forall(X,(B,C))\in OEL_D$，则有 $(B,C)^{\rhd}=B^*\cap C^{\bar{*}}=X$，$X^*=B$，$X^{\bar{*}}=C$。根据定义21和 $OEL_{D_E}\subset POEL_{D_E}$，我们有 $X^{\lhd''}=(B,E)$，而 $(B,E)^{\rhd''}=B^*\cap E^{\bar{*}''}$，根据命题1(2)，$(B,E)^{\rhd''}=B^*\cap E^{\bar{*}''}\supseteq X$，所以 $OEL_{D_E}\subset POEL_{D_E}$ 不成立，故 $OEL_{D_E}\supseteq POEL_{D_E}$。

(2)对于 $OEL_{C_E}\supseteq OOEL_{C_E}$，本文使用反证法，假设 $OEL_{C_E}\subset OOEL_{C_E}$。对于 $\forall(X,(B,C))\in OEL_C$，则有 $(B,C)^{\rhd}=B^*\cap C^{\bar{*}}=X$，$X^*=B$，$X^{\bar{*}}=C$。根据定义15和 $OEL_{C_E}\subset OOEL_{C_E}$，有 $X^{\rhd'}=(E,C)$，$(E,C)^{\lhd'}=E^{*\prime}\cap C^{\bar{*}}$，根据命题1(1)，$(E,C)^{\lhd'}=E^{*\prime}\cap C^{\bar{*}}\supseteq X$，所以 $OEL_{C_E}\subset OOEL_{C_E}$ 不成立，故 $OEL_{C_E}\supseteq OOEL_{C_E}$。

定理2 设 $(G,C,I,\{+,?,-\},D,J)$ 为一个不完备决策背景，OEL_D 是不完备形式背景上的 OE-决策近似概念格，$POEL_D$ 是悲观型形式背景上的 OE-决策概念格，则 $OEL_D\leqslant POEL_D$。

证明 根据定义7和定理1，易证。

定理3 设 $(G,C,I,\{+,?,-\},D,J)$ 为一个不完备决策背景，OEL_C 是不完备形式背景上的 OE-条件近似概念格，$OOEL_C$ 是乐观型形式背景上的 OE-条件概念格，则

$$OEL_C\leqslant OOEL_C。$$

证明 根据定义7和定理1，易证。

定理4 设不完备决策背景 $(G,C,I,\{+,?,-\},D,J)$ 是 OE-协调的，则规则集 $OE\text{-}PR=POE\text{-}PR$，$OE\text{-}NR=OOE\text{-}NR$。

证明 先证 $OE\text{-}PR\subseteq POE\text{-}PR$，对于 $\forall A\to B\in OE\text{-}PR$，则存在 $(X,(A^*,A^{\bar{*}}))\in OEL(G,C,\{+,?,-\},I)$，$(Y,(B^*,B^{\bar{*}}))\in OEL(G,D,\{+,?,-\},J)$，满足 $X\subseteq Y$。根据定义14和定义15，$(X,(A^{*\prime},A^{\bar{*}}))\in OOEL(G,C,\{+,+,-\},I)$，$(Y,(B^{*\prime},B^{\bar{*}}))\in OOEL(G,D,\{+,+,-\},J)$，

则 $A\rightarrow B\in POE\text{-}PR$。再证 $OE\text{-}PR\supseteq POE\text{-}PR$，$\forall A\rightarrow B\in POE\text{-}PR$，则存在 $(X,(A^{*\prime},A^{\bar{*}}))\in OOEL(G,C,\{+,+,-\},I)$，$(Y,(B^{*\prime},B^{\bar{*}}))\in OOEL(G,D,\{+,+,-\},J)$，满足 $X\subseteq Y$。根据定义15，$(X,(A^{*},A^{\bar{*}}))\in OOEL(G,C,\{+,?,-\},I)$，$(Y,(B^{*},B^{\bar{*}}))\in OEL(G,D,\{+,?,-\},J)$，则 $A\rightarrow B\in OE\text{-}PR$。所以 $OE\text{-}PR=POE\text{-}PR$。对于 $OE\text{-}NR=OOE\text{-}NR$，证明过程同上。

定理5　设 $(G,C,I,\{+,?,-\},D,J)$ 是一个不完备决策背景，$OOEL(G,C,\{+,+,-\},I)\leqslant OOEL(G,D,\{+,+,-\}\ J)$，则任意 $A\rightarrow B\in OE\text{-}PR$，存在 $C\rightarrow B\in OOE\text{-}PR$，则 $A\subseteq C$。

证明　对于 $\forall A\rightarrow B\in OE\text{-}PR$，则

$(X,(A^{*},A^{\bar{*}}))\in OEL(G,C,\{+,?,-\},I)$，

$(Y,(B^{*},B^{\bar{*}}))\in OEL(G,D,\{+,?,-\},J)$，

满足 $X\subseteq Y$。因为 $(Y,(B^{*},B^{\bar{*}}))\in OEL(G,D,\{+,?,-\},J)$，所以 $(Y,(B^{*\prime},B^{\bar{*}}))\in OOEL(G,D,\{+,+,-\},J)$，又 $OOEL(G,C,\{+,+,-\},I)\leqslant OOEL(G,D,\{+,+,-\},J)$，所以必存在 $(Y,(C^{*\prime},C^{\bar{*}}))\in OOEL(G,C,\{+,+,-\},J)$，使得 $C\rightarrow B\in OOE\text{-}PR$。对于 $(X,(A^{*},A^{\bar{*}}))\in OEL(G,C,\{+,?,-\},I)$ 和 $(Y,(C^{*\prime},C^{\bar{*}}))\in OOEL(G,C,\{+,+,-\},J)$，又 $X\subseteq Y$，所以 $(C^{*\prime},C^{\bar{*}})\subseteq(A^{*},A^{\bar{*}})$，根据偏序关系，$A\subseteq C$ 成立。

推论1　设 $(G,C,I,\{+,?,-\},D,J)$ 是一个不完备决策背景，$OOEL(G,C,\{+,+,-\},I)\leqslant OOEL(G,D,\{+,+,-\},J)$，则任意 $A\rightarrow B\in POE\text{-}PR$，存在 $C\rightarrow B\in OOE\text{-}PR$，则 $A\subseteq C$。

证明　类似定理3.5可证。

定理6　设 $(G,C,I,\{+,?,-\},D,J)$ 是一个不完备决策背景，$POEL(G,C,\{+,-,-\},I)\leqslant POEL(G,D,\{+,-,-\},J)$，则任意 $\text{not}\,A^{\bar{*}}\rightarrow\text{not}\,B^{\bar{*}}\in OE\text{-}NR$，存在 $\text{not}\,C^{\bar{*}}\rightarrow\text{not}\,B^{\bar{*}}\in POE\text{-}NR$，则 $A^{\bar{*}}\subseteq C^{\bar{*}}$。

证明　类似定理5可证。

推论2　设 $(G,C,I,\{+,?,-\},D,J)$ 是一个不完备决策背景，$POEL(G,C,\{+,-,-\},I)\leqslant POEL(G,D,\{+,-,-\},J)$，则任意 $A\rightarrow B\in OOE\text{-}NR$，存在 $C\rightarrow B\in POE\text{-}NR$，则 $A\subseteq C$。

定理7　设 $(G,C,I,\{+,?,-\},D,J)$ 是一个不完备决策背景，$POEL(G,C,\{+,-,-\},I)\leqslant POEL(G,D,\{+,-,-\},J)$，则任意 $\text{not}\,A^{\bar{*}}\rightarrow\text{not}\,B^{\bar{*}}\in OE\text{-}NR$，存在 $\text{not}\,A^{\bar{*}}\rightarrow\text{not}\,C^{\bar{*}}\in POE\text{-}NR$，则 $B^{\bar{*}}\subseteq C^{\bar{*}}$。

证明　对于 $\forall\text{not}\,A^{\bar{*}}\rightarrow\text{not}\,B^{\bar{*}}\in OE\text{-}NR$，则 $(X,(A^{*},A^{\bar{*}}))\in OEL(G,C,\{+,?,-\},I)$，$(Y,(B^{*},B^{\bar{*}}))\in OEL(G,D,\{+,?,-\},J)$，满足 $X\subseteq Y$。因为 $(X,(A^{*},A^{\bar{*}}))\in OEL(G,C,\{+,?,-\},I)$，所以

$(X,(A^{*''},A^{\bar{*}''}))\in POEL(G,C,\{+,-,-\},I)$。

又 $POEL(G,C,\{+,-,-\},I)\leqslant POEL(G,D,\{+,-,-\},J)$，所以对于任意的 $(X,(C^{*''},C^{\bar{*}''}))\in POEL(G,D,\{+,-,-\},J)$，总存在 $(X,(A^{*''},A^{\bar{*}''}))\in POEL(G,C,\{+,-,-\},I)$，使得 $\text{not}\,A^{\bar{*}}\rightarrow\text{not}\,C^{\bar{*}}\in POE-NR$。因为 $(Y,(B^{*},B^{\bar{*}}))\in OEL(G,D,\{+,?,-\},J)$，所以 $(Y,(B^{*''},B^{\bar{*}''}))\in POEL(G,D,\{+,-,-\},J)$，又 $X\subseteq Y$，所以 $(B^{*''},B^{\bar{*}''})\subseteq(C^{*''},C^{\bar{*}''})$，因此 $B^{\bar{*}}\subseteq C^{\bar{*}}$。

注1　设 $(G,C,I,\{+,?,-\},D,J)$ 是一个不完备决策背景，若 $OOEL(G,C,\{+,+,-\},I)\leqslant OOEL(G,D,\{+,+,-\},J)$，对于 $\forall A\rightarrow B\in OE\text{-}PR$，总存在 $A\rightarrow C\in OEP\text{-}PR$，不一定满足 $B\subseteq C$。

如在例1中对象导出三支规则 $de\rightarrow gj\in OE\text{-}PR$，例2中乐观型对象导出三支规则 $de\rightarrow j\in POE\text{-}PR$，显然 $gj\not\subset j$。

4　结论

本文给出了不完备形式背景下的乐观型和悲观型两种决策背景，并研究了在两种决策背景下对象导出三支概念格的构造和决策规则的获取，讨论了在不完备形式背景下对象导出三支概念格（OEL）、乐观型对象导出三支概念格（$OOEL$）以及悲观型对象导出三支概念格（$POEL$）的规则提取间的关系。得出了：(1)不完备决策背景下的对象导出三支正规则集合与悲观型对象导出三支正规则集合相同，负规则集合与乐观型对象导出三支负规则集合相同；

(2)不完备形式背景下的决策近似概念格细于悲观型背景下的决策概念格,条件近似概念格细于乐观型背景下的条件概念格等结论。

乐观型和悲观型的决策背景是刻画了不完备形式背景的两种特殊情形,后续研究将考虑条件子背景和决策子背景的属性值具有特定统计分布特征的三支概念格的刻画和规则提取方法。

参考文献:

[1] WILLE R. Restructuring Lattice Theory: An Approach Based on Hierarchies of Concepts[C]//RIVAL I. Ordered Sets. Dordrecht: Springer, 1982: 445-470. DOI: 10.1007/978-94-009-7798-3_15.

[2] 刘琳, 魏玲, 钱婷. 决策形式背景中具有置信度的三支规则提取[J]. 山东大学学报(理学版), 2017, **52**(2): 101-110. DOI: 10.6040/j.issn.1671-9352.0.2016.384.
LIU L, WEI L, QIAN T. Three-way Rules Extraction in Formal Decision Contexts with Confidence[J]. *J Shandong Univ Nat Sci*, 2017, **52**(2): 101-110. DOI: 10.6040/j.issn.1671-9352.0.2016.384.

[3] YUAN K H, XU W H, LI W T, *et al*. An Incremental Learning Mechanism for Object Classification Based on Progressive Fuzzy Three-way Concept[J]. *Inf Sci*, 2022, **584**: 127-147. DOI: 10.1016/j.ins.2021.10.058.

[4] PALCHUNOV D E, YAKHYAEVA G E. Integration of Fuzzy Model Theory and FCA for Big Data Mining[C]//2019 International Multi-Conference on Engineering, Computer and Information Sciences (SIBIRCON). New York: IEEE, 2019: 961-966. DOI: 10.1109/SIBIRCON48586.2019.8958216.

[5] ANUSUYA ILAMATHI V S, VIMALA J, DAVVAZ B. Multiset Filters of Residuated Lattices and Its Application in Medical Diagnosis[J]. *J Intell Fuzzy Syst*, 2019, **36**(3): 2297-2305. DOI: 10.3233/jifs-169940.

[6] 叶青, 史昕, 孙梦薇, 等. 基于形式概念分析的交通监测传感网络贪婪性同步拓扑算法[J]. 计算机应用, 2023, **43**(3): 869-875. DOI: 10.11772/j.issn.1001-9081.2022010141.
YE Q, SHI X, SUN M W, *et al*. Greedy Synchronization Topology Algorithm Based on Formal Concept Analysis for Traffic Surveillance Based Sensor Network[J]. *J Comput Appl*, 2023, **43**(3): 869-875. DOI: 10.11772/j.issn.1001-9081.2022010141.

[7] HAO F, YANG Y X, MIN G Y, *et al*. Incremental Construction of Three-way Concept Lattice for Knowledge Discovery in Social Networks[J]. *Inf Sci*, 2021, **578**: 257-280. DOI: 10.1016/j.ins.2021.07.031.

[8] GANTER B, WILLE R. Formal Concept Analysis[M]. Mathematical Foundations. New York: Springerverlag, 1999. DOI: 10.5555/550737.

[9] PAWLAK Z. Rough Sets[J]. *Int J Comput Inf Sci*, 1982, **11**(5): 341-356. DOI: 10.1007/bf01001956.

[10] 康向平, 李德玉. 一种基于形式概念分析的粗糙集中的知识获取方法[J]. 山西大学学报(自然科学版), 2011, **34**(3): 415-420.
KANG X P, LI D Y. One Knowledge Acquisition Method Based on Formal Concept Analysis in Rough Set[J]. *J Shanxi Univ Nat Sci Ed*, 2011, **34**(3): 415-420.

[11] YAO Y Y. Three-way Decision: An Interpretation of Rules in Rough Set Theory[C]//International Conference on Rough Sets and Knowledge Technology. Berlin, Heidelberg: Springer, 2009: 642-649.10.1007/978-3-642-02962-2_81.

[12] QI J J, WEI L, YAO Y Y. Three-way Formal Concept Analysis[C]//International Conference on Rough Sets and Knowledge Technology. Cham: Springer, 2014: 732-741. DOI: 10. 1007/978-3-319-11740-9_67.

[13] ZHI H L, QI J J, QIAN T, *et al*. Three-way Dual Concept Analysis[J]. *Int J Approx Reason*, 2019, **114**: 151-165. DOI: 10.1016/j.ijar.2019.08.010.

[14] SINGH P K. Medical Diagnoses Using Three-way Fuzzy Concept Lattice and Their Euclidean Distance[J]. *Comput Appl Math*, 2018, **37**(3): 3283-3306. DOI: 10.1007/s40314-017-0513-2.

[15] 钱婷, 赵思雨, 王军涛. 基于同构理论的三支概念格的构造方法与算法研究[J]. 浙江大学学报(理学版), 2020, **47**(3): 322-328, 336. DOI: 10. 3785/j.issn.1008-9497.2020.03.009.
QIAN T, ZHAO S Y, WANG J T. Research on Construction Methods and Algorithms of Three-Way Concept Lattices Based on Isomorphism Theory[J]. *J Zhejiang Univ Sci Ed*, 2020, **47**(3): 322-328, 336. DOI: 10. 3785/j.issn.1008-9497.2020.03.009.

[16] 贺晓丽, 柳战英, 钱婷. 三支面向属性概念格的规则提取[J]. 计算机工程与应用, 2022, **58**(19): 152-157. DOI: 10.3778/j.issn.1002-8331.2204-0018.
HE X L, LIU Z Y, QIAN T. Rule Acquisition of Property Oriented Concept Lattice Based on Three-way Decision[J]. *Comput Eng Appl*, 2022, **58**(19): 152-157. DOI: 10.3778/j.issn.1002-8331.2204-0018.

[17] MAO H, LIU X Q, WANG G. Two Forms of Three-way Semiconcepts[J]. *J Intell Fuzzy Syst*, 2021, **40**(6): 10853-10864. DOI: 10.3233/jifs-201862.

[18] QU K S, ZHAI Y H, LIANG J Y, *et al*. Study of Decision Implications Based on Formal Concept Analysis[J]. *Int J Gen Syst*, 2007, **36**(2): 147-156. DOI: 10.1080/03081070600913650.

[19] LI J H, MEI C L, LV Y J. Knowledge Reduction in Decision Formal Contexts[J]. *Knowl Based Syst*, 2011, **24**(5): 709-715. DOI: 10.1016/j.knosys.2011.02.011.

[20] LI J H, HUANG C C, MEI C L, *et al*. An Intensive Study on Rule Acquisition in Formal Decision Contexts Based on Minimal Closed Label Concept Lattices[J]. *Intell Autom Soft Comput*, 2017, **23**(3): 519-533. DOI: 10.1080/10798587.2016.1212509.

[21] 刘琳, 钱婷, 魏玲. 基于属性导出三支概念格的决策背景规则提取[J]. 西北大学学报(自然科学版), 2016, **46**(4): 481-487. DOI: 10.16152/j.cnki.xdxbzr.2016-04-003.
LIU L, QIAN T, WEI L. Rules Extraction in Formal Decision Contexts Based on Attribute-induced Three-way Concept Lattices[J]. *J Northwest Univ Nat Sci Ed*, 2016, **46**(4): 481-487. DOI: 10.16152/j.cnki.xdxbzr.2016-04-003.

[22] 刘美玉, 祁建军, 刘伟. 三支概念格中的关联规则提取算法[J]. 西安交通大学学报, 2021, **55**(9): 189-196. DOI: 10. 7652/xjtuxb202109021.
LIU M Y, QI J J, LIU W. Extracting Association Rules in Three-way Concept Lattiices[J]. *J Xi'an Jiaotong Univ*, 2021, **55**(9): 189-196. DOI: 10. 7652/xjtuxb202109021.

[23] ZHAO J, WAN R X, MIAO D Q, *et al*. Rule Acquisition of Three-way Semi-concept Lattices in Formal Decision Context[J]. *CAAI Trans Intel Tech*, 2024, **9**(2): 333-347. DOI: 10.1049/cit2.12248.

[24] LI J H, MEI C L, LV Y J. Incomplete Decision Contexts: Approximate Concept Construction, Rule Acquisition and Knowledge Reduction[J]. *Int J Approx Reason*, 2013, **54**(1): 149-165. DOI: 10.1016/j.ijar.2012.07.005.

[25] LI M Z, WANG G Y. Approximate Concept Construction with Three-way Decisions and Attribute Reduction in Incomplete Contexts[J]. *Knowl Based Syst*, 2016, **91**: 165-178. DOI: 10.1016/j.knosys.2015.10.010.

[26] 张呈玲,李进金,林艺东.基于面对对象(属性)概念格的三支规则提取[J].南京大学学报(自然科学版), 2021,**57**(4): 599-610. DOI: 10. 13232/j.cnki.jnju.2021.04.008.
ZHANG C L, LI J J, LIN Y D. Three-way Rules Acquisition Based on Object (Attribute)-oriented Concept Lattices[J]. *J Nanjing Univ Nat Sci*, 2021, **57**(4): 599-610. DOI: 10.13232/j.cnki.jnju.2021.04.008.

[27] QI J J, QIAN T, WEI L. The Connections between Three-way and Classical Concept Lattices[J]. *Knowl Based Syst*, 2016, **91**: 143-151. DOI: 10.1016/j. knosys.2015.08.006.

[28] QI J J, WEI L, YAO Y Y. Three-way Formal Concept Analysis[C]//International Conference on Rough Sets and Knowledge Technology. Cham: Springer, 2014: 732-741.10.1007/978-3-319-11740-9_67.

[29] 魏玲, 张文修. 粗糙集与概念格的约简理论与方法[D]. 西安: 西安交通大学, 2005.
WEI L, ZHANG W X. Reduction Theory and Approach to Rough Set and Concept Lattice[D]. Xi'an: Xi'an Jiaotong University, 2005.

[30] BURMEISTER P, HOLZER R. On the Treatment of Incomplete Knowledge in Formal Concept Analysis[M]//Lecture Notes in Computer Science. Berlin, Heidelberg: Springer, 2000: 385-398. DOI: 10.1007/10722280_27.

[31] 牛丽慧, 米据生, 白宇璋. 不完备形式背景中基于OE-cp-近似概念的规则提取[J]. 计算机科学, 2023, **50**(10): 7-17. DOI: 10.11896/jsjkx.230600037.
NIU L H, MI J S, BAI Y Z. Rule Extraction Based on OE-cp-approximation Concepts in Incomplete Formal Contexts[J]. *Comput Sci*, 2023, **50**(10): 7-17. DOI: 10.11896/jsjkx.230600037.

[32] 常丽娜, 魏玲. 基于OE-近似概念格的不完备决策背景的规则提取[J]. 山东大学学报(理学版), 2021, **56**(11): 31-37. DOI: 10.6040/j.issn.1671-9352.4.2021.033.
CHANG L N, WEI L. Rules Acquisition Based on OE-approximate Concept Lattice in Incomplete Formal Decision Contexts[J]. *J Shandong Univ Nat Sci*, 2021, **56**(11): 31-37. DOI: 10.6040/j.issn.1671-9352.4.2021.033.

[33] ZHI H L, CHAO H. Three-way Concept Analysis for Incomplete Formal Contexts[J]. *Math Probl Eng*, 2018, **2018**: 9546846. DOI: 10.1155/2018/9546846.