

基于改进距离函数的概率犹豫模糊多属性群决策

宁帅康¹,冯涛^{1*},李艳¹,米据生²

(1.河北科技大学 理学院,河北 石家庄 050018;
2.河北师范大学 数学科学学院,河北 石家庄 050024)

摘要:概率犹豫模糊集能精准地描述方案相对于属性取值的犹豫性概率分布,因而在决策分析中占有重要地位。在多属性群体决策中,利用方案间的相似性和距离函数,可以依据方案的代表性的强弱进行有效排序。若结合现有的排序结果,还可改进最优方案。为此,本文探讨概率犹豫模糊系统中基于代表性强弱的多属性群决策问题。本文首先提出了基于对数的距离函数,并利用余弦相似度与杰卡德相似系数构建了综合相似度。然后,利用基于对数的距离函数改进专家的客观权重,并与主观相结合计算专家的综合权重。同时在群共识的基础上,针对代表性提出了基于相似度均值的综合决策矩阵的正、负理想解。并结合基于对数的距离函数计算属性权重。最后,利用贴进度法给出群共识下基于代表性强弱的备选方案的排序方法。在实例验证环节,与传统多属性群决策模型进行对比分析,验证了本文所提出模型的可行性和有效性。同时本模型的结果与传统排序相结合可以得到最优方案选择。
关键词:综合相似度;基于对数的距离函数;权重;群共识;逼近理想解法

中图分类号:O225;O159 文献标志码:A 文章编号:0253-2395(2025)01-0101-19

Probabilistic Hesitant Fuzzy Multi-attribute Group Decision Based on Improved Distance Function

NING Shuaikang¹, FENG Tao^{1*}, LI Yan¹, MI Jusheng²

(1. School of Sciences, Hebei University of Science and Technology, Shijiazhuang 050018, China;
2. School of Mathematical Sciences, Hebei Normal University, Shijiazhuang 050024, China)

Abstract: Probabilistic hesitant fuzzy sets play an important role in decision analysis because they can accurately describe the probability distribution of the hesitancy of alternatives with respect to the attributes. In multi-attribute group decision-making, the alternatives can be effectively ranked according to their representativeness by using the similarity and distance function between the alternatives. If combined with the existing ranking results, the more suitable optimal alternative can also be acquired. This paper discusses the multi-attribute group decision-making problem based on the representativeness strength of every alternative in probabilistic hesitant fuzzy systems. The distance function based on logarithm is proposed, and the comprehensive similarity is constructed by using cosine similarity and Jaccard similarity coefficient. Then, the objective weight of experts is improved by using the distance function based on logarithm, and the comprehensive weight of experts is calculated by combining with the subjective weight. Meanwhile, based on the group consensus, the positive and negative ideal solutions for the comprehensive decision matrix based on the similarity mean are proposed for the representativeness. And the attribute weight can be calculated by combining the distance function based on the logarithm. Finally, the ranking method of alternatives based on the strength of representativeness under group consensus is given by using the closeness degree method. In the part of example verification, the feasibility and effectiveness of the proposed

收稿日期:2024-07-16;接受日期:2024-10-24

基金项目:国家自然科学基金(62076088);河北省自然科学基金(A2020208004;A2021210027)

作者简介:宁帅康(1999-),男,山西临汾人,硕士研究生,研究方向为数据挖掘,E-mail:ningshuaikang@gmail.com

* 通信作者:冯涛(FENG Tao),E-mail:fengtao_new@163.com

引文格式:宁帅康,冯涛,李艳,等.基于改进距离函数的概率犹豫模糊多属性群决策[J].山西大学学报(自然科学版),2025,48(1):101-119. DOI:10.13451/j.sxu.ns.2024153.

model are verified by comparing with the traditional multi-attribute group decision-making model. At the same time, the results of this model can be combined with the traditional ranking to get the optimal alternative selection.

Key words: comprehensive similarity; distance function based on logarithmic; weight; group consensus; technique for order preference by similarity to ideal solution

0 引言

在当今通信技术和科学技术飞速发展的背景下,信息表示日益多元化且复杂度不断提升,这种复杂性不断冲击着人类的认知。如何在庞杂的信息表示中获取有用信息,指导人类做出合理决策成为一个非常有意义的课题。而面对这一课题需要综合考虑信息描述和度量问题、最优信息选择问题。

在上述问题中,适当数据表示形式在决策分析中占有非常重要的地位。在信息处理过程中,我们经常会遇到不完备和不确定的数据,因此涌现出了一些新的软计算工具,其中模糊集的优势尤为明显。1965年Zadeh发表的具有开创意义论文《模糊集合》^[1],标志着模糊数学的诞生,在此书中详细研究了模糊集理论和处理模糊现象的方法。在模糊集中,隶属函数是 $[0, 1]$ 上的连续函数,用于度量描述信息的模糊度或者不精确度^[2],并将布尔二值逻辑扩展为模糊逻辑。模糊集理论应用广泛,从工程科技到社会人文科学均有研究成果^[3]。在决策问题中,模糊理论能更准确高效地反映专家的偏好信息。由于模糊隶属度取值存在多种可能,西班牙学者Torra在模糊集的基础上提出了犹豫模糊集^[4]的概念,该方法利用多个隶属度刻画模糊信息,更加精准地表达专家的评价。在决策分析中,犹豫模糊集也更全面地呈现专家的决策信息,从而提升决策结果的科学性和可信度。近年来,犹豫模糊集理论成功地应用于生物^[5]、航空^[6]、物流^[7]、教育^[8]等领域。

在探讨决策与不确定信息表达的过程中,犹豫模糊集因无法全面反映专家对隶属度的偏好差异而面临局限性。为此,2014年,朱斌创新性地引入了概率犹豫模糊集^[9]。该集合通过为隶属度赋予概率值,精确描绘了专家决策信息及偏好特征,并且概率犹豫模糊集已在决策分析^[10]和模式识别等领域得到了广泛应用。为了进一步丰富理论体系,Zhang等将概率犹豫模糊元扩展到隶属度的概率之和不等于1的情形^[11],扩展了模糊集理论的应用范围。除此之外,为了拓宽概率犹豫模糊集的应用,学者们还深入研究了概率犹豫模糊元的均值、方差、期望一致性^[12],以及概率犹豫模糊集的相关系数^[13]、距离测度^[14-16]和相似度^[17]。同时,Su等构建了熵度量^[18]方式,Batool等在毕达哥拉斯概率犹豫模糊集上构造了熵函数^[19]。由此可见,概率犹豫模糊系统上的知识获取已成为一大热门问题。

现实中的决策问题还需要汇聚多位专家的综合评判以确定最优方案。而多属性群决策(Multi-Attribute Group Decision Making, MAGDM)就是在综合考虑多个专家意见的基础上,对有限的备选方案进行排序,从而解决最优方案选择问题。在多属性群决策中,常用方法包括模糊综合评价法^[20]、熵权法^[21]、逼近理想解法(Technique for Order Preference by Similarity to Ideal Solution, TOPSIS)^[22]。这些方法在管理学、数学、工程和复杂经济学中具有重要地位,并广泛应用于政治、军事等领域^[23]。为了克服多个专家决策信息的分歧问题,在多属性群决策中引入了群共识方法,这一方法有利于最优决策结果的获取。目前群共识模型包括基于愿景的动态多属性群决策共识模型^[24]、利用概率语言基于后悔理论和共识集^[25]以及基于证据理论和Vague集^[26]的动态决策方法。除此之外,多属性群决策方法还可以集成多个属性、时间节点、专家意见和备选方案,提升决策的合理性和科学性。通过集成多方信息,帮助决策者更全面地分析各种因素,从而做出更加理性和科学的决策。因此,在多属性群决策中,对群共识后的不同专家的意见和多维度的属性进行综合评估,可以实现对决策的精确优化,同时,方案的代表性也是一个重要的衡量标准,因此本文希望考虑在群共识条件下基于代表性强弱的多属性群决策模型。

随着多属性群决策研究的不断发展,出现了适应不同决策环境的模型。例如,在毕达哥拉斯模糊集^[27]、毕达哥拉斯区间模糊数^[28]的背景下。近年来,在犹豫模糊信息系统中多属性群决策的研究不断深入。例如,王新鑫等探讨了专家和属性权重未知的情况下进行决策分析和方案排序问题^[29],朱国成等通过改进贴进度提出了新的决策模型^[30]。陕振沛等利用犹豫模糊熵^[31]得到专家权重,同时使用指数熵确定属性权重,进而基于相对贴进度对备选方案进行排序。并且将多属性群决策研究推广到概率犹豫模糊环境下。朱国成等针对概率犹豫模糊集多属性群决策问题构建了两类算法^[32]。Wang等根据熵与距离测度^[33]构建了一种新的多属性群决策模型。华维灿等基于相似度构造了交互式群方法^[34]。由于概率犹豫模糊集能更全面准确地表达专家的意见,因此,本文旨在优化概率犹豫模糊数的距离函数与相似性度量方法,使其在群共识下实现基于代表性的多属性群决策分析。

本文的结构组织如下:第1节,回顾模糊集、犹豫模糊集、概率犹豫模糊集以及余弦相似度相关的概念。第2节,首先构造概率犹豫模糊元之间的基于对数的距离函数,其次根据相似性度量以及杰卡德相似系数提出综合相似度,并定义概率犹豫模糊元的得分函数。第3节,通过新构造的距离函数修订专家权重。根据群共识方法修订专家的决策矩阵,并基于平均综合相似度构造正负理想解。然后计算属性权重,给出相关的多属性群决策算法。第4节,给出实际例子来说明所提出方法的可行性和有效性。

1 预备知识

本节首先回顾概率犹豫模糊集、距离测度、余弦相似度的相关知识,为后续讨论奠定理论基础。

1.1 概率犹豫模糊集

定义 1^[4] 若 X 为论域,称 $A = \{ \langle x, h_A(x) \rangle | x \in X \}$ 为 X 上的犹豫模糊集。其中 $h_A(x)$ 为 x 属于集合 A 的 $[0, 1]$ 中的可能隶属度集合。称 $h_A(x)$ 为一个犹豫模糊元,记为 (HFE)。 X 上的全体犹豫模糊集记为 $H(X)$ 。

在 Torra^[4] 定义的犹豫模糊集中,如果犹豫模糊元中元素的概率相等,就无法准确表达每个隶属度的可能性。为解决这一问题,Zhang 等提出了概率犹豫模糊集^[11]。

定义 2^[9] 假设 X 是非空集合, $\forall x \in X$, 称 $H_E = \{ \langle x, h_E(P) \rangle | x \in X \}$ 为集合 X 上的概率犹豫模糊集,其中 $h_E(P) = \left\{ \gamma_l(p_l), l = 1, 2, \dots, |h_E(P)| \mid \sum_{l=1}^{|h_E(P)|} p_l = 1 \right\}$, 称为概率犹豫模糊元,可简记为 $h_E(p)$ 。概率犹豫模糊元中的 γ_l 表示元素 x 属于集合 $h_E(p)$ 上的第 l 个隶属度, $h_E = \{ \gamma_l | l = 1, 2, \dots, |h_E(P)| \}$ 为隶属度的集合。 p_l 为隶属度 γ_l 发生的概率。 $|h_E(P)|$ 表示概率犹豫模糊元 $h_E(P)$ 中元素的个数。当 $\sum_{l=1}^{|h_E(P)|} p_l = 1$ 时,表示概率信息完全;当 $\sum_{l=1}^{|h_E(P)|} p_l < 1$ 时,表示存在未知的概率信息,也被称为弱概率犹豫模糊,或者称为弱隶属度信息。

未知的弱概率犹豫模糊元可以通过归一化处理转换为概率犹豫模糊元,即: $p'_l = p_l / \sum_{l=1}^{|h_E(P)|} p_l$, $i = 1, 2, \dots, |h_E(P)|$ 。其中 p'_l 表示的是归一化处理后的第 l 个隶属度概率。若概率犹豫模糊元中的隶属度概率是相同的,那么概率犹豫模糊元就退化为犹豫模糊元。

当隶属度信息缺失时,弱概率犹豫模糊集可以通过增加其最大或最小值补齐来转化为概率犹豫模糊元。在本文中,我们仅考虑条件 $\sum_{l=1}^{|h_E(P)|} p_l = 1$ 的概率犹豫模糊元。

定义 3^[35] 假设 $h_E(P), h_{E1}(P), h_{E2}(P)$ 是概率犹豫模糊元, λ 为实数且 $\lambda > 0$, 则有下列运算:

- 1) $h_E^\lambda(P) = \bigcup_{l=1,2,\dots,|h_E(P)|} \{\gamma_l^\lambda(p_l)\};$
- 2) $\lambda h_E(P) = \bigcup_{l=1,2,\dots,|h_E(P)|} \{(1 - (1 - \gamma_l)^\lambda)(p_l)\};$
- 3) $h_{E1}(P) \oplus h_{E2}(P) = \bigcup_{l=1,2,\dots,|h_{E1}(P)|, k=1,2,\dots,|h_{E2}(P)|} \{\gamma_l + \gamma_k - \gamma_l \gamma_k | p_l p_k\};$
- 4) $h_{E1}(P) \otimes h_{E2}(P) = \bigcup_{l=1,2,\dots,|h_{E1}(P)|, k=1,2,\dots,|h_{E2}(P)|} (\gamma_l \gamma_k)(p_l p_k);$
- 5) $(h_E(P))^c = \bigcup_{l=1,2,\dots,|h_E(P)|} \{(1 - \gamma_l)(p_l)\}.$

定义 4^[35] 令 $h_E(P) = \{\gamma_i(p_i) | i = 1, 2, \dots, |h_E(P)|, \sum_{i=1}^{|h_E(P)|} p_i < 1\}$ 是概率犹豫模糊元, 称

$$s(h) = \frac{1}{|h_E(P)|} \sum_{i=1}^{|h_E(P)|} \gamma_i p_i$$

为 $h_E(P)$ 的得分函数。

定义 5^[36] 令 $h_E(P) = \{\gamma_i(p_i) | i = 1, 2, \dots, |h_E(P)|, \sum_{i=1}^{|h_E(P)|} p_i = 1\}$ 是概率犹豫模糊元, 称

$$d(h) = \sum_{i=1}^{|h_E(P)|} p_i (\gamma_i - s(h))^2$$

为 $h_E(P)$ 的偏差函数。

这样, 我们可以在得分函数和偏差函数的基础上, 比较概率犹豫模糊元的大小, 对于任意两个概率犹豫模糊元 $h_{E1}(P)$ 和 $h_{E2}(P)$, 有:

- 1) 若 $s(h_{E1}(P)) > s(h_{E2}(P))$, 则 $h_{E1}(P) > h_{E2}(P)$;
- 2) 若 $s(h_{E1}(P)) = s(h_{E2}(P))$, $d(h_{E1}(P)) > d(h_{E2}(P))$, 则 $h_{E1}(P) > h_{E2}(P)$;
- 3) 若 $s(h_{E1}(P)) = s(h_{E2}(P))$, $d(h_{E1}(P)) = d(h_{E2}(P))$, 则 $h_{E1}(P) = h_{E2}(P)$;
- 4) 若 $s(h_{E1}(P)) = s(h_{E2}(P))$, $d(h_{E1}(P)) < d(h_{E2}(P))$, 则 $h_{E1}(P) < h_{E2}(P)$ 。

1.2 概率犹豫模糊集的距离测度

回顾由经典距离到概率犹豫模糊距离的发展过程, 可以发现前人已提出了多种距离测度函数, 下面我们介绍其中三种。

定义 6^[37] 假设 X 是非空有限论域, 若 $d: X^2 \rightarrow [0, 1]$, x, y 和 $z \in X$, 且 $d(x, y)$ 满足: 1) $d(x, y) \geq 0$, 且 $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$; 2) $d(x, y) = d(y, x)$; 3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$, 则称 d 是 X 上的距离测度或称 $d(x, y)$ 为 x 和 y 的距离。

定义 7^[18] 假设 X 为有限非空论域, 设 $H_{E1}(P)$ 和 $H_{E2}(P)$ 为 X 上的两个概率犹豫模糊集, 则 $H_{E1}(P)$ 和 $H_{E2}(P)$ 的函数 $d(H_{E1}(P), H_{E2}(P))$ 满足以下性质: 1) $d(H_{E1}(P), H_{E2}(P)) \geq 0$; 2) $d(H_{E1}(P), H_{E2}(P)) = 0 \Leftrightarrow H_{E1}(P) = H_{E2}(P)$; 3) $d(H_{E1}(P), H_{E2}(P)) = d(H_{E2}(P), H_{E1}(P))$, 则 d 是 X 上的距离测度, $d(H_{E1}(P), H_{E2}(P))$ 为概率犹豫模糊集的距离。

定义 8^[18] 假设 X 为非空有限论域, 令 $h_{E1}(P)$ 和 $h_{E2}(P)$ 为两个概率犹豫模糊元。如果 $h_{E1}(P)$ 和 $h_{E2}(P)$ 中的元素数量是相同的, 即 $|h_{E1}(P)| = |h_{E2}(P)| = |h(P)|$, 则定义 $h_{E1}(p)$ 和 $h_{E2}(p)$ 的 Euclidean 距离为:

$$d_E(h_{E1}(P), h_{E2}(P)) = \sqrt{\frac{1}{|h(P)|} \sum_{j=1}^{|h(P)|} |h_{E1}(P)^{\sigma(j)}(\gamma_i \cdot p_i) - h_{E2}(P)^{\sigma(j)}(\gamma_i \cdot p_i)|^2}, \quad (1)$$

其中 $h_E(P)^{\sigma(j)}(\gamma_i \cdot p_i)$ 表示为概率犹豫模糊元 $h_E(P)$ 中第 j 小的值 γ_i 和相应的 p_i 的乘积。当

$|h_{E1}(P)| \neq |h_{E2}(P)|$ 时,对较短的概率犹豫模糊元利用较长的概率犹豫模糊元的最大值或者最小值且概率为0的方式补齐,实现概率犹豫模糊元中元素个数相等。

1.3 余弦相似度

定义 9^[38] 设A和B定义在 $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ 上的两个犹豫模糊集,则A,B间的相似性测度满足如下条件:1) $0 \leq S(A, B) \leq 1$; 2) $S(A, B) = 1$, 当且仅当 $h_A(x) = h_B(x), \forall x \in X$; 3) $S(A, B) = S(B, A)$ 。

定义 10^[39] 设向量 $\bar{M} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, 向量 $\bar{N} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ 表示两个 n 维的向量, $\vec{0}$ 表示一个零向量, $\|\bar{M}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i)^2}$, $\|\bar{N}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (b_i)^2}$ 表示向量 \bar{M} 和 \bar{N} 的模, 则向量 \bar{M} 和 \bar{N} 的余弦相似度定义如下:

$$\cos(\bar{M}, \bar{N}) = \begin{cases} 0 & \bar{M} = 0 \text{ 或 } \bar{N} = 0, \text{ 但 } \bar{M} \neq \bar{N}, \\ \frac{\bar{M} \cdot \bar{N}}{\|\bar{M}\| \cdot \|\bar{N}\|} = \frac{\sum_{i=1}^n (a_i \times b_i)}{\sqrt{\sum_{j=1}^n (a_j)^2} \times \sqrt{\sum_{j=1}^n (b_j)^2}} & \bar{M} \neq 0 \text{ 且 } \bar{N} \neq 0, \\ 1 & \bar{M} = \bar{N} = 0. \end{cases}$$

性质 1 设向量 $\bar{M} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, 向量 $\bar{N} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ 表示两个 n 维的向量, $\vec{0}$ 表示零向量, 则向量 \bar{M} 和 \bar{N} 的余弦相似度满足以下性质: 1) $-1 \leq \cos(\bar{M}, \bar{N}) \leq 1$; 2) $\cos(\bar{M}, \bar{M}) = 1$; 3) $\cos(\vec{0}, \bar{N}) = 0$, 其中 $\bar{N} \neq \vec{0}$; 4) $\cos(\bar{M}, \bar{N}) = \cos(\bar{N}, \bar{M})$ 。

1.4 概率犹豫模糊环境下综合专家决策矩阵

在概率犹豫模糊决策问题中, 设 $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ 为 m 个可行的备选方案集, $C = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ 是一组属性或标准集合, $D = \{D_1, D_2, \dots, D_s\}$ 是 s 个专家集。每个专家对每个备选方案相对于属性进行评估, 评估值由概率犹豫模糊元表示, 简记为 $h_{ij}^k(P)$, $k = 1, 2, \dots, s; i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$ 。利用这些概率犹豫模糊集构成概率犹豫模糊矩阵 $M^k = (h_{ij}^k(P))_{m \times n}$, 如表 1 所示。

当多位专家提供对多个备选方案的决策矩阵时候, 我们需要利用下面公式汇总出一个综合决策矩阵。汇总公式如下:

$$\text{Max } \bar{M} = (\bar{h}_{ij}(P))_{m \times n}, \bar{h}_{ij}(P) = \left\{ \gamma_{ij}^l (p_{ij}^l), l = 1, 2, \dots, |h(P)| \right\}, \quad (2)$$

其中 γ_{ij}^l 是 $h_{ij}(P)$ 中的隶属度, $l = 1, \dots, |h_{ij}(P)|$, $p_{ij}^l = \sum_{r_j \in h^k} p_{ij}^{r_j} \times \theta_k$ 为综合概率, 且 $h^k = h_{ij}^1 \cup \dots \cup h_{ij}^s$, $p_{ij}^{r_j}$ 是第 k 个专家给出的专家决策矩阵中 γ_{ij}^l 的概率, θ_k 为专家 k 的客观权重。并且, 综合专家决策矩阵如表 2 所示。

表1 概率犹豫模糊矩阵

Table 1 Probabilistic hesitant fuzzy matrix

X	c_1	c_2	\dots	c_n
x_1	$h_{11}^k(P)$	$h_{12}^k(P)$	\dots	$h_{1n}^k(P)$
x_2	$h_{21}^k(P)$	$h_{22}^k(P)$	\dots	$h_{2n}^k(P)$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
x_m	$h_{m1}^k(P)$	$h_{m2}^k(P)$	\dots	$h_{mn}^k(P)$

表2 综合专家决策矩阵

Table 2 Comprehensive expert decision matrix

X	c_1	c_2	\dots	c_n
x_1	$\bar{h}_{11}(P)$	$\bar{h}_{12}(P)$	\dots	$\bar{h}_{1n}(P)$
x_2	$\bar{h}_{21}(P)$	$\bar{h}_{22}(P)$	\dots	$\bar{h}_{2n}(P)$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
x_m	$\bar{h}_{m1}(P)$	$\bar{h}_{m2}(P)$	\dots	$\bar{h}_{mn}(P)$

2 基于对数的距离函数及综合相似性度量

2.1 概率犹豫模糊集的基于对数的距离函数

由于存在两个不同的概率犹豫模糊元距离为0, 难以区分的情况, 因此, 提出了一种新的距离度量方法, 用于衡量概率犹豫模糊元之间的距离。

定义 10^[15] 设 X 为非空有限论域, 令 $h_{E1}(P)$ 和 $h_{E2}(P)$ 为两个概率犹豫模糊元, 定义在概率犹豫模糊环境下的 Euclidean 距离如下:

$$d(h_{E1}(P), h_{E2}(P)) = \sqrt{\frac{1}{l_1 \times l_2} \sum_{i=1}^{l_1} \sum_{z=1}^{l_2} [(\gamma_i^{\sigma(i)} \cdot p_i) - (\gamma_z^{\sigma(z)} \cdot p_z)]^2}, \quad (3)$$

其中 l_1 和 l_2 分别为 $h_A(P)$ 和 $h_B(P)$ 的长度, $\gamma_i^{\sigma(i)}$ 和 $\gamma_z^{\sigma(z)}$ 分别是 A 和 B 中第 j 小的值。

例 1 设 $h_{E1}(P) = \{0.2(0.6), 0.3(0.4)\}$ 和 $h_{E2}(P) = \{0.12(1)\}$ 是概率犹豫模糊元, 则 $d(h_{E1}(P), h_{E2}(P)) = 0$, 此时无法分辨这两个概率犹豫模糊元, 因此对此距离测度进行修改。

定义 12 设 X 为非空有限论域, 令 $h_{E1}(P)$ 和 $h_{E2}(P)$ 为两个概率犹豫模糊元, 则距离函数定义为:

$$d_E(h_{E1}(P), h_{E2}(P)) = \sqrt{\frac{1}{l_1 \times l_2} \sum_{i=1}^{l_1} \sum_{z=1}^{l_2} [(\gamma_1^{\sigma(i)} \cdot p_i) - (\gamma_2^{\sigma(z)} \cdot p_z)]^2} + \frac{1}{l_1 \times l_2} \sum_{i=1}^{l_1} \sum_{z=1}^{l_2} |(p_i \log \gamma_1^{\sigma(i)} - p_z \log \gamma_2^{\sigma(z)})|, \quad (4)$$

其中 l_1 表示 $|h_{E1}(P)|$, l_2 表示 $|h_{E2}(P)|$ 。若存在 $\gamma_1^{\sigma(i)} = 0 \in h_E$ 的情况, 记 $p_i \log \gamma_1^{\sigma(i)} = 0$ 即可。

例 2 (接例 1) 设 $h_{E1}(P) = \{0.2(0.6), 0.3(0.4)\}$ 和 $h_{E2}(P) = \{0.12(1)\}$, 则 $d_E(h_{E1}(p), h_{E2}(p)) = 1.3962$, 利用此距离可以分辨这两个概率犹豫模糊元。

性质 2 令 $h_{E1}(P)$ 和 $h_{E2}(P)$ 为概率犹豫模糊元, 则基于对数的距离测度满足

- 1) $0 \leq d_E(h_{E1}(P), h_{E2}(P))$;
- 2) $d_E(h_{E1}(P), h_{E2}(P)) = 0 \Leftrightarrow h_{E1}(P) = h_{E2}(P)$;
- 3) $d_E(h_{E1}(P), h_{E2}(P)) = d_E(h_{E1}(P), h_{E2}(P))$ 。

证明 1) 非负性:

$$\sqrt{\frac{1}{l_1 \times l_2} \sum_{i=1}^{l_1} \sum_{z=1}^{l_2} [(\gamma_1^{\sigma(i)} \cdot p_i) - (\gamma_2^{\sigma(z)} \cdot p_z)]^2} \geq 0, \\ \frac{1}{l_1 \times l_2} \sum_{i=1}^{l_1} \sum_{z=1}^{l_2} |(p_i \log \gamma_1^{\sigma(i)} - p_z \log \gamma_2^{\sigma(z)})| \geq 0,$$

则 $d_E(h_{E1}(P), h_{E2}(P))$ 满足非负性。

2) 反身性: 由公式(4)得知, 满足 $d_E(h_{E1}(P), h_{E2}(P)) = 0$ 则需要满足 $[(\gamma_1^{\sigma(i)} \cdot p_i) - (\gamma_2^{\sigma(z)} \cdot p_z)]^2 = 0$ 以及 $\sum_{i=1}^{l_1} \sum_{z=1}^{l_2} |(p_i \log \gamma_1^{\sigma(i)} - p_z \log \gamma_2^{\sigma(z)})| = 0$, 即满足 $\gamma_1^{\sigma(i)} \cdot p_i = \gamma_2^{\sigma(z)} \cdot p_z$ 且 $(\gamma_1^{\sigma(i)})^{p_i} = (\gamma_2^{\sigma(z)})^{p_z}$ 。因此只有当 $h_{E1}(P) = h_{E2}(P)$ 时, 满足条件。

3) 交换性:

$$\sqrt{\frac{1}{l_1 \times l_2} \sum_{i=1}^{l_1} \sum_{z=1}^{l_2} [(\gamma_1^{\sigma(i)} \cdot p_i) - (\gamma_2^{\sigma(z)} \cdot p_z)]^2} + \frac{1}{l_1 \times l_2} \sum_{i=1}^{l_1} \sum_{z=1}^{l_2} |(p_i \log \gamma_1^{\sigma(i)} - p_z \log \gamma_2^{\sigma(z)})| = \\ \sqrt{\frac{1}{l_2 \times l_1} \sum_{z=1}^{l_2} \sum_{i=1}^{l_1} [(\gamma_1^{\sigma(i)} \cdot p_i) - (\gamma_2^{\sigma(z)} \cdot p_z)]^2} + \frac{1}{l_2 \times l_1} \sum_{z=1}^{l_2} \sum_{i=1}^{l_1} |(p_i \log \gamma_1^{\sigma(i)} - p_z \log \gamma_2^{\sigma(z)})|$$

则满足交换性。

2.2 综合相似度

由于杰卡德相似系数可以有效度量集合的相似度。因此本节利用杰卡德相似系数得到新的相似度。

定义 13^[40] 设 A 和 B 是 X 上的两个集合, A 和 B 的杰卡德相似系数 $J(A, B)$ 定义为:

$$J(A, B) = \frac{|A \cap B|}{|A \cup B|}, \quad (5)$$

杰卡德距离与杰卡德相似系数呈互补的关系, 于是杰卡德距离公式可推导如下。

定义 14^[41] 设 A 和 B 是 X 上的两个集合, A 和 B 的杰卡德相似距离 $J_d(A, B)$ 定义为

$$J_d(A, B) = 1 - J(A, B) = \frac{|A| + |B| - 2|A \cap B|}{|A| + |B| - |A \cap B|}. \quad (6)$$

基于余弦相似度和杰卡德相似系数的定义, 我们提出了一种基于聚类思想的相似性度量 (sim), 用以衡量概率犹豫模糊集合之间的相似性。

定义 15 设 $h_{E1}(P)$ 和 $h_{E2}(P)$ 为 X 上两个概率犹豫模糊元, 其中 $h_{E1}(P) = \{y_i(p_i), i = 1, 2, \dots, n\}$, $h_{E2}(P) = \{x_j(p_j), j = 1, 2, \dots, n\}$ 两个概率犹豫模糊元的余弦相似度的定义为:

$$\text{sim}(h_{E1}(P), h_{E2}(P)) = \frac{\sum_{i=1}^n [(y_i \times p_i) \times (x_i \times p_i)]}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i \times p_i)^2} \cdot \sqrt{\sum_{j=1}^n (x_j \times p_j)^2}}, \quad (7)$$

由于当 $\text{sim}(h_{E1}(P), h_{E2}(P)) = 1$ 时, 概率犹豫模糊元成比例, 这时候相似度为 1 不太符合实际情况。故公式(7)存在不足。因此, 利用杰卡德相似系数的思想改进概率犹豫模糊元的余弦相似度。首先, 构造概率犹豫模糊元之间的交集与并集。

定义 16 假设 X 为非空有限论域, 令 $h_{E1}(P)$ 和 $h_{E2}(P)$ 为两个概率犹豫模糊元, 即

$$\begin{aligned} h_{E1}(P) &= \left\{ \gamma_i(p_i), i = 1, 2, \dots, |h_A(P)| \mid \sum_{i=1}^{|h_A(P)|} p_i = 1 \right\}, \\ h_{E2}(P) &= \left\{ \gamma_z(p_z), z = 1, 2, \dots, |h_B(P)| \mid \sum_{z=1}^{|h_B(P)|} p_z = 1 \right\}. \end{aligned}$$

$$h_{E1}(P) \cup h_{E2}(P) = \{h_{E1}(P) \cup h_{E2}(P)\} = \left\{ \left(\gamma_y \left(\frac{p_y}{2} \right) \right) \mid \gamma_y \in h_{E1}(P) \cup h_{E2}(P), p_y = \sum_i^2 p(\gamma_y) \right\}, \quad (8)$$

$$h_{E1}(P) \cap h_{E2}(P) = \{h_{E1}(P) \cap h_{E2}(P)\} = \left\{ \left(\gamma_y(p_y) \right) \mid \gamma_y \in \{h_{E1}(P) \cap h_{E2}(P)\}, p_y = \frac{\bigwedge_{i=1}^2 p_{Ei}(\gamma_y)}{\sum_{\gamma_y} \left(\bigwedge_{i=1}^2 p_{Ei}(\gamma_y) \right)} \right\}. \quad (9)$$

定义 17 假设 X 为非空有限论域, 令 $h_{E1}(P)$ 和 $h_{E2}(P)$ 为两个概率犹豫模糊元。则

$$J(h_{E1}(P), h_{E2}(P)) = \frac{|h_{E1} \cap h_{E2}|}{|h_{E1} \cup h_{E2}|} = \frac{|h_{E1}(P) \cap h_{E2}(P)|}{|h_{E1}(P) \cup h_{E2}(P)|} = \frac{\left| \left\{ \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{|h_A(P)|} \right\} \cap \left\{ \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{|h_B(P)|} \right\} \right|}{\left| \left\{ \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{|h_A(P)|} \right\} \cup \left\{ \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{|h_B(P)|} \right\} \right|}, \quad (10)$$

其中 $|h_E(P)|$ 表示集合 $h_E(P)$ 的基数。

例 3 设 $h_{E1}(P) = \{0.6(0.25), 0.7(0.5), 0.8(0.25)\}$, $h_{E2}(P) = \{0.5(0.5), 0.6(0.5)\}$, 即 $\frac{|h_{E1} \cap h_{E2}|}{|h_{E1} \cup h_{E2}|} = \frac{|\{0.6, 0.7, 0.8\} \cap \{0.5, 0.6\}|}{|\{0.6, 0.7, 0.8\} \cup \{0.5, 0.6\}|} = \frac{1}{4}$ 。

定义 18 设 X 为非空有限论域, 令 $h_{E1}(P)$ 和 $h_{E2}(P)$ 为概率犹豫模糊元, 则综合相似度为:

$$\text{simc}(h_{E1}(P), h_{E2}(P)) = \text{sim}(h_{E1}(P), h_{E2}(P)) \times J(h_{E1}(P), h_{E2}(P)) = \begin{cases} 0 & (h_{E1}(P) = 0 \text{ 或 } h_{E2}(P) = 0, \text{ 但 } h_{E1}(P) \neq h_{E2}(P)), \\ \frac{\sum_{i=1}^n [(y_i \times p_i) \times (x_i \times p_i)]}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i \times p_i)^2} \cdot \sqrt{\sum_{j=1}^m (x_j \times p_j)^2}} \times \frac{|h_{E1} \cap h_{E2}|}{|h_{E1} \cup h_{E2}|} & (h_{E1}(P) \neq 0 \text{ 且 } h_{E2}(P) \neq 0), \\ 1 & (h_{E1}(P) = h_{E2}(P) = 0). \end{cases} \quad (11)$$

这里简记 $\{0(1)\} = 0$ 。通常在信息系统当中,不存在 $h_{E1}(P) = 0$ 的情况. 其中 x_i, p_i, x_j, p_j 分别是按照从小到大排列后相对应的隶属度和相关概率,若 $h_{E1}(P)$ 中元素个数不等于 $h_{E2}(P)$ 中元素个数,则根据概率为 0 的原则将其补齐。

性质 3 设 $h_{E1}(P)$ 和 $h_{E2}(P)$ 为 X 上两个概率犹豫模糊元, simc 满足以下性质:

- 1) $0 \leq \text{simc}(h_{E1}(P), h_{E2}(P)) \leq 1$;
- 2) $\text{simc}(h_{E1}(P), h_{E1}(P)) = 1$;
- 3) $\text{simc}(h_{E1}(P), h_{E2}(P)) = \text{simc}(h_{E2}(P), h_{E1}(P))$;
- 4) $\text{simc}(h_{E1}(P), h_{E2}(P)) = 0$, 其中 $h_{E1}(P) = 0$ 或 $h_{E2}(P) = 0$ 且 $h_{E1}(P) \neq h_{E2}(P)$, 或者 $|h_{E1} \cap h_{E2}| = 0$ 。

证明 这些性质显然成立。

根据公式 (11) 定义概率犹豫模糊元的得分函数集为:

$$h_{ij}(p) = \{ \text{simc}(h_{ij}(P), h_{kj}(P)) | k = 1, 2, \dots, m \}。$$

定义 19 $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ 为备选方案集, $C = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ 为属性集, 设 $h_{ij}(P)$ 和 $h_{kj}(P)$ 分别为第 i 个和第 k 个备选方案相对于第 j 个属性下的两个概率犹豫模糊元, 则概率犹豫模糊元的得分函数定义如下:

$$\bar{h}_{ij} = \frac{\sum_{k=1}^m \text{simc}(h_{ij}(P), h_{kj}(P))}{m}, \tag{12}$$

其中 \bar{h}_{ij} 表示关于第 i 个方案的第 j 个属性的最终得分值。

2.3 借助 TOPSIS 法构造基于代表性的正负理想解

平均综合相似度越大则方案的代表性越强, 因此在考虑代表性强弱的排序问题时, 可以利用平均综合相似度来构造正负理想解, 即利用得分函数 (定义 19) 来确定正负理想得分函数矩阵如表 3 所示。

表 3 得分函数矩阵

Table 3 Matrix of score function

X	c_1	c_2	\dots	c_n
x_1	\bar{h}_{11}	\bar{h}_{12}	\dots	\bar{h}_{1n}
x_2	\bar{h}_{21}	\bar{h}_{22}	\dots	\bar{h}_{2n}
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
x_m	\bar{h}_{m1}	\bar{h}_{m2}	\dots	\bar{h}_{mn}

构造基于代表性的正、负理想解分别为每一列中得分函数的最大最小值, 即:

$$r^+ = \left\{ \max_{i=1}^m \left\{ \bar{h}_{ij} \right\}, j = 1, 2, \dots, n \right\}, r^- = \left\{ \min_{i=1}^m \left\{ \bar{h}_{ij} \right\}, j = 1, 2, \dots, n \right\}。$$

其中 $\max_{i=1}^m (\bar{h}_{ij})$ 表示 c_j 属性下得分函数的最大值对应的位置 i 处的元素。例如若 $\max_{i=1}^m (\bar{h}_{ij}) = \bar{h}_{21}$ 表示综合专家决策矩阵表 2 中第二行第一列的元素, 即 $\bar{h}_{21}(P)$ 。

3 改进专家和属性权重的确定方法

3.1 基于对数的距离函数的专家综合权重的确定

为了使专家决策结果更贴近实际情况, Mao 等^[42] 提出了一种调整专家权重的方法。该方法结合了主观赋权和客观计算, 根据专家决策信息的一致性来调整权重。具体来说, 当专家提供的决策信息一致时, 其权重提高; 反之则降低。这里利用基于对数的距离函数改进 Mao 的调整专家权重方法。

专家 D_k 和 D_r 的一致性度量为: $\rho_{kr} = 1 - \frac{d(M^k, M^r)}{\sum_{k \neq 1, k \neq r}^l d(M^k, M^r)}$, 其中 $d(M^k, M^r)$ 由公式(4)得出, $d(M^k, M^r) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n d_E(h_{ij}^k, h_{ij}^r)$ 。这里 ρ_{kr} 越大则一致性程度越高。专家的综合一致性度量: $\rho_k = \frac{\sum_{r=1, k \neq r}^l \rho_{kr}}{l-1}$ 。由上式可知, ρ_k 表示专家 D_k 的综合一致性程度, 即去除专家 D_k 提出的决策信息在所有专家提出的决策信息中占比的均值, 也就是一种重要程度。因此通过事先赋予的主管专家权重 η_k 和综合一致性度量 ρ_k 来确定最终的专家权重 θ_k , 其公式如下:

$$\theta_k = \frac{\rho_k \eta_k}{\sum_{k=1}^l \rho_k \eta_k} \tag{13}$$

3.2 专家群共识

在多属性群决策过程中, 专家的意见难免会出现分歧, 而较大的分歧会降低专家决策的可信度, 决策结果不可靠。本文采用距离函数来衡量每一个专家的决策矩阵与共识矩阵之间的差异, 当发现专家的决策矩阵与共识矩阵存在显著差异时, 我们会对该专家的决策进行调整, 以减小这种差异, 实现群共识。专家群共识决策步骤如下:

1) 计算每一个专家决策矩阵的期望矩阵。

对于给定专家 D_r , 若 $x_i \in U, c_j \in C$, 则 x_i 相对于 c_j 的概率犹豫模糊元为

$$h_{E_j}(P) = \left\{ \gamma_k(p_k), k = 1, 2, \dots, |h_{E_j}(P)| \left| \sum_{k=1}^{|h_{E_j}(P)|} p_k = 1 \right. \right\},$$

则 x_i 相对于 c_j 的概率犹豫模糊元的期望为 $E(h_{E_j}(P)) = \sum_{k=1}^{|h_{E_j}(P)|} \gamma_k \cdot p_k$, 在此专家下的期望矩阵为 $E(D_r) = \left(E(D_r)_{ij} \right)_{m \times n}$ 。

2) 根据每一个专家的期望矩阵, 计算多个专家的共识矩阵。

令每个专家的期望矩阵的算术平均作为共识矩阵 $Econ$, 即共识矩阵为 $Econ = \frac{1}{s} \sum_{r=1}^s E(D_r)$ 。

给定 $\zeta > 0$, 若 $\frac{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |E(D_r)_{ij} - Econ_{ij}|}{m \times n} > \zeta$, 则认为专家 D_r 不满足共识, 需要对其进行修订, 否则无须修订, 为共识决策信息。

3) 根据共识矩阵 $Econ$, 设置一个阈值 $\sigma \in [0, 1]$, 根据加权计算公式修改每一个专家的期望矩阵。 $E(D_r)' = E(D_r) \cdot (1 - \sigma) + Econ \cdot \sigma = \left(E(D_r)'_{ij} \right)_{m \times n}$ 。

4) 我们对不满足共识条件的专家决策矩阵中的概率进行修订, 公式如下:

$$p'_k = \begin{cases} p_k \times \frac{E(D_r)'_{ij}}{E(D_r)_{ij}}, & r_k > Econ \\ p_k \times \frac{E(D_r)_{ij}}{E(D_r)'_{ij}}, & r_k < Econ \\ p_k = p_k, & r_k = Econ \end{cases}$$

并将概率归一化。 $\forall x_i \in U, c_j \in C, x_i$ 相对于 c_j 的修改后的概率犹豫模糊元为: $h_{E_j}(P)' = \left\{ \gamma_k(p'_k), k = 1, 2, \dots, |h_{E_j}(P)| \left| \sum_{k=1}^{|h_{E_j}(P)|} p'_k = 1 \right. \right\}$, 经过多次修订可实现专家间的群共识。

3.3 属性权重的确定

属性权重是衡量属性重要程度的关键指标。本文基于 Xu 等^[35]提出的属性确定方法, 通过引

入基于对数的距离函数和最小距离构建属性权重模型 M 。

针对专家共识修订后的综合决策矩阵建立求解属性权重模型 M ：

$$M = \min \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \omega_j^2 d(\bar{h}_{ij}(P'), r_j^+(P'))^2,$$

其中 $0 \leq \omega_j \leq 1$, $\sum_{j=1}^n \omega_j = 1$ 。 $\bar{h}_{ij}(p')$ ($i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$) 由修订后的综合决策矩阵确定。 $r_j^+(P')$ 表示正理想解的第 j 个概率犹豫模糊元。

我们通过构造拉格朗日函数 $M(\omega, \lambda)$, 其中 λ 为实数, 来求解该模型,

$$M(\omega, \lambda) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \omega_j^2 d(\bar{h}_{ij}(P'), r_j^+(P'))^2 - \lambda \left(\sum_{j=1}^n \omega_j - 1 \right)$$

对 $M(\omega, \lambda)$ 求偏导, 可得:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n 2\omega_j d(\bar{h}_{ij}(P'), r_j^+(P'))^2 - \lambda = 0, \\ \sum_{j=1}^n \omega_j - 1 = 0. \end{cases} \quad (14)$$

根据公式(14)可得:

$$\omega_j = \frac{\lambda}{2 \sum_{i=1}^m d(\bar{h}_{ij}(P'), r_j^+(P'))^2}. \quad (15)$$

将(15)式代入(14)可得:

$$\lambda = \frac{1}{\sum_{j=1}^n \frac{1}{2 \sum_{i=1}^m d(\bar{h}_{ij}(P'), r_j^+(P'))^2}}. \quad (16)$$

将公式(16)代入公式(15)中, 可以解出属性对应的权重为:

$$\omega_j = \frac{\left(\sum_{i=1}^m d(\bar{h}_{ij}(P'), r_j^+(P'))^2 \right)^{-1}}{\sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m d(\bar{h}_{ij}(P'), r_j^+(P'))^2 \right)^{-1}}. \quad (17)$$

3.4 基于对数的距离函数和群共识下基于代表性的排序算法

我们通过综合相似度求解出概率犹豫模糊数的得分函数, 求出基于代表性的正负理想解, 并通过基于对数的距离函数求出属性权重, 最终采用贴进度对备选方案进行排序。具体步骤如下:

输入: 每个专家决策信息矩阵, $\eta_k, k = 1, 2, \dots, s, \zeta, \sigma$ 。

输出: 最优备选方案的排序。

步骤1: 利用3.1节中的调节系数的公式(13), 进行专家综合权重的确定。

步骤2: 根据阈值 ζ 进行共识矩阵判断, 并根据阈值 σ 进行修订, 本文设置修订一次可达成群共识。

步骤3: 根据2.4节, 利用各个专家的综合权重聚合各个专家的决策矩阵, 建立一个综合决策矩阵。 $\text{Max } \bar{M} = (\bar{h}_{ij}(P))_{m \times n}$, $\bar{h}_{ij}(P) = \left\{ \gamma_l^i(p_{ij}^-) \mid l = 1, 2, \dots, |h(P)| \right\}$, $|h(P)| = |h_j^1 \cup h_j^2 \cdots \cup h_j^s|$ 。

步骤4: 根据定义18中的综合相似度、定义19中的得分函数以及3.2节, 对综合专家矩阵利用得分函数确定基于代表性的正负理想解。其中 r^+ 表示正理想解, r^- 表示负理想解。

步骤5: 根据公式(17)以及基于对数的距离函数, 获得综合决策矩阵的属性权重。

步骤6: 确定备选方案与基于代表性的正负理想解的距离, 其中,

$$d_i^+ = d(r^+, x_i) = \left(\sum_{j=1}^n \omega_j d_E(h_{ij}, d_j^+) \right), d_i^- = d(r^-, x_i) = \left(\sum_{j=1}^n \omega_j d_E(h_{ij}, d_j^-) \right).$$

x_i 表示专家综合矩阵中第 i 个备选方案。

步骤7:确定备选方案的贴进度。然后进行基于代表性强弱的排序。这里的贴进度采用了Ou等^[43]定义的贴进度公式: $\Xi_i = \frac{1}{2} \left(\frac{d_i^-}{d_{\max}^-} + \frac{d_i^+}{d_{\min}^+} \right)$,其中 $d_{\max}^- = \max_{i=1,2,\dots,m} \{d_i^-\}$, $d_{\min}^+ = \min_{i=1,2,\dots,m} \{d_i^+\}$ 。

步骤8:按照贴进度从大到小对备选方案进行排序。
具体流程如图1所示。

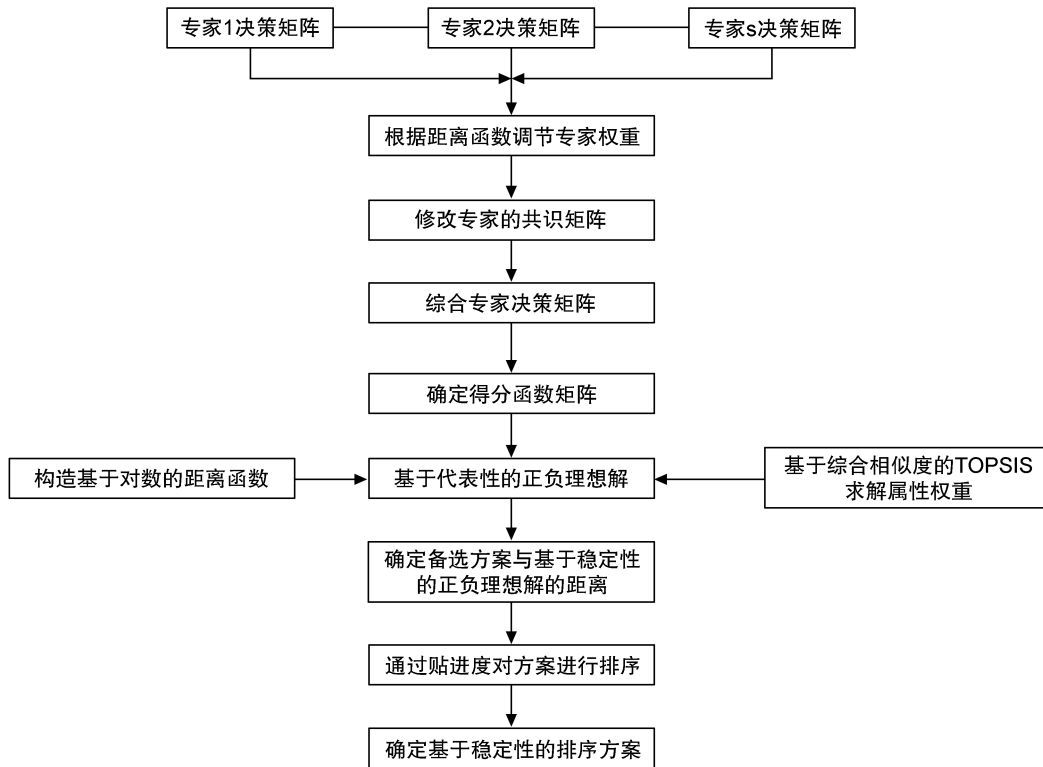


图1 基于代表性排序流程图

Fig. 1 Ranking flowchart based on the representativeness

4 通过实际案例进行算法的验证

4.1 汽车安全性能排序

随着社会的进步,汽车已成为家庭必备的交通工具。而汽车的安全性能是购买汽车的一项重要指标,因此,我们基于汽车的安全性能考虑最具代表性的排序方案。我们采用了文献[44]中购买汽车实例进行讨论。假设几位汽车安全专家要评估几种车型的安全性能:别克(x_1)、丰田(x_2)、福特(x_3)、奥迪(x_4)和特斯拉(x_5)。其中汽车的安全性能是由五个属性决定的,设 $C = \{c_1, c_2, \dots, c_5\}$,其中 c_1 表示制动系统, c_2 表示防抱死系统, c_3 表示车辆稳定系统, c_4 表示辅助约束系统, c_5 表示车身板。三位安全专家 $D = \{D_1, D_2, D_3\}$ 使用概率犹豫模糊元进行评估五种车型,如表4—表6所示。专家的主观权重设为 $\eta = \{0.4, 0.4, 0.2\}$, $\zeta = 0.06$ 。

算法步骤准备:

第一步:首先对表4—表6专家决策矩阵当中的概率进行归一化处理,然后计算专家的综合权重。

1) 根据4.1节,首先通过公式(5)计算出各个专家之间的距离。

$$d(M^1, M^2) = 0.5828, d(M^1, M^3) = 0.5925, d(M^2, M^3) = 0.5337.$$

2) 判断专家之间的一致程度,并计算出各个专家之间的权重调节系数。

表4 专家1的决策矩阵

Table 4 Decision matrix for expert 1

X	c ₁	c ₂	c ₃	c ₄	c ₅
x ₁	{0.6(0.25),0.7(0.5), 0.8(0.25)}	{0.5(0.6),0.6(0.4)}	{0.6(0.8),0.7(0.2)}	{0.3(0.4),0.4(0.6)}	{0.6(0.3),0.7(0.3), 0.8(0.4)}
x ₂	{0.5(0.5),0.6(0.5)}	{0.4(0.3),0.5(0.3), 0.6(0.4)}	{0.5(0.2),0.6(0.3), 0.7(0.5)}	{0.6(0.6),0.7(0.2)}	{0.7(0.5),0.8(0.5)}
x ₃	{0.7(0.5),0.8(0.3)}	{0.3(0.2),0.4(0.4), 0.5(0.4)}	{0.5(0.2),0.6(0.8)}	{0.5(0.4),0.6(0.5)}	{0.6(0.3),0.7(0.7)}
x ₄	{0.8(0.5),0.85(0.3), 0.9(0.2)}	{0.7(0.6),0.8(0.2)}	{0.6(0.4),0.7(0.3), 0.8(0.3)}	{0.5(0.5),0.6(0.5)}	{0.7(0.7),0.8(0.3)}
x ₅	{0.65(0.5),0.75(0.5)}	{0.5(0.5),0.6(0.5)}	{0.7(0.3),0.8(0.7)}	{0.5(0.3),0.6(0.3), 0.7(0.4)}	{0.7(0.2),0.8(0.2), 0.9(0.4)}

$$\begin{aligned} \rho_{12} &= 0.4780, \rho_{13} = 0.4739, \rho_{21} = 0.5041, \\ \rho_{23} &= 0.5261, \rho_{31} = 0.4959, \rho_{32} = 0.5220, \\ \rho_1 &= 0.4759, \rho_2 = 0.5151, \rho_3 = 0.5089. \end{aligned}$$

3) 根据公式(12)计算出各个专家的综合权重。θ₁ = 0.3821, θ₂ = 0.4136, θ₃ = 0.2043。本文保留一位小数, θ₁ = 0.4, θ₂ = 0.4, θ₃ = 0.2。

表5 专家2的决策矩阵

Table 5 Decision matrix for expert 2

X	c ₁	c ₂	c ₃	c ₄	c ₅
x ₁	{0.5(0.5),0.7(0.5)}	{0.7(0.7),0.8(0.2), 0.9(0.1)}	{0.4(0.3),0.6(0.5)}	{0.5(0.3),0.6(0.4), 0.7(0.3)}	{0.7(0.4),0.8(0.6)}
x ₂	{0.5(0.4),0.6(0.6)}	{0.6(0.7),0.7(0.3)}	{0.6(0.3),0.7(0.4), 0.8(0.3)}	{0.6(0.5),0.7(0.5)}	{0.5(0.7),0.6(0.2), 0.8(0.1)}
x ₃	{0.5(0.2),0.6(0.3), 0.7(0.5)}	{0.7(0.6),0.8(0.4)}	{0.3(0.4),0.5(0.6)}	{0.6(0.5),0.7(0.2), 0.8(0.3)}	{0.6(0.5),0.7(0.5)}
x ₄	{0.7(0.4),0.8(0.4)}	{0.6(0.5),0.7(0.1), 0.8(0.4)}	{0.7(0.5),0.8(0.3), 0.9(0.2)}	{0.5(0.4),0.6(0.6)}	{0.7(0.2),0.8(0.6)}
x ₅	{0.6(0.5),0.7(0.4), 0.8(0.1)}	{0.6(0.4),0.7(0.6)}	{0.4(0.5),0.5(0.5)}	{0.7(0.4),0.8(0.4)}	{0.6(0.2),0.7(0.4), 0.8(0.4)}

表6 专家3的决策矩阵

Table 6 Decision matrix for expert 3

X	c ₁	c ₂	c ₃	c ₄	c ₅
x ₁	{0.6(0.3),0.7(0.5), 0.8(0.2)}	{0.6(0.4),0.7(0.4)}	{0.7(0.6),0.8(0.4)}	{0.65(0.4),0.7(0.2), 0.75(0.4)}	{0.6(0.2),0.7(0.8)}
x ₂	{0.6(0.5),0.7(0.3)}	{0.5(0.3),0.6(0.4), 0.7(0.3)}	{0.5(0.3),0.6(0.7)}	{0.6(0.8),0.8(0.2)}	{0.55(0.4),0.6(0.3), 0.65(0.3)}
x ₃	{0.5(0.3),0.6(0.7)}	{0.5(0.5),0.7(0.5)}	{0.6(0.5),0.7(0.3), 0.8(0.2)}	{0.6(0.2),0.7(0.4), 0.8(0.4)}	{0.7(0.4),0.8(0.4)}
x ₄	{0.5(0.3),0.6(0.4), 0.7(0.3)}	{0.5(0.3),0.6(0.3), 0.7(0.4)}	{0.7(0.2),0.8(0.6)}	{0.6(0.4),0.7(0.6)}	{0.7(0.6),0.8(0.4)}
x ₅	{0.7(0.5),0.8(0.5)}	{0.6(0.6),0.7(0.4)}	{0.5(0.2),0.6(0.4), 0.7(0.4)}	{0.7(0.8),0.8(0.2)}	{0.6(0.3),0.7(0.7)}

第二步:根据3.2节群体共识,计算专家的共识决策矩阵,并修订1次专家的决策矩阵,得到群共识决策矩阵如表7—表9所示。

第三步:由(2)式,将修订后的决策矩阵进行整合得到综合专家决策矩阵(r_{ij})如表10所示。

第四步:通过综合相似度公式(10)和公式(11),计算综合得分矩阵,如表11所示。

第五步:根据表11,我们可以得出正理想解为 $r^+ = \{r_{51}, r_{32}, r_{53}, r_{24}, r_{55}\}$, 负理想解为 $r^- =$

表7 专家1的群共识决策矩阵

Table 7 Group consensus decision matrix of expert 1

X	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5
x_1	$\left\{ \begin{matrix} 0.6(0.28), 0.7(0.48), \\ 0.8(0.24) \end{matrix} \right\}$	$\{0.5(0.61), 0.6(0.39)\}$	$\{0.6(0.79), 0.7(0.21)\}$	$\{0.3(0.4), 0.4(0.6)\}$	$\left\{ \begin{matrix} 0.6(0.29), 0.7(0.29), \\ 0.8(0.41) \end{matrix} \right\}$
x_2	$\{0.5(0.47), 0.6(0.53)\}$	$\left\{ \begin{matrix} 0.4(0.24), 0.5(0.24), \\ 0.6(0.51) \end{matrix} \right\}$	$\left\{ \begin{matrix} 0.5(0.2), 0.6(0.3), \\ 0.7(0.5) \end{matrix} \right\}$	$\{0.6(0.73), 0.7(0.27)\}$	$\{0.7(0.5), 0.8(0.5)\}$
x_3	$\{0.7(0.63), 0.8(0.37)\}$	$\left\{ \begin{matrix} 0.3(0.21), 0.4(0.4), \\ 0.5(0.4) \end{matrix} \right\}$	$\{0.5(0.22), 0.6(0.78)\}$	$\{0.5(0.33), 0.6(0.67)\}$	$\{0.6(0.27), 0.7(0.73)\}$
x_4	$\left\{ \begin{matrix} 0.8(0.5), 0.85(0.3), \\ 0.9(0.2) \end{matrix} \right\}$	$\{0.7(0.75), 0.8(0.25)\}$	$\left\{ \begin{matrix} 0.6(0.37), 0.7(0.28), \\ 0.8(0.35) \end{matrix} \right\}$	$\{0.5(0.45), 0.6(0.55)\}$	$\{0.7(0.69), 0.8(0.31)\}$
x_5	$\{0.65(0.49), 0.75(0.51)\}$	$\{0.5(0.5), 0.6(0.5)\}$	$\{0.7(0.3), 0.8(0.7)\}$	$\left\{ \begin{matrix} 0.5(0.24), 0.6(0.24), \\ 0.7(0.51) \end{matrix} \right\}$	$\left\{ \begin{matrix} 0.7(0.32), 0.8(0.23), \\ 0.9(0.46) \end{matrix} \right\}$

表8 专家2的群共识决策矩阵

Table 8 Group consensus decision matrix of expert 2

X	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5
x_1	$\{0.5(0.46), 0.7(0.54)\}$	$\left\{ \begin{matrix} 0.7(0.7), 0.8(0.2), \\ 0.9(0.1) \end{matrix} \right\}$	$\{0.4(0.38), 0.6(0.62)\}$	$\left\{ \begin{matrix} 0.5(0.33), 0.6(0.38), \\ 0.7(0.29) \end{matrix} \right\}$	$\{0.7(0.42), 0.8(0.58)\}$
x_2	$\{0.5(0.39), 0.6(0.61)\}$	$\{0.6(0.7), 0.7(0.3)\}$	$\left\{ \begin{matrix} 0.6(0.33), 0.7(0.38), \\ 0.8(0.29) \end{matrix} \right\}$	$\{0.6(0.51), 0.7(0.49)\}$	$\left\{ \begin{matrix} 0.5(0.68), 0.6(0.2), \\ 0.8(0.12) \end{matrix} \right\}$
x_3	$\left\{ \begin{matrix} 0.5(0.2), 0.6(0.3), \\ 0.7(0.5) \end{matrix} \right\}$	$\{0.7(0.6), 0.8(0.4)\}$	$\{0.3(0.4), 0.5(0.6)\}$	$\left\{ \begin{matrix} 0.6(0.52), 0.7(0.19), \\ 0.8(0.29) \end{matrix} \right\}$	$\{0.6(0.48), 0.7(0.52)\}$
x_4	$\{0.7(0.51), 0.8(0.49)\}$	$\left\{ \begin{matrix} 0.6(0.51), 0.7(0.1), \\ 0.8(0.39) \end{matrix} \right\}$	$\left\{ \begin{matrix} 0.7(0.52), 0.8(0.29), \\ 0.9(0.19) \end{matrix} \right\}$	$\{0.5(0.39), 0.6(0.61)\}$	$\{0.7(0.26), 0.8(0.74)\}$
x_5	$\left\{ \begin{matrix} 0.6(0.49), 0.75(0.41), \\ 0.8(0.1) \end{matrix} \right\}$	$\{0.6(0.42), 0.7(0.58)\}$	$\{0.4(0.5), 0.5(0.5)\}$	$\{0.7(0.5), 0.8(0.5)\}$	$\left\{ \begin{matrix} 0.6(0.2), 0.7(0.39), \\ 0.8(0.41) \end{matrix} \right\}$

表9 专家3的群共识决策矩阵

Table 9 Group consensus decision matrix of expert 3

X	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5
x_1	$\left\{ \begin{matrix} 0.6(0.31), 0.7(0.49), \\ 0.8(0.19) \end{matrix} \right\}$	$\{0.6(0.51), 0.7(0.49)\}$	$\{0.7(0.6), 0.8(0.4)\}$	$\left\{ \begin{matrix} 0.65(0.4), 0.7(0.2), \\ 0.75(0.4) \end{matrix} \right\}$	$\{0.6(0.2), 0.7(0.8)\}$
x_2	$\{0.6(0.62), 0.7(0.38)\}$	$\left\{ \begin{matrix} 0.5(0.31), 0.6(0.39), \\ 0.7(0.29) \end{matrix} \right\}$	$\{0.5(0.3), 0.6(0.7)\}$	$\{0.6(0.8), 0.8(0.2)\}$	$\left\{ \begin{matrix} 0.55(0.39), 0.6(0.3), \\ 0.65(0.32) \end{matrix} \right\}$
x_3	$\{0.5(0.3), 0.6(0.7)\}$	$\{0.5(0.51), 0.7(0.49)\}$	$\left\{ \begin{matrix} 0.6(0.5), 0.7(0.3), \\ 0.8(0.2) \end{matrix} \right\}$	$\left\{ \begin{matrix} 0.6(0.22), 0.7(0.39), \\ 0.8(0.39) \end{matrix} \right\}$	$\{0.7(0.5), 0.8(0.5)\}$
x_4	$\left\{ \begin{matrix} 0.5(0.3), 0.6(0.4), \\ 0.7(0.3) \end{matrix} \right\}$	$\left\{ \begin{matrix} 0.5(0.28), 0.6(0.28), \\ 0.7(0.43) \end{matrix} \right\}$	$\{0.7(0.16), 0.8(0.74)\}$	$\{0.6(0.4), 0.7(0.6)\}$	$\{0.7(0.59), 0.8(0.41)\}$
x_5	$\{0.7(0.52), 0.8(0.48)\}$	$\{0.6(0.61), 0.7(0.39)\}$	$\left\{ \begin{matrix} 0.5(0.2), 0.6(0.41), \\ 0.7(0.39) \end{matrix} \right\}$	$\{0.7(0.8), 0.8(0.2)\}$	$\{0.6(0.3), 0.7(0.7)\}$

表10 综合专家决策矩阵

Table 10 Decision matrix of comprehensive expert

X	c ₁	c ₂	c ₃	c ₄	c ₅
x ₁	$\left\{ \begin{matrix} 0.5(0.18), 0.6(0.17), \\ 0.7(0.51), 0.8(0.13) \end{matrix} \right\}$	$\left\{ \begin{matrix} 0.5(0.24), 0.6(0.26), \\ 0.7(0.38), 0.8(0.08), \\ 0.9(0.04) \end{matrix} \right\}$	$\left\{ \begin{matrix} 0.4(0.15), 0.6(0.56), \\ 0.7(0.2), 0.8(0.08) \end{matrix} \right\}$	$\left\{ \begin{matrix} 0.3(0.16), 0.4(0.24), \\ 0.5(0.13), 0.6(0.15), \\ 0.65(0.08), 0.7(0.16), \\ 0.75(0.08) \end{matrix} \right\}$	$\left\{ \begin{matrix} 0.6(0.16), 0.7(0.44), \\ 0.8(0.4) \end{matrix} \right\}$
x ₂	$\left\{ \begin{matrix} 0.5(0.34), 0.6(0.58), \\ 0.7(0.08) \end{matrix} \right\}$	$\left\{ \begin{matrix} 0.4(0.1), 0.5(0.16), \\ 0.6(0.56), 0.7(0.18) \end{matrix} \right\}$	$\left\{ \begin{matrix} 0.5(0.14), 0.6(0.39), \\ 0.7(0.35), 0.8(0.12) \end{matrix} \right\}$	$\left\{ \begin{matrix} 0.6(0.66), 0.7(0.3) \\ 0.8(0.04) \end{matrix} \right\}$	$\left\{ \begin{matrix} 0.5(0.27), 0.55(0.08), \\ 0.6(0.14), 0.65(0.06), \\ 0.7(0.2), 0.8(0.25) \end{matrix} \right\}$
x ₃	$\left\{ \begin{matrix} 0.5(0.14), 0.6(0.26), \\ 0.7(0.45), 0.8(0.15) \end{matrix} \right\}$	$\left\{ \begin{matrix} 0.3(0.08), 0.4(0.16), \\ 0.5(0.26), 0.7(0.34), \\ 0.8(0.16) \end{matrix} \right\}$	$\left\{ \begin{matrix} 0.3(0.16), 0.5(0.33), \\ 0.6(0.41), 0.7(0.06), \\ 0.8(0.04) \end{matrix} \right\}$	$\left\{ \begin{matrix} 0.5(0.13), 0.6(0.52), \\ 0.7(0.15), 0.8(0.19) \end{matrix} \right\}$	$\left\{ \begin{matrix} 0.6(0.3), 0.7(0.6), \\ 0.8(0.1) \end{matrix} \right\}$
x ₄	$\left\{ \begin{matrix} 0.5(0.06), 0.6(0.08), \\ 0.7(0.26), 0.8(0.4), \\ 0.85(0.12), 0.9(0.08) \end{matrix} \right\}$	$\left\{ \begin{matrix} 0.5(0.06), 0.6(0.26), \\ 0.7(0.43), 0.8(0.26) \end{matrix} \right\}$	$\left\{ \begin{matrix} 0.6(0.15), 0.7(0.37), \\ 0.8(0.4), 0.9(0.08) \end{matrix} \right\}$	$\left\{ \begin{matrix} 0.5(0.34), 0.6(0.53), \\ 0.7(0.12) \end{matrix} \right\}$	$\{0.7(0.5), 0.8(0.5)\}$
x ₅	$\left\{ \begin{matrix} 0.6(0.2), 0.65(0.2), \\ 0.7(0.1), 0.75(0.37), \\ 0.8(0.14) \end{matrix} \right\}$	$\left\{ \begin{matrix} 0.5(0.2), 0.6(0.49), \\ 0.7(0.31) \end{matrix} \right\}$	$\left\{ \begin{matrix} 0.4(0.2), 0.5(0.24), \\ 0.6(0.08), 0.7(0.2), \\ 0.8(0.28) \end{matrix} \right\}$	$\left\{ \begin{matrix} 0.5(0.1), 0.6(0.1), \\ 0.7(0.56), 0.8(0.24) \end{matrix} \right\}$	$\left\{ \begin{matrix} 0.6(0.14), 0.7(0.42), \\ 0.8(0.26), 0.9(0.18) \end{matrix} \right\}$

{r₄₁, r₅₂, r₂₃, r₁₄, r₁₅}。

第六步:利用公式(17)中,计算属性权重 $\omega = (0.1842, 0.2457, 0.3151, 0.1018, 0.1532)$ 。

第七步:计算备选方案到基于代表性的正负理想解的距离 d_i^+ 和 d_i^- 。

$$d_1^+ = 0.1735, d_2^+ = 0.1631, d_3^+ = 0.1613, d_4^+ = 0.1887, d_5^+ = 0.1426;$$

$$d_1^- = 0.1498, d_2^- = 0.1956, d_3^- = 0.1706, d_4^- = 0.1907, d_5^- = 0.1401。$$

第八步:根据贴进度公式计算每个方案的贴进度。

$$\Xi_1 = 1.8722, \Xi_2 = 2.2457, \Xi_3 = 2.0804, \Xi_4 = 2.0929, \Xi_5 = 1.9818。$$

第九步:根据贴进度从大到小对备选方案进行基于代表性的排序。最终排序为 $\Xi_1 < \Xi_5 < \Xi_3 < \Xi_4 < \Xi_2$ 。表明安全性能方面代表性最好的车是丰田 x_2 。

4.2 综合分析

为了证明所提出的方法的可行性及有效性,我们将本文的方法与前景理论方法、相对熵结合 TOPSIS 法、前景理论 TOPSIS 法等几种方法进行了对比分析,结果如表 12 所示。其中本文方法记为 BW,其中数据已经过归一化处理,而前景理论法 QJ,相对熵 TOPSIS 法 ET,前景理论 TOPSIS 法 QT,本文不考虑群共识方法 BN 均未通过概率归一化处理。

表11 专家的得分函数

Table 11 Expert's scoring function

X	c ₁	c ₂	c ₃	c ₄	c ₅
x ₁	0.611	0.408	0.639	0.472	0.417
x ₂	0.598	0.584	0.435	0.653	0.557
x ₃	0.585	0.671	0.608	0.573	0.490
x ₄	0.366	0.424	0.583	0.517	0.443
x ₅	0.625	0.337	0.649	0.507	0.562

表12 对不同函数方法的排序结果

Table 12 Ranking results of different function methods

排序方法	BW	QJ	ET	QT	BN
x ₁	5	3	3	2	3
x ₂	1	5	4	4	5
x ₃	3	4	5	5	2
x ₄	2	2	1	1	1
x ₅	4	1	2	3	4

从表 12 中可以看出,根据不同的距离测度基于方案优势排序,基本都是 x_4 排在第一或第二的位置,所以可以得出结论:购买 x_4 品牌的车的安全性能相对较高一些。而本文考虑的是基于代表性排序,此时 x_2 对安全性能的代表性最好, x_4 的代表性相对较好,综合可知 x_4 作为最优选择方案更合适。

与前景理论方法相比,本文属性权重的确定是通过主客观结合的方法来求解,且在属性权重未知的情况下,对专家的权重系数进行了一致性的调节,从而更加侧重于客观性的提升。再加上排序的侧重不同,数据进行了归一化处理,因此产生差异,本文所提出的方法得出的排序结果为丰田 x_2 ,而采用前景理论的方法的排序结果为特斯拉,但两者综合可知 x_4 更优。

相对熵 TOPSIS 法与本文的方法得出的最优结果不相同,这可能是由于本文方法在调节了专家权重系数的基础上,再加上排序侧重不同,综合分析 x_4 更优。

前景理论 TOPSIS 法和本文提出的方法的排序结果不同,这可能是因为在前景理论 TOPSIS 方法基础上,除排序侧重不同之外,还额外考虑了专家决策的相似度,进一步区分了专家的主观影响,从而导致排序结果的不同,但综合两种排序后,最优选择还是 x_4 。

为了进一步的验证本文所提出算法的可行性和有效性。我们对比分析了不同数据集。鉴于以下两个数据集仅提供了综合决策矩阵,我们在此假设它们已经满足了专家共识的条件。

引用了某公司选址实际案例^[45]进行分析,排序结果如图2所示。根据刘梦迪等^[45]改进的距离函数算法,排序结果为 $x_1 > x_3 > x_4 > x_2$,最优备选方案为 x_1 。使用本文算法得到的排序结果为 $x_2 > x_4 > x_1 > x_3$ 。由于本文的专家权重结合了主观和客观因素,而原文仅采用主观权重,因此通过相同的主观权重结合本文算法,得到的排序结果为 $x_1 > x_4 > x_3 > x_2$ 且原始数据的排序居中的方案代表性强。由此可见,属性权重对排序结果有显著影响。因此本文排序合理并且主客观结合的权重形式得到的排序更合理。

通过引用欧阳金鹏^[46]的在线会议软件评估数据集,我们进行验证分析并得到图3。原文采用优势度差异构造正负理想解。尽管原文与本文在备选方案的排序上存在差异,但两者所确定的最优备选方案是一致的。排序差异主要源于原文使用的距离函数不一样,并且主观设定了 θ 值进行调节,这在一定程度上限制了方法的客观性。而本文通过采用对数函数构建距离函数,并结合主客观方法调整专家权重,有效减少了主观影响,增强了方法的客观性和稳定性。

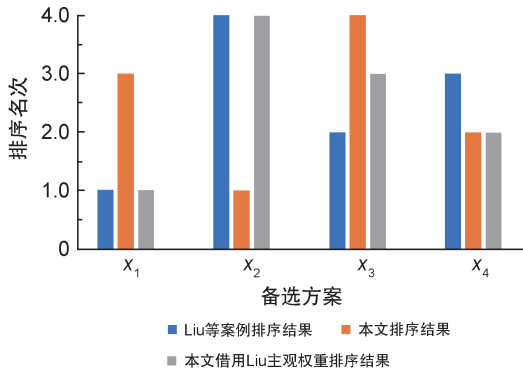


图2 某公司地址选择排序方案

Fig. 2 A company's address selection ranking scheme

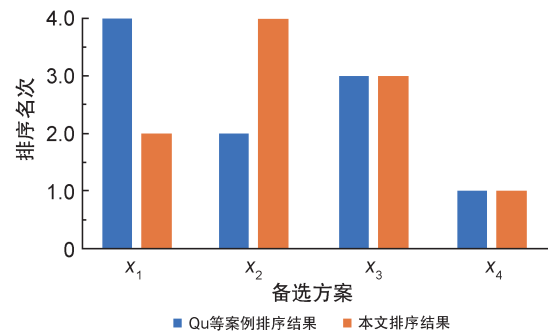


图3 在线会议软件评估案例排序

Fig. 3 The ranking of evaluation cases of online meeting software

4.3 较大数据集分析

为了进一步的验证本文算法的有效性,我们引入了Renjith^[47]提供的UCI数据集,该数据集包括对东亚地区的10个类别的目的地的评论。为了适配本文的概率犹豫模糊信息系统,本文首先将UCI数据集以245列为一组均分为四个专家背景。每个专家背景包含49列作为一个犹豫模糊元,随后,我们对每个犹豫模糊元进行了归一化处理,并对10个目的地进行均值计算,处理结果如图4所示。其中,横坐标表示专家的数据个数,纵坐标表示专家归一化后的数据的值。接着,我们通过函数为每个值随机赋予0到1之间的概率值,然后令 $\eta = [0.25, 0.25, 0.25, 0.25]$, $\zeta = 0.5$, $\sigma = 0.8$,运用公式(3)构造综合专家决策矩阵,如图5所示。最终,通过计算得到了排序结果,如图6所示,并选择了备选方案为 x_3 作为代表性最好。

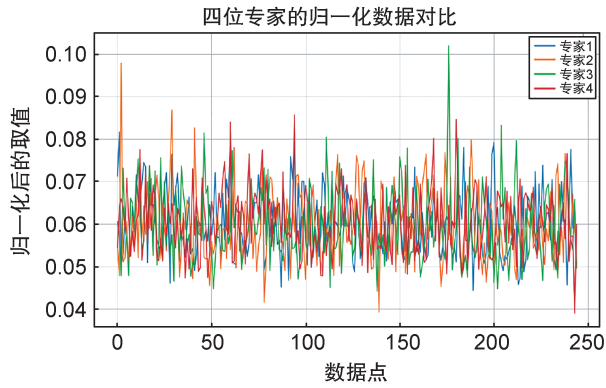


图4 各个专家决策矩阵归一化后得到的数据均值
 Fig. 4 The means of the normalization data of every expert's decision matrix

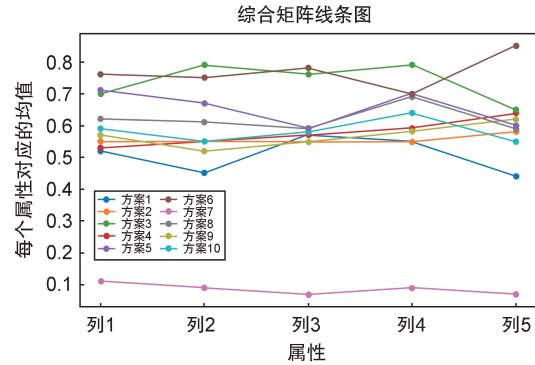


图5 每个方案相对于每个属性在综合专家矩阵中的均值
 Fig. 5 The means of each scheme relative to each attribute in the comprehensive expert matrix

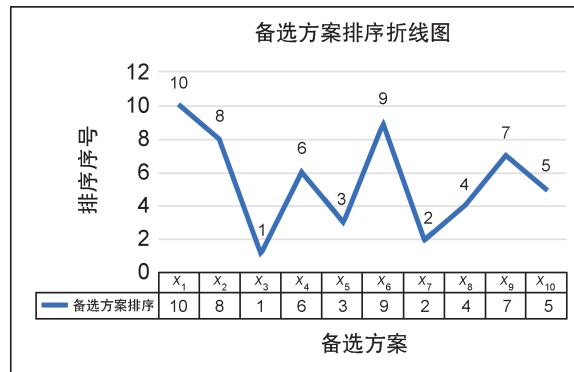


图6 备选方案最终排序结果
 Fig. 6 The final ranking result of the alternatives

通过对UCI较大数据的运算,证明了我们这个算法对于较大数据是可行的。

5 结论

本文针对多属性群决策问题,提出了一种融合概率犹豫模糊集的群共识下的基于代表性的综合决策模型。该模型以基于对数的距离函数和结合杰卡德相似系数提出的相似度量为基础,将专家的主观权重与客观权重相结合构建了更加客观的综合专家权重,以及属性权重分配方法。并在专家决策存在差异时,利用专家群共识方法,得到共识综合决策矩阵。在此基础上,借助新的距离函数,改进正负理想解的获取方法,进而实现基于代表性强弱的方案排序。通过实例分析发现,该模型在概率犹豫模糊环境下能够有效获得代表性最强的方案,并且该方法可行、有效。然而,本研究仍存在一些局限性。例如,探究如何在不完备的概率犹豫模糊信息系统中应用该模型,以应对更多复杂的决策需求。

参考文献:

[1] ZADEH L A. Information and Control[M]. New York: Academic Press,1965.

[2] 韩立岩,汪培庄.应用模糊数学2版[M].北京:首都经济贸易大学出版社,1998.

HAN L Y, WANG P Z. Application of Fuzzy Mathematics(Revised Edition)[M]. Beijing: Capital University of Economics & Business Press, 1998.

[3] 胡宝清.模糊理论基础[M].武汉:武汉大学出版社,2010.

HU B Q. Fundamentals of Fuzzy Theory[M]. Wuhan: Wuhan University Press, 2010.

[4] TORRA V. Hesitant Fuzzy Sets[J]. *Int J Intell Syst*, 2010: 529-539. DOI: 10.1002/int.20418.

[5] NARAYANAMOORTHY S, ANNAPOORANI V, KANG D, et al. A Novel Assessment of Bio-medical Waste Dis-

- posal Methods Using Integrating Weighting Approach and Hesitant Fuzzy MOOSRA[J]. *J Clean Prod*, 2020, **275**: 122587. DOI: 10.1016/j.jclepro.2020.122587.
- [6] KAYAPINAR KAYA S, ERGINEL N. Futuristic Airport: a Sustainable Airport Design by Integrating Hesitant Fuzzy SWARA and Hesitant Fuzzy Sustainable Quality Function Deployment[J]. *J Clean Prod*, 2020, **275**: 123880. DOI: 10.1016/j.jclepro.2020.123880.
- [7] 王国涛, 何丽娜. 基于犹豫模糊 DEMATEL 与风险屋的供应链风险管理[J]. *计算机集成制造系统*, 2021, **027**(5): 1459–1468. DOI: 10.13196/j.cims.2021.05.022.
- WANG G T, HE L N. Supply Chain Risk Management Based on Hesitant Fuzzy Dematel and Risk House[J]. *Comput Integr Manuf Syst*, 2021, **27**(5): 1459–1468. DOI: 10.13196/j.cims.2021.05.022.
- [8] 张明明. 基于犹豫模糊软集的研究生教学质量评价研究[D]. 郑州: 郑州航空工业管理学院, 2020. DOI: 10.19327/j.cnki.zuaxb.1007-1199.2019.03.006.
- ZHANG M M. Evaluation of Graduate Teaching Quality Based on Hesitation Fuzzy Soft Set[D]. Zhengzhou: Zhengzhou Institute of Aeronautical Industry Management, 2020. DOI: 10.19327/j.cnki.zuaxb.1007-1199.2019.03.006.
- [9] 朱斌. 基于偏好关系的决策方法及应用研究[D]. 南京: 东南大学, 2014.
- ZHU B. Decision Method for Research and Application Based on Preference Relation[D]. Nanjing: Southeast University, 2014.
- [10] 吴健, 刘小弟, 孙超勇, 等. 基于 GM(1, 1) 与灰色关联度的概率犹豫模糊信息应急决策方法[J]. *统计与决策*, 2020, **36**(2): 164–168. DOI: 10.13546/j.cnki.tjyc.2020.02.038.
- WU J, LIU X D, SUN C Y, et al. Emergency Decision-making Method of Probabilistic Hesitant Fuzzy Information Based on GM (1, 1) and Grey Relational Degree [J]. *Stat Decis*, 2020, **36**(2): 164–168. DOI: 10.13546/j.cnki.tjyc.2020.02.038.
- [11] ZHANG S, XU Z S, HE Y. Operations and Integrations of Probabilistic Hesitant Fuzzy Information in Decision Making[J]. *Inf Fusion*, 2017, **38**: 1–11. DOI: 10.1016/j.inffus.2017.02.001.
- [12] XU Z S, ZHANG S. An Overview on the Applications of the Hesitant Fuzzy Sets in Group Decision-making: Theory, Support and Methods[J]. *Front Eng Manag*, 2019, **6**(2): 163–182. DOI: 10.1007/s42524-019-0017-4.
- [13] SONG C Y, XU Z S, ZHAO H. New Correlation Coefficients between Probabilistic Hesitant Fuzzy Sets and Their Applications in Cluster Analysis[J]. *Int J Fuzzy Syst*, 2019, **21**(2): 355–368. DOI: 10.1007/s40815-018-0578-0.
- [14] DING J, XU Z S, ZHAO N. An Interactive Approach to Probabilistic Hesitant Fuzzy Multi-attribute Group Decision Making with Incomplete Weight Information[J]. *J Intell Fuzzy Syst*, 2017, **32**(3): 2523–2536. DOI: 10.3233/jifs-16503.
- [15] 曾维丹. 概率犹豫模糊集的距离测度及其应用研究[D]. 成都: 西华大学, 2020. DOI: 10.27411/d.cnki.gscgc.2020.000093.
- ZENG W D. Research on Distance Measurement and Application of Probabilistic Hesitation Fuzzy Sets [D]. Chengdu: Xihua University, 2020. DOI: 10.27411/d.cnki.gscgc.2020.000093.
- [16] LI J, WANG J Q. An Extended QUALIFLEX Method under Probability Hesitant Fuzzy Environment for Selecting Green Suppliers[J]. *Int J Fuzzy Syst*, 2017, **19** (6): 1866–1879. DOI: 10.1007/s40815-017-0310-5.
- [17] NING B Q, WANG H J, WEI G W, et al. Several Similarity Measures of Probabilistic Dual Hesitant Fuzzy Sets and Their Applications to New Energy Vehicle Charging Station Location[J]. *Alex Eng J*, 2023, **71**: 371–385. DOI: 10.1016/j.aej.2023.03.052.
- [18] SU Z, XU Z S, ZHAO H, et al. Entropy Measures for Probabilistic Hesitant Fuzzy Information[J]. *IEEE Access*, 2019, **7**: 65714–65727. DOI: 10.1109/ACCESS.2019.2916564.
- [19] BATOOL B, AHMAD M, ABDULLAH S, et al. Entropy Based Pythagorean Probabilistic Hesitant Fuzzy Decision Making Technique and Its Application for Fog-haze Factor Assessment Problem[J]. *Entropy*, 2020, **22**(3): 318. DOI: 10.3390/e22030318.
- [20] 夏小强, 张乐, 要丽娟等. 基于 AHP-模糊综合评价法的渭河河流健康评价[J]. *西北大学学报(自然科学版)*, 2024, **54**(3): 413–423. DOI: 10.16152/j.cnki.xdx-bzr.2024-03-007.
- XIA X Q, ZHANG L, YAO L J, et al. River Health Assessment of Weihe River Based on AHP-Fuzzy Comprehensive Evaluation Method[J]. *Northwest Univ Nat Sci Ed*, 2024, **54**(3): 413–426. DOI: 10.16152/j.cnki.xdx-bzr.2024-03-007.
- [21] JU J J, SHI W H, WANG Y. A Risk Assessment Approach for Road Collapse along Tunnels Based on an Improved Entropy Weight Method and K-means Cluster Algorithm[J]. *Ain Shams Eng J*, 2024, **15**(7): 102805. DOI: 10.1016/j.asej.2024.102805.
- [22] YU D J, PAN T X. Tracing Knowledge Diffusion of TOPSIS: a Historical Perspective from Citation Network[J]. *Expert Syst Appl*, 2021, **168**: 114238. DOI:

- 10.1016/j.eswa.2020.114238.
- [23] 殷仕淑, 信芳. 犹豫模糊集决策理论与方法综述[J]. 黄河科技学院学报, 2021, **23**(5): 26-34. DOI: 10.19576/j.issn.2096-790X.2021.05.006.
- YIN S S, XIN F. Review of Hesitant Fuzzy Set Decision Theory and Method[J]. *J Huanghe S&T Coll*, 2021, **23**(5): 26-34. DOI: 10.19576/j.issn.2096-790X.2021.05.006.
- [24] 高淑环, 刘萱, 王梦如等. 考虑愿景的动态多属性群决策共识模型[J]. 科技管理研究, 2019, **39**: 236-245. DOI: CNKI: SUN: KJGL. 0.2019-20-033.
- GAO S H, LIU X, WANG M R, *et al.* A Dynamic Multi Attribute Group Decision Consensus Model Considering Vision [J] *Res Technol Manag*, 2019, **39**: 236-245. DOI: CNKI:SUN:KJGL.0.2019-20-033.
- [25] 张发明, 朱姝琪. 基于EDAS和共识模型的动态概率语言多属性群决策方法[J]. 控制与决策, 2023, **38**(1): 1-8. DOI: 10.13195/j.kzyjc.2022.1329.
- ZHANG F M, ZHU S Q. A Dynamic Probability Language Multi-Attribute Group Decision Making Method Based on EDAS and Consensus Model[J]. *J Control*, 2023, **38**(1): 1-8. DOI: 10.13195/j.kzyjc.2022.1329.
- [26] 崔春生, 曹艳丽, 邱闯闯, 等. 基于证据理论和Vague集的多属性群决策方法研究[J]. 运筹与管理, 2021, **30**(11): 1-5. DOI: 10.12005/orms.2021.0341.
- CUI C S, CAO Y L, QIU C C, *et al.* Research on Multi-attribute Group Decision-making Method Based on Evidence Theory and Vague Sets[J]. *Oper Res Manag Sci*, 2021, **30**(11): 1-5. DOI: 10.12005/orms.2021.0341.
- [27] 常娟, 杜迎雪, 刘卫锋. 广义毕达哥拉斯犹豫模糊集混合加权距离测度及决策应用[J]. 浙江大学学报(理学版), 2021, **48**(3): 304-313. DOI: 10.3785/j.issn.1008-9497.2021.03.006.
- CHANG J, DU Y X, LIU W F. Generalized Pythagorean Hesitant Fuzzy Set Hybrid Weighted Distance Measure and Its Application to Decision Making[J]. *J Zhejiang Univ Sci Ed*, 2021, **48**(3): 304-313. DOI: 10.3785/j.issn.1008-9497.2021.03.006.
- [28] YUAN F C. Method for Pythagorean Interval 2-tuple Linguistic Multiattribute Group Decision Making and Its Application to the Ship Navigation Environment Safety Assessment[J]. *Discrete Dyn Nat Soc*, 2022, **2022**(1): 1-11. DOI: 10.1155/2022/6881900.
- [29] 王新鑫, 杨雁, 徐泽水, 等. 基于专家对应准则的犹豫模糊多属性群决策方法[J]. 模糊系统与数学, 2017, **31**(1): 101-108.
- WANG X X, YANG Y, XU Z S, *et al.* Hesitant Fuzzy Multiple Attribute Group Decision Making Method Based on Experts Corresponding Criterion[J]. *Fuzzy Syst Math*, 2017, **31**(1): 101-108.
- [30] 朱国成, 庄锡钊, 庄乐. 区间值犹豫模糊环境下的多属性群决策理论应用研究[J]. 广州大学学报(自然科学版), 2020, **19**(3): 32-42. DOI: 10.3969/j.issn.1671-4229.2020.03.003.
- ZHU G C, ZHUANG X Z, ZHUANG L/Y). Research on the Application of Multi-attribute Group Decision Making Theory in Interval-valued Hesitation Fuzzy Environment [J]. *J Guangzhou Univ Nat Sci Ed*, 2020, **19**(3): 32-42. DOI: 10.3969/j.issn.1671-4229.2020.03.003.
- [31] 陕振沛, 郭亚丹, 宁宝权, 等. 权重完全未知下基于投影的犹豫模糊多属性群决策方法及应用[J]. 数学的实践与认识, 2019, **49**(15): 173-183.
- SHAN Z P, GUO Y D, NING B Q, *et al.* The Method and Application of Hesitant Fuzzy Multi-attribute Group Decision Making Based on Projection under the Complete Unknown Weight[J]. *J Math Pract Theory*, 2019, **49**(15): 173-183.
- [32] 朱国成, 陈利群, 李峰. 解决概率犹豫模糊集多属性群决策问题的两种算法[J]. 东莞理工学院学报, 2022, **29**(5): 1-6.
- ZHU G C, CHEN L Q, LI F. Two Algorithms for Multi-Attribute Group Decision Making with Probabilistic Hesitant Fuzzy Sets [J]. *J Dongguan Univ Technol*, 2022, **29**(5): 1-6.
- [33] WANG Y B, JIA X L, ZHANG L X. Evaluation of the Survival of Yangtze Finless Porpoise under Probabilistic Hesitant Fuzzy Environment[J]. *Int J Intell Syst*, 2022, **37**(10): 7665-7684. DOI: 10.1002/int.22898.
- [34] 华维灿, 孙刚, 王贵君. 基于概率犹豫模糊相似度的交互式群体决策方法[J]. 浙江大学学报(理学版), 2022, **49**(4): 398-407. DOI: 10.3785/j.issn.1008-9497.2022.04.002.
- HUA W C, SUN G, WANG G J. Interactive Group Decision Making Method Based on Probabilistic Hesitant Fuzzy Similarity[J]. *J Zhejiang Univ Sci Ed*, 2022, **49**(4): 398-407. DOI: 10.3785/j.issn.1008-9497.2022.04.002.
- [35] XU Z S, ZHOU W. Consensus Building with a Group of Decision Makers under the Hesitant Probabilistic Fuzzy Environment[J]. *Fuzzy Optim Decis Mak*, 2017, **16**(4): 481-503. DOI: 10.1007/s10700-016-9257-5.
- [36] TAKAHASHI W. Nonlinear Functional Analysis: Fixed Point Theory and Its Applications[M]. Yokohama: Yokohama Publishers, 2000. DOI: 10.1007/978-1-4612-4566-7_21.
- [37] ZHANG X L, XU Z S. Interval Programming Method for Hesitant Fuzzy Multi-attribute Group Decision Making with Incomplete Preference over Alternatives[J].

- Comput Ind Eng*, 2014, **75**: 217-229. DOI: 10.1016/j.cie.2014.07.002.
- [38] 李洁璐. 基于概率犹豫模糊集的多属性群决策研究[D]. 郑州: 河南财经政法大学, 2024. DOI: 10.27113/d.cnki.ghncc.2023.000034.
- LI J L. Research on Multi-Attribute Group Decision Making Based on Probabilistic Hesitant Fuzzy Sets[D]. Zhengzhou: Henan University of Economics and Law, 2024. DOI: 10.27113/d.cnki.ghncc.2023.000034.
- [39] 陈大力, 沈岩涛, 谢槟竹, 等. 基于余弦相似度模型的最佳教练遴选算法[J]. 东北大学学报(自然科学版), 2014, **35**(12): 1697-1700. DOI: 10.3969/j.issn.1005-3026.2014.12.006.
- CHEN D L, SHEN Y T, XIE B Z, *et al.* A Measure Model of Similarity for Finding the Best Coach[J]. *Northeast Univ Nat Sci*, 2014, **35**(12): 1697-1700. DOI: 10.3969/j.issn.1005-3026.2014.12.006.
- [40] 杨家慧, 刘方爱. 基于巴氏系数和 Jaccard 系数德协同过滤算法[J]. 计算机应用, 2016, **36**(7): 2006-2010. DOI: 10.11772/j.issn.1001-9081.2016.07.2006.
- YANG J H, LIU F A. Collaborative Filtering Algorithm Based on Bhattacharyya Coefficient and Jaccard Coefficient[J]. *J Comput Appl*, 2016, **36**(7): 2006-2010. DOI: 10.11772/j.issn.1001-9081.2016.07.2006.
- [41] 逯绍锋, 胡玉龙, 逯跃锋. 保护隐私的集合相似性度量协同计算协议[J]. 计算机技术与发展, 2023, **33**(1): 137-143. DOI: 10.3969/j.issn.1673-629X.2023.01.021.
- LU S F, HU Y L, LU Y F. Collective Similarity Measurement Collaborative Computing Protocol for Protecting Privacy[J]. *Comput Technol Dev*, 2023, **33**(1): 137-143. DOI: 10.3969/j.issn.1673-629X.2023.01.021.
- [42] MAO X B, WU M, DONG J Y. *et al.* A New Method for Probabilistic Linguistic Multi-Attribute Group Decision Making: Application To The Selection of Financial Technologies[J]. *Appl Soft Comput*, 2019, **77**: 1-8. DOI: 10.1016/j.asoc.2019.01.009.
- [43] OU Y, YI L Z, ZOU B, *et al.* The Linguistic Intuitionistic Fuzzy Set TPOSI Method for Linguistic Multi-Criteria Decision Makings[J]. *Int J comput Int Sys*, 2018, **11**(1): 120-132. DOI: 10.2991/ijcis.11.1.10.
- [44] LIANG W, MARK G, WANG Y M. Multi-Attribute Group Decision Making Method Based on Prospect Theory Under Hesitant Probabilistic Fuzzy Environment[J]. *Comput Indu Eng*, 2020, **149**: 106804. DOI: 10.24432.C56KW.
- [45] 刘梦迪, 张贤勇, 莫智文. 基于改进距离测度的概率犹豫模糊多属性群决策新方法[J]. 山东大学学报(理学版), 2024, **59**(3): 118-126. DOI: 10.6040/j.issn.1671-9352.7.2023.4667.
- LIU M D, ZHANG X Y, MO Z W. A New Method for Probabilistic Hesitant Fuzzy Multi-Attribute Group Decision-Making Based on Improved Distance Measurement [J]. *J Shandong Univ Nat Ed*, 2024, **59**(3): 118-126. DOI: 10.6040/j.issn.1671-9352.7.2023.4667.
- [46] 欧阳金鹏. 新型距离测度在概率犹豫模糊多属性决策中的应用[J]. 巢湖学院学报, 2023, **25**(3): 62-68+78. DOI: 10.12152/j.issn.1672-2868.2023.03.008.
- OU YANG J P. Application of A New Distance Measure In Probabilistic Hesitant Fuzzy Multi-Attribute Decision-Making [J]. *J Chao hu Univ*, 2023, **25**(3): 62-68+78. DOI: 10.12152/j.issn.1672-2868.2023.03.008.
- [47] RENJITH S. Travel Reviews[DS]. University of California, Irvine: UCI Machine Learning Repository. <https://doi.org/10.24432/C56K6W>.