山西大学学报(自然科学版)48(2):373－380,2025
Journal of Shanxi University(Nat. Sci. Ed.)

DOI:10.13451/j.sxu.ns.2024156

具有边界反馈的Euler-Bernoulli方程的一致稳定性

白忠玉*
(新疆政法学院 基础教学部,新疆 图木舒克 843900)

摘　要:研究了一类Euler-Bernoulli方程的稳定性问题。在边界反馈条件下,利用算子半群、乘子法和变量替换,建立了能量衰减不等式,证明了Euler-Bernoulli方程的解是一致稳定的,推广了边界反馈控制作用的情形。
关键词:抽象系统;矩边界控制;正则性;算子半群;乘子法
中图分类号:O231.4　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:0253-2395(2025)02-0373-08

Uniform Stabilization for Euler-Bernoulli Equation with Boundary Feedback

BAI Zhongyu*
(*Basic Teaching Department, Xinjiang University of Political Science and Law, Tumushuke* 843900, *China*)

Abstract: The stability problem of a class of Euler-Bernoulli equation is studied. Under boundary feedback conditions, operator semigroups, multiplier methods, and variable substitution are used. The energy decay inequality is established. It is proved that the solution to the Euler-Bernoulli equation is uniformly stable, extending the application of boundary feedback control.
Key words: abstract system; moment boundary control; regularity; operator semigroup; multiplier method

0　引言

稳定性是控制系统理论中的基本问题之一,旨在研究系统的状态随时间变化的规律,在工程技术领域有广泛的应用,是一个具有实际意义的研究课题。在众多的稳定性问题中,Euler-Bernoulli方程的稳定性问题尤为引人关注。Euler-Bernoulli方程是描述弹性细长体(如梁、杆)横向振动的经典模型,其稳定性直接关系到结构的安全性和可靠性。因此,对Euler-Bernoulli方程的稳定性问题的研究引起了广大学者的兴趣[1-9],产生了一些研究方法,如谱方法、乘子法等,所取得的成果不断丰富和发展着偏微分方程中的稳定性理论。

在研究Euler-Bernoulli方程的稳定性时,能量衰减的耗散机制是通过不同的反馈控制设计来实现的。Wei等[10]设计了一种非线性反馈控制,利用单调算子理论,证明了具有局部扰动的Euler-Bernoulli方程的指数稳定性。Han等[11]构造了适当的Lyapunov函数,将指数稳定性问题转化为不等式方程的可解性,给出了具有内部时间延迟和边界阻尼的Euler-Bernoulli方程的指数稳定区域。Bai[12]在混合边界控制下,利用耗散反馈算子,建立了Euler-Bernoulli方程的能量衰减不等式。Fan等[13]设计了一种无限维扰动估计量,利用Riesz基方法,证明了在初始条件满足一定的平滑条件下,闭环系统是指数稳定的。Wang等[14]提出了鲁棒边界控制方法,利用算子半群理论和Lyapunov方法,给出

收稿日期:2024-06-26;**接受日期**:2024-11-19
基金项目:新疆政法学院校长基金(XZZK2023001);海南省自然科学基金(120RC663)
* **通信作者**:白忠玉(1980—),男,山东日照人,硕士,副教授,研究方向为分布参数系统控制理论。E-mail:610977231@qq.com
引文格式:白忠玉.具有边界反馈的Euler-Bernoulli方程的一致稳定性[J].山西大学学报(自然科学版),2025,48(2):373-380. DOI:10.13451/j.sxu.ns.2024156.

了闭环系统的适定性和一致有界性。Deng 等[15]在边界扰动的条件下,应用半群方法和 Lyapunov 函数,研究了非线性 Euler-Bernoulli 梁方程的稳定性。但以上文献没有考虑矩边界控制的问题。注意到,对 Schrödinger 方程稳定性的研究也提供了 Euler-Bernoulli 方程稳定性的研究思路,如 Rebiai[16]在耗散反馈作用下,应用抽象系统、变量替换和乘子法,讨论了 Schrödinger 方程的一致稳定性。

本文将文献[16]的方法应用到 Euler-Bernoulli 方程,在不对区域施加任何几何条件的情况下,考虑边界反馈仅通过矩起作用的情形,研究 Euler-Bernoulli 方程的一致稳定性,问题的关键是建立非齐次 Schrödinger 方程的一个正则性估计。

考虑 Euler-Bernoulli 方程:

$$\begin{cases} w_{tt}(x,t)+\Delta^2 w(x,t)=0, & (x,t)\in\Omega\times(0,+\infty), \\ w(x,t)=0, & (x,t)\in\Gamma\times(0,+\infty), \\ \dfrac{\partial\left(A^{-1}w_t(x,t)\right)}{\partial\nu}=\Delta w(x,t), & (x,t)\in\Gamma\times(0,+\infty), \\ w(x,0)=w_0, w_t(x,0)=w_1, & x\in\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

其中 Ω 是 R^n 中具有 C^3 光滑边界 $\Gamma=\partial\Omega$ 的有界开区域,ν 是 Γ 上的单位外法向量,算子 A: $Af=-\Delta f$,

$$f\in D(A)=H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)。$$

1 准备工作

注意到,用算子半群表示系统(1)的解比较方便。为此,定义算子 B: $L^2(\Gamma)\to L^2(\Omega)$ 为

$$Bg=v, \Delta v=0,\ v|_{\Gamma}=g,$$

由文献[17],

$$B\in\mathcal{L}\left(L^2(\Gamma);H^{1/2}(\Omega)\right), \tag{2}$$

于是系统(1)化为抽象形式:

$$\begin{cases} w_{tt}(\cdot,t)+A^2w(\cdot,t)+ABB^*w_t(\cdot,t)=0, \\ w(\cdot,0)=w_0\in D(A^{1/2}), w_t(\cdot,0)=w_1\in D(A^{1/2})', \end{cases} \tag{3}$$

其中 $D(A)'$ 是 $D(A)$ 关于 $L^2(\Omega)$ 的对偶空间。

由 Lummer-Phillips 定理[18]知,系统(3)是适定的。换句话说,系统(3)的解 (w,w_t) 可写为

$$(w,w_t)=S(t)(w_0,w_1), \tag{4}$$

其中 $S(t)$ 是空间 $H=D(A^{1/2})\times D(A^{1/2})'$ 上的 C_0-压缩半群。

定义系统(1)的解 $w(x,t)$ 的能量函数为

$$E(t)=\|A^{1/2}w\|_{L^2(\Omega)}^2+\|A^{-1/2}w_t\|_{L^2(\Omega)}^2。 \tag{5}$$

$\forall\alpha\in\mathbb{R}, t\geqslant\alpha$, 在系统(3)的第一个方程两边同乘 $A^{-1}w_t$,并从 0 到 t 积分,得

$$E(t)+\int_0^t\|B^*w_t\|_{L^2(\Gamma)}^2\mathrm{d}t=E(0)。 \tag{6}$$

这表明系统的能量是非增的。

为了下文的证明,还需引入新变量,令

$$z=A^{-1}w, \tag{7}$$

于是 z 满足

$$\begin{cases} z_{tt}+A^2z+BB^*Az_t=0, \\ z(\cdot,0)=A^{-1}w_0\in D(A^{3/2}), z_t(\cdot,0)=A^{-1}w_1\in D(A^{1/2})。 \end{cases} \tag{8}$$

此外,$\forall t\geqslant 0$, $E(t)$ 又可以写为

$$E(t)=\|A^{3/2}z\|_{L^2(\Omega)}^2+\|A^{-1/2}z_t\|_{L^2(\Omega)}^2=\|\nabla\Delta z\|_{L^2(\Omega)}^2+\|\Delta z_t\|_{L^2(\Omega)}^2。 \tag{9}$$

根据Green公式[19],得

$$B^*Az=\frac{\partial z}{\partial \boldsymbol{\nu}}, \tag{10}$$

由式(6)和式(9),得

$$E(t)+\int_0^t\left\|\frac{\partial z_t}{\partial \boldsymbol{\nu}}\right\|_{L^2(\Gamma)}^2 \mathrm{d}t=E(0), \tag{11}$$

因此

$$E(t)\leqslant E(0),\forall t\geqslant 0。 \tag{12}$$

2 主要结果及证明

本文的目的是证明系统(1)在空间$H_0^1(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)$上是一致稳定的,主要结果是下面的定理1。

定理1 设w是系统(1)的解,则存在常数$C>0,\delta>0$, 使得

$$\|w\|_{H_0^1(\Omega)}+\|w_t\|_{H^{-1}(\Omega)}\leqslant Ce^{-\delta t}\left[\|w_0\|_{H_0^1(\Omega)}+\|w_1\|_{H^{-1}(\Omega)}\right]。 \tag{13}$$

在证明定理1之前,先给出如下一些引理和证明。

引理1 设z是系统(8)的解,$T>0$, 则存在$C>0$, 使得

$$\|\nabla z_t\|_{L^2(\Omega\times(0,T))}^2+\|\nabla\Delta z\|_{L^2(\Omega\times(0,T))}^2\leqslant C\left[\left\|\frac{\partial z_t}{\partial \boldsymbol{\nu}}\right\|_{L^2(\Gamma\times(0,T))}^2+\left\|\frac{\partial(\Delta z)}{\partial \boldsymbol{\nu}}\right\|_{L^2(\Gamma\times(0,T))}^2+E(0)\right]。 \tag{14}$$

证明 由式(10),得

$$B^*Az_t=\frac{\partial z_t}{\partial \boldsymbol{\nu}}, \tag{15}$$

系统(8)化为

$$\begin{cases} z_{tt}+\Delta^2 z+B\dfrac{\partial z_t}{\partial \boldsymbol{\nu}}=0, & (x,t)\in\Omega\times(0,T),\\ z=\Delta z=0, & (x,t)\in\Gamma\times(0,T)。\end{cases} \tag{16}$$

令$h(x)=x-x_0,x_0\in\mathbb{R}^n$。首先,在系统(16)的第一个方程两边同乘$h\cdot\nabla\Delta z$,并在$\Omega\times(0,T)$上积分,得

$$\begin{aligned}&\|\nabla\Delta z\|_{L^2(\Omega\times(0,T))}^2+\|\nabla z_t\|_{L^2(\Omega\times(0,T))}^2+\frac{n}{2}\left(\|\nabla z_t\|_{L^2(\Omega\times(0,T))}^2-\|\nabla\Delta z\|_{L^2(\Omega\times(0,T))}^2\right)=\\ &\frac{1}{2}\left\|\frac{\partial z_t}{\partial \boldsymbol{\nu}}\right\|_{L^2(\Gamma\times(0,T))}^2+\frac{1}{2}\left\|\frac{\partial(\Delta z)}{\partial \boldsymbol{\nu}}\right\|_{L^2(\Gamma\times(0,T))}^2+\left(z_t,h\nabla(\Delta z)\right)_\Omega\Big|_0^T+\left(B\frac{\partial z_t}{\partial \boldsymbol{\nu}},h\nabla(\Delta z)\right)_{\Omega\times(0,T)}。\end{aligned} \tag{17}$$

其次,在系统(16)的第一个方程两边同乘Δz,并在$\Omega\times(0,T)$上积分,得

$$\left(\|\nabla z_t\|_{L^2(\Omega\times(0,T))}^2-\|\nabla\Delta z\|_{L^2(\Omega\times(0,T))}^2\right)=-(\Delta z,z_t)_\Omega\Big|_0^T-\left(B\frac{\partial z_t}{\partial \boldsymbol{\nu}},\Delta z\right)_{\Omega\times(0,T)}。 \tag{18}$$

结合式(17)和式(18),并应用算子B的正则性和Poincare不等式[17],得

$$\begin{aligned}&\|\nabla z_t\|_{L^2(\Omega\times(0,T))}^2+\|\nabla\Delta z\|_{L^2(\Omega\times(0,T))}^2\leqslant\\ &C\left[E(T)+E(0)+\left(1+\frac{1}{2\varepsilon}\right)\left\|\frac{\partial z_t}{\partial \boldsymbol{\nu}}\right\|_{L^2(\Gamma\times(0,T))}^2+\left\|\frac{\partial(\Delta z)}{\partial \boldsymbol{\nu}}\right\|_{L^2(\Gamma\times(0,T))}^2+\varepsilon|\Delta z|_{L^2(\Omega\times(0,T))}^2\right],\end{aligned} \tag{19}$$

其中$\varepsilon>0$。

由式(19)和式(12),得式(14)。

引理2 不等式

$$\left\|\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}\right\|_{L^2(\Omega\times(0,T))}\leqslant C_T\left[\|A^{1/2}u_0\|_{L^2(\Omega)}^2+\|f\|_{L^2(\Gamma\times(0,T))}\right] \tag{20}$$

成立,如果 u 是非齐次 Schrödinger 方程

$$\begin{cases}u_t=\mathrm{i}Au+Bf,\\ u(x,0)=u_0\in D(A^{1/2})\end{cases} \tag{21}$$

的解。

证明 第一步,考虑 Schrödinger 方程

$$\begin{cases}v_t=\mathrm{i}Av+\varphi,\\ v(x,0)=u_0。\end{cases} \tag{22}$$

设 $h(x)$ 是 Ω 上的光滑向量场,$h|_\Gamma=\boldsymbol{\nu}$。在系统(22)式的第一个方程的两边同乘 $h\cdot\nabla\bar{v}$,并在 $\Omega\times(0,T)$ 上积分,得

$$2\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(v_t,h\nabla\bar{v})_{\Omega\times(0,T)}=-(\nabla v,h\bar{v})_\Omega|_0^T+\mathrm{i}(Av,\mathrm{div}h\bar{v})_{\Omega\times(0,T)}+(\varphi,\mathrm{div}h\bar{v})_{\Omega\times(0,T)}, \tag{23}$$

$$\mathrm{Re}(Av,h\nabla\bar{v})_{\Omega\times(0,T)}=-\frac{1}{2}\left\|\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{\nu}}\right\|_{\Gamma\times(0,T)}^2-\frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega\|\nabla v\|^2\mathrm{div}h\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t+\sum_{j=1}^n\sum_{i=1}^n\left(\frac{\partial v}{\partial x_j},\frac{\partial h_i}{\partial x_j}\frac{\partial\bar{v}}{\partial x_i}\right)_{\Omega\times(0,T)}。 \tag{24}$$

由式(23),式(24)和式(22),及注意到 $\|A^{1/2}f\|_{L^2(\Omega)}\sim\|f\|_{H_0^1(\Omega)}$,得

$$\left\|\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{\nu}}\right\|_{L^2(\Gamma\times(0,T))}^2\leqslant C\left[\|v\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}^2+\|\varphi\|_{L^2(\Omega\times(0,T))}^2+\|v\|_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega))}^2+\|A^{1/2}v\|_{L^2(\Omega\times(0,T))}\|A^{1/2}(\mathrm{div}h\bar{v})\|_{L^2(\Omega\times(0,T))}\right]\leqslant$$
$$C\left[\|\varphi\|_{L^2(\Omega\times(0,T))}+\|A^{1/2}v\|_{L^2(\Omega\times(0,T))}+\|A^{1/2}v\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}\right]。 \tag{25}$$

第二步,定义算子 $L:L^2(\Gamma\times(0,T))\to L^2(\Omega\times(0,T))$ 为

$$(Lf)(t)=\int_0^t e^{\mathrm{i}A(t-\tau)}Bf(\tau)\mathrm{d}\tau, \tag{26}$$

显然 $L\in\mathcal{L}\left(L^2(\Gamma\times(0,T))\right)\to C\left(0,T;\,D(A^{1/4-\varepsilon})\right)$。下面证明

$$L\in\mathcal{L}\left(L^2(\Gamma\times(0,T))\right)\to C\left(0,T;\,D(A^{1/2})\right)。 \tag{27}$$

由于

$$\|A^{1/2}e^{\mathrm{i}At}f\|_{L^2(\Omega)}=\|A^{1/2}f\|_{L^2(\Omega)}, \tag{28}$$

当 $\varphi=0$ 时,由式(25),得

$$\left\|\frac{\partial(e^{\mathrm{i}At}f)}{\partial\boldsymbol{\nu}}\right\|_{L^2(\Gamma\times(0,T))}\leqslant C\|A^{1/2}f\|_{L^2(\Omega)}, \tag{29}$$

由式(10)知,式(29)等价于

$$\|B^*Ae^{\mathrm{i}At}f\|_{L^2(\Gamma\times(0,T))}\leqslant C\|A^{1/2}f\|_{L^2(\Omega)}。$$

根据文献[20],有映射

$$AL\in\mathcal{L}\left(L^2(\Gamma\times(0,T))\right)\to C\left(0,T;\,D(A^{1/2})'\right),$$

这意味着式(27)成立。

第三步,系统(21)的解可用参数形式表示为

$$u(t)=e^{\mathrm{i}At}u_0+\int_0^t e^{\mathrm{i}A(t-\tau)}Bf(\tau)\mathrm{d}\tau=e^{\mathrm{i}At}u_0+(Lf)(t)。 \tag{30}$$

由式(27),式(28),得

$$\|u\|_{C(0,T;D(A^{1/2}))}\leqslant C_T\left[\|A^{1/2}u_0\|_{L^2(\Omega)}+\|f\|_{L^2(\Gamma\times(0,T))}\right]。\tag{31}$$

当 $\varphi=Bf$ 时,由式(25),式(2)和式(31),得

$$\left\|\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}\right\|_{L^2(\Gamma\times(0,T))}\leqslant C_T\left[\|Bf\|_{L^2(\Omega\times(0,T))}+\|A^{1/2}u\|_{L^\infty(0,T;D(A^{1/2}))}\right]\leqslant C_T\left[\|f\|_{L^2(\Gamma\times(0,T))}+\|A^{1/2}u_0\|_{L^2(\Omega)}\right]。$$

得式(20)。

引理3 设 $z(t)$ 是系统(8)的解,则存在常数 $C_T>0,C>0$, 使得

$$\left\|\frac{\partial(\Delta z)}{\partial \boldsymbol{\nu}}\right\|^2_{L^2(\Gamma\times(0,T))}\leqslant C_T\left\|\frac{\partial z_t}{\partial \boldsymbol{\nu}}\right\|^2_{L^2(\Gamma\times(0,T))}+E(0)+CT\left[\|z(0)\|^2_{L^2(\Omega)}+\|z_t(0)\|^2_{L^2(\Omega)}\right]。$$

证明 将系统(8)的解 $z(t)$ 用参数形式表示为

$$z(t)=e^{\mathrm{i}At}\beta_0+e^{-\mathrm{i}At}\beta_1+\frac{1}{2\mathrm{i}}A^{-1}\cdot\int_0^t\left[e^{\mathrm{i}A(t-\tau)}-e^{-\mathrm{i}A(t-\tau)}\right]B\frac{\partial z_t(\tau)}{\partial \boldsymbol{\nu}}\mathrm{d}\tau,\tag{32}$$

其中

$$\beta_0=\frac{1}{2\mathrm{i}}A^{-1}\left[z(0)+z_t(0)\right],\beta_1=\frac{1}{2\mathrm{i}}\left[(2\mathrm{i}I-A)^{-1}z(0)-A^{-1}z_t(0)\right]。\tag{33}$$

由式(32),得

$$-\Delta z(t)=Az(t)=Ae^{\mathrm{i}At}\beta_0+\frac{1}{2\mathrm{i}}\int_0^t e^{\mathrm{i}A(t-\tau)}B\frac{\partial z_t(\tau)}{\partial \boldsymbol{\nu}}\mathrm{d}\tau+\left[Ae^{-\mathrm{i}At}\beta_1-\frac{1}{2\mathrm{i}}\int_0^t e^{-\mathrm{i}A(t-\tau)}B\frac{\partial z_t(\tau)}{\partial \boldsymbol{\nu}}\mathrm{d}\tau\right],$$

$$z_t(t)=\mathrm{i}\left[Ae^{\mathrm{i}At}\beta_0+\frac{1}{2\mathrm{i}}\int_0^t e^{\mathrm{i}A(t-\tau)}B\frac{\partial z_t(\tau)}{\partial \boldsymbol{\nu}}\mathrm{d}\tau\right]-\mathrm{i}\left[Ae^{-\mathrm{i}At}\beta_1-\frac{1}{2\mathrm{i}}\int_0^t e^{-\mathrm{i}A(t-\tau)}B\frac{\partial z_t(\tau)}{\partial \boldsymbol{\nu}}\mathrm{d}\tau\right]。$$

因此

$$\left\|\frac{\partial z_t(x,t)}{\partial \boldsymbol{\nu}}\right\|^2=\left\|\frac{\partial \Delta z(x,t)}{\partial \boldsymbol{\nu}}\right\|^2-2\mathrm{Re}\psi(x,t),\tag{34}$$

其中

$$\psi(x,t)=\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu}}\left[Ae^{\mathrm{i}At}\beta_0+\frac{1}{2\mathrm{i}}\int_0^t e^{\mathrm{i}A(t-\tau)}B\frac{\partial z_t(\tau)}{\partial \boldsymbol{\nu}}\mathrm{d}\tau\right]\cdot\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu}}\left[Ae^{\mathrm{i}At}\overline{\beta}_1+\frac{1}{2\mathrm{i}}\int_0^t e^{\mathrm{i}A(t-\tau)}B\frac{\partial z_t(\tau)}{\partial \boldsymbol{\nu}}\mathrm{d}\tau\right]=$$

$$\psi_1(t)+\frac{1}{2\mathrm{i}}\psi_2(t)-\frac{1}{4}\psi_3(t),$$

$$\psi_1(t)=\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu}}Ae^{\mathrm{i}At}\beta_0\cdot\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu}}Ae^{\mathrm{i}At}\overline{\beta}_1,\ \psi_2(t)=\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu}}Ae^{\mathrm{i}At}\left(\beta_0+\overline{\beta}_1\right)\cdot\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu}}\int_0^t e^{\mathrm{i}A(t-\tau)}B\frac{\partial z_t(\tau)}{\partial \boldsymbol{\nu}}\mathrm{d}\tau,$$

$$\psi_3(t)=\left[\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu}}\int_0^t e^{\mathrm{i}A(t-\tau)}B\frac{\partial z_t(\tau)}{\partial \boldsymbol{\nu}}\mathrm{d}\tau\right]^2。\tag{35}$$

先估计 $\psi_1(t)$。

设 $\phi(t)\in C_0^\infty(\mathbb{R})$,使得当 $t\in[0,T]$ 时,$\phi(t)=1$;当 $t<-\mu$ 或 $t>T+\mu$ 时,$\phi(t)=0$。于是

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(t)\int_\Gamma\psi_1(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\sum_{j=1}^\infty\sum_{i=1}^\infty\left(\beta_0,\boldsymbol{\phi}_i\right)_{L^2(\Omega)}\left(\overline{\beta}_1,\boldsymbol{\phi}_j\right)_{L^2(\Omega)}\lambda_i\lambda_j\left(\frac{\partial \boldsymbol{\phi}_i}{\partial \boldsymbol{\nu}},\frac{\partial \boldsymbol{\phi}_j}{\partial \boldsymbol{\nu}}\right)_{L^2(\Gamma)}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(t)e^{\mathrm{i}(\lambda_i+\lambda_j)t}\mathrm{d}t,\tag{36}$$

其中 $\lambda_i,\boldsymbol{\phi}_i$ 分别是 A 的特征值和特征向量。

由 $\left\|\dfrac{\partial \boldsymbol{\phi}_j}{\partial \boldsymbol{\nu}}\right\|_{L^2(\Gamma)}\leqslant C\|\boldsymbol{\phi}_j\|_{H^{3/2+\varepsilon}}\leqslant C\|\boldsymbol{\phi}_j\|_{D(A)}\leqslant C\lambda_j,\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(t)e^{\mathrm{i}(\lambda_i+\lambda_j)t}\mathrm{d}t\leqslant\dfrac{CT}{|\lambda_i+\lambda_j|^{100}}$,得

$$\left\|\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(t)\int_\Gamma\psi_1(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right\|\leqslant C\sum_{j=1}^\infty\sum_{i=1}^\infty\left(\beta_0,\boldsymbol{\phi}_i\right)\left(\overline{\beta}_1,\boldsymbol{\phi}_j\right)\lambda_i{}^2\lambda_j{}^2\frac{T}{|\lambda_i+\lambda_j|^{100}}\leqslant$$

$$CT\|\beta_0\|_{L^2(\Omega)}\|\beta_1\|_{L^2(\Omega)}\leqslant CT\left[\|z(0)\|_{L^2(\Omega)}^2+\|z_t(0)\|_{L^2(\Omega)}^2\right]。\tag{37}$$

再估计$\psi_2(t)$。

当$f=0$时,利用引理2和式(33),得

$$\left\|\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\nu}}Ae^{\mathrm{i}At}\left(\beta_0+\overline{\beta}_1\right)\right\|\leqslant C_T\left[\|A^{3/2}\beta_0\|_{L^2(\Omega)}+\|A^{3/2}\beta_1\|_{L^2(\Omega)}\right]\leqslant$$
$$C_T\left[\|A^{3/2}z(0)\|_{L^2(\Omega)}+\|A^{1/2}z_t(0)\|_{L^2(\Omega)}\right]\leqslant C_T\left[E(0)\right]^{1/2}。\tag{38}$$

当$u(0)=0,f=\frac{\partial z_t}{\partial\boldsymbol{\nu}}$时,由引理2,得

$$\left\|\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\nu}}\int_0^t e^{\mathrm{i}A(t-\tau)}B\frac{\partial z_t(\tau)}{\partial\boldsymbol{\nu}}\mathrm{d}\tau\right\|\leqslant C_T\left\|\frac{\partial z_t}{\partial\boldsymbol{\nu}}\right\|_{L^2(\Gamma\times(0,T))}。\tag{39}$$

由于$e^{\mathrm{i}At}$是半群,当用$-\mu$代替0时,式(38)和式(39)仍成立,因此

$$\left\|\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(t)\int_\Gamma\psi_2(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right\|\leqslant\int_{-\mu}^{T+\mu}\int_\Gamma\|\psi_2(t)\|\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant$$
$$\left\|\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\nu}}Ae^{\mathrm{i}At}\left(\beta_0+\overline{\beta}_1\right)\right\|_{L^2(\Gamma\times(0,T))}\left\|\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\nu}}\int_{-\mu}^t e^{\mathrm{i}A(t-\tau)}B\frac{\partial z(\tau)}{\partial\boldsymbol{\nu}}\mathrm{d}\tau\right\|_{L^2(\Gamma\times(0,T))}\leqslant C_T\left\|\frac{\partial z_t}{\partial\boldsymbol{\nu}}\right\|_{L^2(\Gamma\times(0,T))}\sqrt{E(0)}。\tag{40}$$

用类似的方法,可得$\psi_3(t)$的估计为

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(t)\int_\Gamma\psi_3(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right|\leqslant C_T\left\|\frac{\partial z_t}{\partial\boldsymbol{\nu}}\right\|_{L^2(\Gamma\times(0,T))}^2。\tag{41}$$

由式(34-35)、式(37)和式(40-41),得

$$\left\|\frac{\partial(\Delta z)}{\partial\boldsymbol{\nu}}\right\|^2\leqslant\int_{-\mu}^{\infty}\phi(t)\left\|\frac{\partial\left(\Delta z(t)\right)}{\partial\boldsymbol{\nu}}\right\|_{L^2(\Gamma)}\mathrm{d}t=\int_{-\mu}^{\infty}\left[\left\|\frac{\partial\left(\Delta z(t)\right)}{\partial\boldsymbol{\nu}}\right\|_{L^2(\Gamma)}^2+4\mathrm{Re}\int_\Gamma\psi(t)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}t\leqslant$$
$$\int_{-\mu}^{T+\mu}\left\|\frac{\partial z_t}{\partial\boldsymbol{\nu}}\right\|_{L^2(\Gamma)}^2+4\left\|\int_{-\mu}^{\infty}\phi(t)\int_\Gamma\psi(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right\|\leqslant CT\left[\|z(0)\|_{L^2(\Omega)}+\|z_t(0)\|_{L^2(\Omega)}\right]+E(0)+C_T\left\|\frac{\partial z_t}{\partial\boldsymbol{\nu}}\right\|_{L^2(\Gamma\times(0,T))}^2。$$

这就证明了引理3。

引理4 不等式成立:

$$TE(T)\leqslant\|\Delta z_t\|_{L^2(\Omega\times(0,T))}^2+\|\nabla\Delta z\|_{L^2(\Omega\times(0,T))}^2\leqslant C_T\left\|\frac{\partial z_t}{\partial\boldsymbol{\nu}}\right\|_{L^2(\Gamma\times(0,T))}^2+CE(T)+T\left[\|z(0)\|_{L^2(\Omega)}^2+\|z_t(0)\|_{L^2(\Omega)}^2\right]。\tag{42}$$

证明 由引理1和引理3,得

$$\|\Delta z_t\|_{L^2(\Omega\times(0,T))}^2+\|\nabla\Delta z\|_{L^2(\Omega\times(0,T))}^2\leqslant C_T\left\|\frac{\partial z_t}{\partial\boldsymbol{\nu}}\right\|_{L^2(\Gamma\times(0,T))}^2+CE(0)+CT\left[\|z(0)\|_{L^2(\Omega)}^2+\|z_t(0)\|_{L^2(\Omega)}^2\right]。\tag{43}$$

结合式(43)和式(11),得式(42)的右端不等式。

由式(11),得

$$\int_0^T E(t)\mathrm{d}t+\int_0^T\int_0^t\left\|\frac{\partial z_t}{\partial\boldsymbol{\nu}}\right\|_{L^2(\Gamma)}^2\mathrm{d}s\mathrm{d}t=TE(0),\tag{44}$$

$$TE(T)+t\int_0^t\left\|\frac{\partial z_t}{\partial\boldsymbol{\nu}}\right\|_{L^2(\Gamma)}^2\mathrm{d}t=TE(0)。\tag{45}$$

因此

$$TE(T)\leqslant\int_0^T E(t)\mathrm{d}t=\|\Delta z_t\|_{L^2(\Omega\times(0,T))}^2+\|\nabla\Delta z\|_{L^2(\Omega\times(0,T))}^2,\tag{46}$$

得式(42)的左端不等式,从而得式(42)。

引理5 设$T>0$足够大,z是系统(8)的解,则存在$C_T>0$,使得

$$E(T)\leqslant C_T\left\|\frac{\partial z_t}{\partial \boldsymbol{\nu}}\right\|^2_{L^2(\Gamma\times(0,T))}。\tag{47}$$

证明 在引理4中取T足够大,得

$$E(T)\leqslant C_T\left\|\frac{\partial z_t}{\partial \boldsymbol{\nu}}\right\|_{L^2(\Gamma\times(0,T))}+T\left[\left\|z(0)\right\|^2_{L^2(\Omega)}+\left\|z_t(0)\right\|^2_{L^2(\Omega)}\right],\tag{48}$$

利用式(11),式(48)暗含

$$E(0)\leqslant C_T\left\|\frac{\partial z_t}{\partial \boldsymbol{\nu}}\right\|_{L^2(\Gamma\times(0,T))}+T\left[\left\|z(0)\right\|^2_{L^2(\Omega)}+\left\|z_t(0)\right\|^2_{L^2(\Omega)}\right]。$$

由紧唯一性[21],存在常数$C_T>0$,得

$$\left\|z(0)\right\|^2_{L^2(\Omega)}+\left\|z_t(0)\right\|_{L^2(\Omega)}\leqslant C_T\left\|\frac{\partial z_t}{\partial \boldsymbol{\nu}}\right\|^2_{L^2(\Gamma\times(0,T))}。\tag{49}$$

结合式(48)和式(49),得式(47)。

有了上述几个引理之后,现在证明定理1。

定理1的证明 由文献[18],要证式(13),只需证明存在$T>0$,使得

$$\left|S(t)\right|_{\mathcal{L}(H)}<1。\tag{50}$$

由式(6),$\forall\mu>0$,有

$$E(T+\mu)\leqslant E(T)。\tag{51}$$

当$t=-\mu$时,系统(1)的初值为$\big(w(-\mu),w_t(-\mu)\big)$。取$\alpha=-\mu,t=T+\mu$,则由式(6)得

$$\left\|S(T+2\mu)\big(w(-\mu),w_t(-\mu)\big)\right\|^2_H+\left\|B^*w_t\right\|^2_{L^2(\Gamma\times(0,T))}=\left\|\big(w(-\mu),w_t(-\mu)\big)\right\|^2_H。\tag{52}$$

结合式(51),式(52),得

$$\left\|S(T+2\mu)\big(w(-\mu),w_t(-\mu)\big)\right\|^2_H+\frac{1}{C_T}E(T+\mu)\leqslant\left\|\big(w(-\mu),w_t(-\mu)\big)\right\|^2_H。\tag{53}$$

由半群性质知,$(w_0,w_1)=\big(w(0),w_t(0)\big)=S(\mu)\big(w(-\mu),w_t(-\mu)\big)$。于是

$$E(T+\mu)=\left\|S(T+\mu)(w_0,w_1)\right\|_H=\left\|S(T+2\mu)\big(w(-\mu),w_t(-\mu)\big)\right\|^2_H。\tag{54}$$

由式(53)和式(54),得

$$\left\|S(T+2\mu)\big(w(-\mu),w_t(-\mu)\big)\right\|_H\leqslant\frac{1}{1+1/C_T}\left\|\big(w(-\mu),w_t(-\mu)\big)\right\|_H,$$

因此

$$\left\|S(T+2\mu)\right\|_{\mathcal{L}(H)}<1,$$

从而得式(50)。

3 结论

本文使用了一种新的Schrödinger方程的正则性估计方法,推广了文献[16]的方法,求解了有界开区域上具有边界反馈的Euler-Bernoulli方程的一致稳定性问题,不仅证明了系统(1)的能量在$H_0^1(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)$的均匀拓扑中指数衰减为零,还给出了非齐次Schrödinger方程的正则性估计不等式。该方法也可能适用于其他边界反馈控制的稳定性问题,有待进一步研究。

参考文献：

[1] LI J, CHAI S G. Existence and Energy Decay Rates of Solutions to the Variable-coefficient Euler-Bernoulli Plate with a Delay in Localized Nonlinear Internal Feedback[J]. *J Math Anal Appl*, 2016, **443**(2): 981-1006. DOI: 10.1016/j.jmaa.2016.05.060.

[2] ZHOU H C, FENG H. Stabilization for Euler-Bernoulli Beam Equation with Boundary Moment Control and Disturbance *via* a New Disturbance Estimator[J]. *J Dyn Contr Syst*, 2021, **27**(2): 247-259. DOI: 10.1007/s10883-020-09492-4.

[3] WU J L, SHANG Y F. Exponential Stabilization of Euler-bernoulli Beam with Input Time-delay in the Boundary Control[J]. *J Harbin Inst Tech* (*New Series*), 2019, **26**(3): 20-25. DOI: 10.11916/j.issn.1005-9113.17054.

[4] 郝江浩, 张晋周. 一类变系数Euler-Bernoulli板方程解的稳定性[J]. 山西大学学报(自然科学版), 2011, **34**(2): 169-171. DOI: 10.13451/j.cnki.shanxi.univ(nat.sci.).2011.02.024.
HAO J H, ZHANG J Z. Stability of Solutions for Euler-bernoulli Plate Equation with Variable Coefficients[J]. *J Shanxi Univ Nat Sci Ed*, 2011, **34**(2): 169-171. DOI: 10.13451/j.cnki.shanxi.univ(nat.sci.).2011.02.024.

[5] ZHANG W, ZHANG Z F. Stabilization of Transmission Coupled Wave and Euler-Bernoulli Equations on Riemannian Manifolds by Nonlinear Feedbacks[J]. *J Math Anal Appl*, 2015, **422**(2): 1504-1526. DOI: 10.1016/j.jmaa.2014.09.044.

[6] YANG Z F. Existence and Energy Decay of Solutions for the Euler-Bernoulli Viscoelastic Equation with a Delay [J]. *Z Für Angew Math Und Phys*, 2015, **66**(3): 727-745. DOI: 10.1007/s00033-014-0429-2.

[7] LIU J K, GUO B Z. A Novel Semi-discrete Scheme Preserving Uniformly Exponential Stability for an Euler-Bernoulli Beam[J]. *Syst Contr Lett*, 2019, **134**: 104518. DOI: 10.1016/j.sysconle.2019.104518.

[8] AOURAGH M D, BOUKILI A E. Stabilization of Variable Coefficients Euler-Bernoulli Beam Equation with a Tip Mass Controlled by Combined Feedback Forces[J]. *Ann Univ Craiova Math Comput Sci Ser*, 2015, **42**: 238-248.

[9] LAZZARI B, NIBBI R. On the Exponential Decay of the Euler-Bernoulli Beam with Boundary Energy Dissipation [J]. *J Math Anal Appl*, 2012, **389**(2): 1078-1085. DOI: 10.1016/J.JMAA.2011.12.046.

[10] WEI Q, WANG L. Exponential Stabilization of Euler-Bernoulli Beam with Uncertain Disturbance[J]. *Int J Contr*, 2021, **94**(6): 1622-1629. DOI: 10.1080/00207179.2019.1662094.

[11] HAN P C, LI Y F, XU G Q, *et al*. The Exponential Stability Result of an Euler-Bernoulli Beam Equation with Interior Delays and Boundary Damping[J]. *J Differ Equ*, 2016, **2016**: 3732176. DOI: 10.1155/2016/3732176.

[12] 白忠玉. Euler-Bernoulli方程在混合边界控制下的能量指数衰减[J]. 西北师范大学学报(自然科学版), 2024, **60**(5): 104-109. DOI: 10.16783/j.cnki.nwnuz.2024.05.013.
BAI Z Y. Exponential Decay of Energy for Euler-Bernoulli Equation with Mixed Boundary Control[J]. *J Northwest Norm Univ Nat Sci*, 2024, **60**(5): 104-109. DOI: 10.16783/j.cnki.nwnuz.2024.05.013.

[13] FAN X R, KOU C H. Output Feedback Stabilization of Euler-Bernoulli Beam Equation with General Corrupted Boundary Observation[J]. *Appl Anal*, 2023, **102**(10): 2755-2773. DOI: 10.1080/00036811.2022.2037572.

[14] WANG Y Y, WU W, WANG Z, *et al*. Robust Boundary Control Approaches to the Stabilization of the Euler-Bernoulli Beam under External Disturbances[J]. *J Vib Contr*, 2022, **29**: 4841-4856. DOI: 10.1177/10775463221129141.

[15] DENG P Y, ZHENG J, ZHU G C. Well-posedness and Stability for a Nonlinear Euler-Bernoulli Beam Equation[J]. *Commun Anal Mech*, 2024, **16**(1): 193-216. DOI: 10.3934/cam.2024009.

[16] REBIAI S E. Uniform Energy Decay of Schrödinger Equations with Variable Coefficients[J]. *IMA J Math Contr Inf*, 2003, **20**(3): 335-345. DOI: 10.1093/imamci/20.3.335.

[17] 郭宝珠, 柴树根. 无穷维线性系统控制理论[M]. 北京: 科学出版社, 2012.
GUO B Z, CHAI S G. Control Theory of Infinite Dimensional Linear System[M]. Beijing: Science Press, 2012.

[18] PAZY A. Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations[M]. New York: Springer-Verlag, 1983. DOI: 10.1007/978-1-4612-5561-1.

[19] TAYLOR M E. Partial Differential Equations I: Basic Theory[M]. New York: Springer-Verlag, 1996.

[20] TRIGGIANI R. The Role of an $L_2(\Omega)$-energy Estimate in the Theories of Uniform Stabilization and Exact Controllability for Schrödinger Equations with Neumann Boundary Control[J]. *B Soc Paran Mat*, 2007, **25**(1/2): 109-138. DOI: 10.5269/bspm.v25i1-2.7429.

[21] LASIECKA I, TRIGGIANI R. Exact Controllability of the Euler-Bernoulli Equation with Controls in the Dirichlet and Neumann Boundary Conditions: A Nonconservative Case[J]. *SIAM J Control Optim*, 1989, **27**(2): 330-373. DOI: 10.1137/0327018.