

# 任意子 Su-Schrieffer-Heeger 模型中的双粒子态

谢家辉, 陈亚江\*

(浙江理工大学 理学院 浙江省量子物态与光场调控重点实验室, 浙江 杭州 310018)

**摘要:**任意子介于玻色子与费米子之间, 遵从奇特的分数统计, 因而任意子系统具有众多有趣的物理性质。本文聚焦一维 Su-Schrieffer-Heeger (SSH) 模型的双任意子态, 推导了由正交基矢展开的本征离散方程组, 并由此得到了 SSH 模型双任意子态的二维晶格映射关系。通过数值求解该本征离散方程组, 研究双任意子态的能谱特性和边缘局域性规律。结果表明, 调节跳跃循环参数使体系趋向拓扑平庸相或者拓扑非平庸相时, 双任意子态的本征能谱呈现能级化结构, 且任意子的统计参数并不改变该能级化特征。通过数值计算概率密度函数, 发现在统计参数趋向费米子极限时体系存在边缘束缚态。本研究为在实验上模拟 SSH 模型的少任意子态提供了重要的理论支持。

**关键词:** 概率密度函数; 正交基矢; 局域性; 能谱能级化结构

中图分类号: O413 文献标志码: A 文章编号: 0253-2395(2026)01-0122-07

## Two-particle States in the Anyonic Su-Schrieffer-Heeger Model

XIE Jiahui, CHEN Yajiang\*

(Zhejiang Key Laboratory of Quantum State Control and Optical Field Manipulation, School of Science, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou 310018, China)

**Abstract:** Anyons lie between bosons and fermions, obeying exotic fractional statistics. Thus, anyonic systems possess many intriguing physical properties. This paper focused on the two-anyon states in the one-dimensional Su-Schrieffer-Heeger (SSH) model. The eigen discrete equations expanded by orthogonal basis vectors were derived. From this, the two-dimensional lattice mapping relation for the SSH model's two-anyon states was obtained. The eigen discrete equations were numerically solved to investigate the energy spectrum characteristics and edge localization rules of the two-anyon states. The results indicate that, when the hopping-loop parameter is tuned to drive the system into either the topologically trivial or nontrivial phase, the eigenenergy spectrum of the two-anyon states exhibits a quantized structure. The findings indicate that the statistical parameter of the anyons does not alter this segmentation feature. Probability density functions were numerically calculated, revealing the existence of edge-bound states in the system when the statistical parameter approaches the pseudo-fermion limit. This study provides important theoretical support for the experimental simulation of few-anyon states in the SSH model.

**Key words:** probability density function; orthogonal basis vectors; localization; quantization in energy spectrum

### 0 引言

根据传统的量子统计, 三维空间的全同粒子可分为玻色子和费米子, 交换两个玻色子或费米子, 波函数保持不变或产生  $-1$  系数。然而, 对存在于低维空间中的任意子, 粒子交换操作使其波

收稿日期: 2025-07-09; 修回日期: 2025-09-10

基金项目: 国家自然科学基金(12474492)

作者简介: 谢家辉(1999-), 女, 河南焦作人, 硕士研究生, 研究方向为理论物理。E-mail: jiahxie@163.com

\* 通信作者: 陈亚江(CHEN Yajiang), E-mail: yjchen@zstu.edu.cn

引文格式: 谢家辉, 陈亚江. 任意子 Su-Schrieffer-Heeger 模型中的双粒子态[J]. 山西大学学报(自然科学版), 2026, 49(1): 122-128. DOI:10.13451/j.sxu.ns.2025095.

函数获得一个任意相位因子<sup>[1-4]</sup>,并表现出异于玻色子和费米子的分数统计特性。实验上,已有研究分别在自旋系统<sup>[5]</sup>、玻色系统<sup>[6]</sup>和冷原子系统<sup>[7]</sup>中寻找任意子的方案。在一维光晶格中,可利用拉曼辅助跃迁方法实现任意子<sup>[8]</sup>,并通过调节外部驱动场的相对相位精确控制其交换统计。此外,还可将任意子本征态映射到电路中模拟<sup>[9]</sup>,通过设计特定的电路连接方式和元件配置调节统计参数,实现从玻色子到赝费米子的行为转换。由于其新颖的统计性质,任意子成为凝聚态物理的重要概念,尤其在分数量子霍尔效应<sup>[10-11]</sup>、自旋液体<sup>[12]</sup>以及拓扑量子计算领域<sup>[13-16]</sup>展现出关键作用。

进一步地,对少体任意子系统的研究也逐步展开<sup>[17]</sup>,特别是发现双任意子态展现出丰富有趣的物理特性。任意子系统在坐标空间的量子行走中,由于统计参数偏离玻色极限与费米极限,导致两体关联函数呈现关于初始位置的不对称性<sup>[18-20]</sup>。针对非正交基矢引入的非物理自由度问题,研究一维 Anyon-Hubbard 模型中双任意子时,应采用在正交 Hilbert 空间中展开双任意子态波函数的方法<sup>[21]</sup>。该模型的双任意子态能谱结构对统计参数高度敏感:当统计参数为零时,本征值呈等间距分布;而统计参数不为零时,则出现明显偏离<sup>[22]</sup>。另外,在无相互作用的双任意子系统中发现一类连续谱中的束缚态,并且由电路模拟实验所验证<sup>[23-24]</sup>。

另一方面,拓扑物理体系近年受到了广泛关注,探索该体系中任意子的新奇效应具有重要的科学意义。拓扑绝缘体具备有能隙的体态和无能隙的边缘态,其拓扑性质可由拓扑不变量表征<sup>[25-26]</sup>。一维 Su-Schrieffer-Heeger (SSH) 模型<sup>[27]</sup>是典型的拓扑绝缘体,包含拓扑平庸相与拓扑非平庸相。在开边界条件下,这两种相可通过是否存在零模边缘束缚态以及拓扑不变量加以区分<sup>[28-29]</sup>,该体系的边缘态已经在基于里德堡原子的人工自旋链中被观测到<sup>[30]</sup>。此外,实验上已经在一维光晶格中成功模拟了 SSH 模型<sup>[31]</sup>。

然而,目前尚不清楚拓扑体系中的少体任意子态存在何种新颖特性,这阻碍了对任意子统计参数影响拓扑相变及边缘态稳定性等关键问题的理解。为此,本文聚焦一维 SSH 模型中的双任意子态,揭示任意子统计参数和模型跳跃循环参数对 SSH 模型中双任意子态的调控规律。

## 1 模型与计算方法

本文研究 SSH 模型下的双任意子态,采用开边界条件,相应的哈密顿量表示为<sup>[32]</sup>:

$$H = - \sum_{j=1}^{L-1} t \left[ 1 + (-1)^{j+1} \cos \theta \right] (a_j^\dagger a_{j+1} + a_{j+1}^\dagger a_j), \quad (1)$$

其中算符  $a_j^\dagger$  ( $a_j$ ) 表示在格点  $j$  产生 (湮灭) 一个任意子,格点  $j = 2k - 1$  和  $2k$  为第  $k$  ( $k = 1, 2, \dots, L/2$ ) 个晶胞的 A 子格和 B 子格,  $L$  是总格点数,  $t \left[ 1 + (-1)^{j+1} \cos \theta \right]$  为最近邻格点之间的跳跃系数,晶胞内 A 子格和 B 子格之间的跳跃系数为  $t(1 + \cos \theta)$ ,不同晶胞子格之间的最近邻跳跃系数为  $t(1 - \cos \theta)$ 。 $\theta$  是跳跃循环参数<sup>[28]</sup>,  $\theta \in [0, 2\pi)$ 。当  $\theta = 0$  时,SSH 模型的单粒子态处于拓扑平庸态,且晶胞间的最近邻格点之间不存在跳跃,而晶胞内跳跃参数为  $2t$ ;当  $\theta = \pi$  时,单粒子态处于拓扑非平庸态,跳跃参数情况相反:晶胞内无跳跃,但晶胞间的最近邻格点之间跳跃参数为  $2t$ 。

任意子的产生和湮灭算符满足以下对易关系<sup>[33-34]</sup>:

$$\begin{aligned} a_m a_n^\dagger &= e^{-i\chi\pi\epsilon(m-n)} a_n^\dagger a_m + \delta_{mn}, \\ a_m a_n &= e^{i\chi\pi\epsilon(m-n)} a_n a_m, \end{aligned} \quad (2)$$

其中任意子统计参数  $\chi \in [0, 1]$ ,符号函数  $\epsilon(x)$  取值 1、0 或 -1,分别对应  $x$  为正、零或负的情况。当统计参数  $\chi = 0$  时,任意子的行为与玻色子相同。当  $\chi$  增加至 1 时,任意子过渡到赝费米子极限,即两个不同格点的湮灭算符满足反对易关系,而相同格点的两湮灭算符对易。

由于哈密顿量算符  $H$  与总粒子数算符  $N$  对易,  $[H, N] = 0$ ,即体系中总粒子数守恒,可将系统

的空间限制于双粒子希尔伯特空间。利用 Fock 态构造系统的希尔伯特空间,考虑其中一个粒子位于格点  $m$  处,另一个粒子位于格点  $n$  处( $m, n = 1, 2, \dots, L$ ),相应的基矢表示为  $a_m^\dagger a_n^\dagger |0\rangle$ <sup>[22]</sup>,其中  $|0\rangle$  表示真空态,本征态展开为:

$$|\psi\rangle = \sum_{m,n} \frac{1}{\sqrt{2}} c_{mn} a_m^\dagger a_n^\dagger |0\rangle, \quad (3)$$

其中  $c_{mn}$  为双任意子态占据  $m$  格点和  $n$  格点的概率幅。将式(1)和(3)代入定态薛定谔方程  $H|\psi\rangle = E|\psi\rangle$ ,可以得到关于  $c_{mn}$  的本征方程:

$$Ec_{mn} = -t \left\{ e^{i\pi[\delta_m + \delta_{m(n-1)}]} [1 + (-1)^n \cos \theta] c_{m(n-1)} + e^{-i\pi[\delta_m + \delta_{m(n+1)}]} [1 + (-1)^{n+1} \cos \theta] c_{m(n+1)} + [1 + (-1)^m \cos \theta] c_{(m-1)n} + [1 + (-1)^{m+1} \cos \theta] c_{(m+1)n} \right\}. \quad (4)$$

根据双任意子产生和湮灭算符的对易关系式(2),概率幅  $c_{mn}$  和  $c_{nm}$  之间需满足  $c_{nm} = c_{mn} e^{i\pi\epsilon(n-m)}$ 。由此可知 Fock 态  $a_m^\dagger a_n^\dagger |0\rangle$  与  $a_n^\dagger a_m^\dagger |0\rangle$  是线性相关的,其内积不为零,不具备正交性,无法共同作为正交归一的基矢。

另一种波函数的正交展开基矢选择是对格点编号  $m$  和  $n$  有一定限制的 Fock 态,即  $m$  必须大于或等于  $n$  ( $m \geq n$ ),对应双任意子态正交归一基矢表示为  $\frac{1}{\sqrt{1 + \delta_{mm}}} a_m^\dagger a_n^\dagger |0\rangle$  ( $m \geq n$ )<sup>[19]</sup>,本征态由其展开为:

$$|\psi\rangle = \sum_{m \geq n} \frac{1}{\sqrt{1 + \delta_{mm}}} c'_{mn} a_m^\dagger a_n^\dagger |0\rangle, \quad (5)$$

这里  $c'_{mn}$  为双任意子占据  $m$  格点和  $n$  格点的概率幅。将式(1)和式(5)代入定态薛定谔方程  $H|\psi\rangle = E|\psi\rangle$ ,得到关于  $c'_{mn}$  的本征方程:

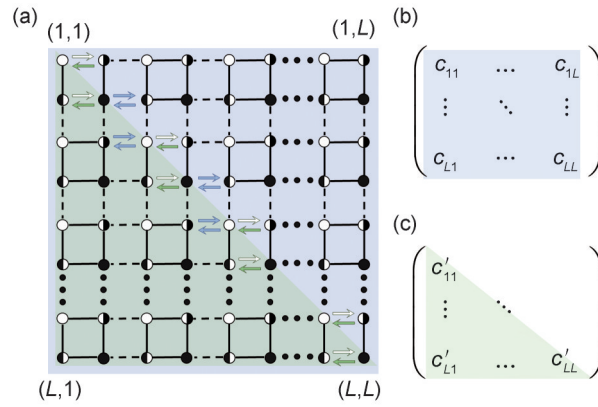
$$Ec'_{mn} = -t \left\{ \sqrt{1 + \delta_{mm}} e^{i\pi\delta_m} [1 + (-1)^n \cos \theta] c'_{m(n-1)} + (1 - \delta_{mm}) \sqrt{1 + \delta_{m(n+1)}} e^{-i\pi\delta_{m(n+1)}} [1 + (-1)^{n+1} \cos \theta] c'_{m(n+1)} + (1 - \delta_{mm}) \sqrt{1 + \delta_{(m-1)n}} [1 + (-1)^m \cos \theta] c'_{(m-1)n} + \sqrt{1 + \delta_{mm}} [1 + (-1)^{m+1} \cos \theta] c'_{(m+1)n} \right\}. \quad (6)$$

目前大多数理论文献所采用的是非正交方案,该方案的优点是直观,而且能得到对称的展开系数数值矩阵。但是,由于基矢的非正交性(即基矢是线性相关的),所得到的系数矩阵具有非物理的冗余自由度,所得到的解并不一定是物理的,即不一定满足任意子的统计要求。对于正交基矢方案,所得的解都是严格符合任意子的统计要求。因此,本文采用严谨的正交基矢方案。

依据方程(4)和(6),将一维 SSH 模型双任意子态行为映射到二维晶格的单粒子系统,如图1所示。在该映射关系中,一维双任意子模型中位于格点  $m$  和格点  $n$  的波函数概率幅可映射为单个粒子占据二维晶格( $m, n$ )的概率幅。具体而言,一维模型中一个粒子从格点  $n$  跳跃到  $n+1$  而另一个粒子在  $m$  格点保持不变,等效于二维模型中单粒子从格点( $m, n$ )跃迁到( $m, n+1$ )。

图1(a)为一维 SSH 模型双任意子态的二维晶格映射图,非正交基矢的希尔伯特空间映射为整个二维正方形晶格(图中为蓝色覆盖区域),由于格点编号限制( $m \geq n$ ),正交基矢的希尔伯特空间映射仅包含二维正方形晶格的左下三角形区域(图中为绿色覆盖区域)。根据格点  $j = 2k - 1$  和  $2k$  为第  $k$  个晶胞的 A 子格和 B 子格,所以图中空心圆表示两个任意子位于 A 子格,实心圆表示两个任意子位于 B 子格,混合圆表示一个任意子位于 A 子格,另一个任意子位于 B 子格。图中的线条样式

表示跳跃系数,实线表示胞内跳跃系数  $t(1 + \cos \theta)$ ,虚线表示胞间跳跃系数  $t(1 - \cos \theta)$ 。在该映射下,跳跃仅发生在最近邻格点之间,即单粒子只能从格点  $(m, n)$  跃迁至最近邻格点  $(m, n \pm 1)$  或  $(m \pm 1, n)$ 。图中箭头表示包含统计因子的相互跳跃,绿色实心/空心箭头为  $t(1 + \cos \theta)e^{\pm i\chi\pi}$ ,而蓝色实心/空心箭头为  $t(1 - \cos \theta)e^{\pm i\chi\pi}$ 。从图 1(a)中可知,在非正交基矢的映射方案中,对角格点与水平方向相邻格点之间的跳跃因子中包含统计参数,而在正交基矢的希尔伯特空间中,仅在格点  $(m, m)$  与  $(m, m - 1)$  之间的跳跃因子包含统计参数。图 1(b)表示非正交基矢的希尔伯特空间,两个任意子的希尔伯特空间张成了一个二维的格点网格,空间维度为  $L^2$ ,而正交基矢的希尔伯特空间维度为  $L(L + 1)/2$ ,相比于非正交基矢情况减少了非物理部分的空间维度  $L(L - 1)/2$ ,见图 1(c)。



注:图中的黑/白圆形格点对应着一维 SSH 链的 A/B 格点。连接格点的实线代表跳跃系数  $t(1 + \cos \theta)$ ,而虚线为  $t(1 - \cos \theta)$ 。对角线附近的箭头代表含统计参数  $\chi$  的跳跃因子:绿色实心箭头为  $t(1 + \cos \theta)e^{+i\chi\pi}$ ,绿色空心箭头为  $t(1 + \cos \theta)e^{-i\chi\pi}$ ;蓝色实心和空心箭头分别为  $t(1 - \cos \theta)e^{+i\chi\pi}$  和  $t(1 - \cos \theta)e^{-i\chi\pi}$ 。

Note: The black/white circular lattice sites correspond to the A/B sites of the one-dimensional SSH chain. The solid lines connecting the sites represent the hopping coefficients  $t(1 + \cos \theta)$ , while the dashed lines represent  $t(1 - \cos \theta)$ . The arrows near the diagonals represent hopping factors containing the statistical parameter  $\chi$ : green solid arrows denote  $t(1 + \cos \theta)e^{+i\chi\pi}$ , and green hollow arrows denote  $t(1 + \cos \theta)e^{-i\chi\pi}$ ; blue solid and hollow arrows represent  $t(1 - \cos \theta)e^{+i\chi\pi}$  and  $t(1 - \cos \theta)e^{-i\chi\pi}$ , respectively.

图 1 一维 SSH 模型中的双任意子态的二维晶格映射图(a),以及非正交基组和正交基组所对应的展开系数集合(b, c)

Fig. 1 Two-dimensional lattice mapping diagram of the double anyon states in the one-dimensional SSH model (a). Sets of expansion coefficients corresponding to the non-orthogonal basis and orthogonal basis (b, c)

## 2 数值结果分析和讨论

为探究双任意子态在一维 SSH 模型中的行为特性,着重分析系统的本征值及本征态特性。为了摒弃非物理自由度,采用正交基矢展开的本征方程式(6)进行计算和分析。在计算中,取格点数  $L = 40$ ,各能量物理量以  $t$  为单位(即取  $t = 1$ )。系统能谱如图 2 所示,图 2(a)和图 2(b)为统计参数  $\chi = 0.5$ ,跳跃循环参数  $\theta = 0.2\pi$  和  $\theta = 0.8\pi$  时,本征态能量随量子数  $v$  的依赖情况。其中,  $v$  表示能级按照本征能量  $E_v$  由低到高排序后的能级索引,用以标识各个本征能级。此外,图 2(c)—图 2(f)给出了典型能谱随统计参数  $\chi$  的变化关系。从图 2(a)和图 2(b)可知,系统的能谱呈现能级化结构。在  $\theta = 0.2\pi$  下,能量区间  $E_v \in [3.5, 3.6]$  与零能附近区间  $E_v \in [-0.1, 0.1]$  随统计参数  $\chi$  的变化,如图 2(c)和图 2(d)所示。统计参数  $\chi$  从 0 到 1 连续变化的过程中,能谱整体呈现出细微的数值波动,但零能不依赖于统计参数。当  $\theta$  增加至  $0.8\pi$  时,如图 2(b)所示,能谱仍呈现能级化结构,但具体情况发生显著变化:不仅能谱间隙缩小,而且在原能隙内所在的(e)区域出新的能级。这些新增能级不显著依赖统计参数。

为进一步理解各本征能量所对应的物理态特性,本文分析了任意子在空间格点上的分布情

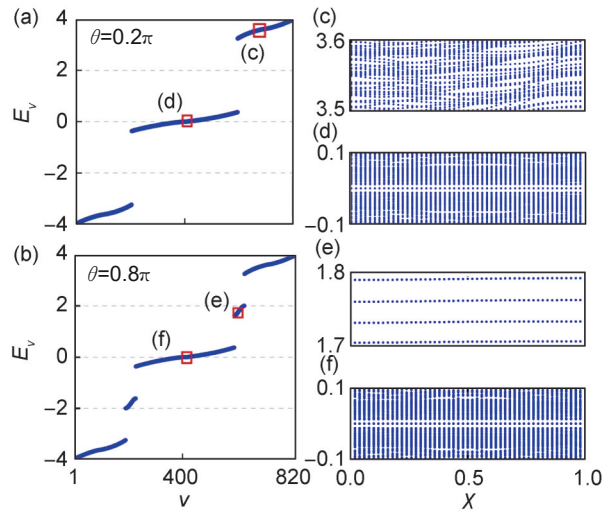


图2  $\chi = 0.5$ 时双任意子态本征能谱 $E_v$

(a)  $\theta = 0.2\pi$ , (b)  $\theta = 0.8\pi$ ; (c-f) 典型的局部能谱随统计参数 $\chi$ 的变化关系,各自对应于(a)和(b)中的红色框。

Fig. 2 Eigenenergy spectrum  $E_v$  of two-anyon states at  $\chi = 0.5$

(a)  $\theta = 0.2\pi$ , (b)  $\theta = 0.8\pi$ , (c-f) typical local energy spectra as functions of  $\chi$  corresponding to the regions of red squares in panels (a) and (b).

况。通过计算概率密度函数 $P(j)$ ,可得到格点 $j$ 处的粒子密度分布,其表达式为:

$$P(j) = \frac{1}{2} \langle \psi | n_j | \psi \rangle = \frac{1}{2} \sum_{m \leq j} |c'_{jm}|^2 + \frac{1}{2} \sum_{m \geq j} |c'_{mj}|^2, \quad (7)$$

其中 $n_j = a_j^\dagger a_j$ 表示粒子数算符,因子 $1/2$ 确保了 $P(j)$ 的归一性。为了研究边缘处的粒子分布情况,定义边缘概率密度 $P_{\text{end}}$ :

$$P_{\text{end}} = P(j=1) + P(j=L), \quad (8)$$

表示任意子在链两端的概率密度总和。当 $P_{\text{end}}$ 趋于0时,表示在边缘处没有任意子分布,当其接近于1时,表示两个任意子均局域于链的边缘处。为了研究统计参数对系统边缘局域性的影响,本文选取统计参数 $\chi = 0, 0.5, 1$ 三种典型情况,计算边缘概率密度 $P_{\text{end}}$ 随跳跃循环参数 $\theta$ 的变化关系。此外,以 $\chi = 1$ 的双任意子体系为例,展示不同 $P_{\text{end}}$ 值所对应的粒子在格点上的分布特征。相应结果如图3所示,图中横轴为跳跃循环参数 $\theta$ ,纵轴为本征能量 $E_v$ ,色标为各本征态的边缘概率密度 $P_{\text{end}}$ 数值。

图3(a)—图3(c)结果表明,不同统计参数 $\chi$ 下,边缘概率密度在 $\theta \in (0.5\pi, 1.5\pi)$ 范围内呈现出整体相似分布特征。在此 $\theta$ 范围内,零能态( $E_v = 0$ )对应的 $P_{\text{end}}$ 数值接近于1,结合图3(d)中的(I)图分析可知 $P(j=1) = 0.95$ ,两个粒子均局域在链的边缘处,形成典型的边缘束缚态。并且无论在玻色子( $\chi = 0$ )、任意子( $\chi = 0.5$ )或费米子( $\chi = 1$ )情况下,零能态对应的格点分布特征不发生变化,表明统计参数对拓扑边缘束缚态的影响较小。当 $P_{\text{end}}$ 数值约为0.5(如图中绿色区域所示),参考图3(d)中的(II)图可知,系统表现为一个任意子局域在边缘,另一个粒子则随机分布于整条链。 $P_{\text{end}}$ 数值趋向于0(如图中蓝色区域所示),系统处于体态,边缘处几乎无粒子分布。

然而,在 $\theta \in (0.5\pi, 1.5\pi)$ 范围之外,边缘概率密度 $P_{\text{end}}$ 会随统计参数的改变而发生变化。例如,对比图3(a)—图3(c)中靠近零能的中间区域, $P_{\text{end}}$ 在统计参数 $\chi = 0.5$ 时相较于其他两种情况数值偏高。此外,在费米子极限下,对应的 $P(j)$ 分布如图3(d)(IV)所示,系统存在粒子局域在链两端的边缘束缚态。图3(d)(IV)图的跳跃循环参数 $\theta = 1.71\pi$ ,处于拓扑平庸相,但通常情况下拓扑平庸相中并不存在边缘束缚态。对照统计参数分别为0和0.5的图3(a)和图3(b),发现在

$\theta = 1.71\pi$ ,  $E_v = -3.23$  时系统并未显示出边缘束缚态,直到统计参数为 1 时才表现出边缘束缚特性,这种行为表明该效应是由统计效应诱导的。

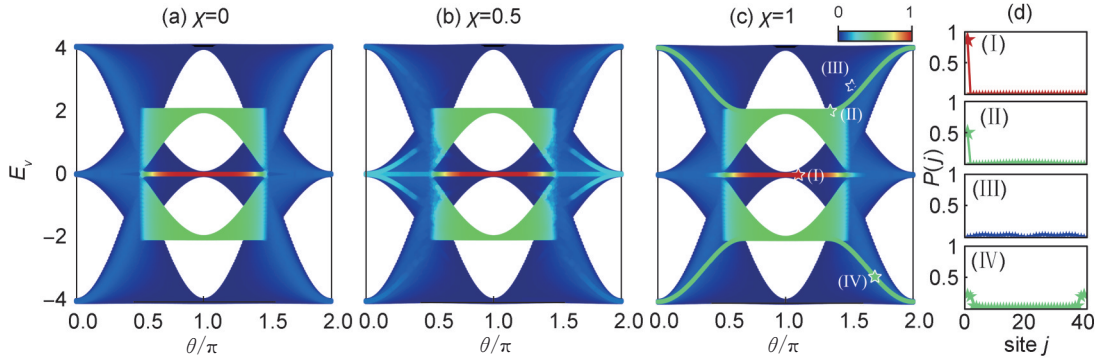


图3 本征能量  $E_v$  与跳跃循环参数  $\theta$  的依赖关系

其中统计参数  $\chi$  分别为 (a) 0, (b) 0.5 和 (c) 1, 图中色标为各本征态的边缘概率密度  $P_{\text{end}}$  数值; 典型参数下的概率密度函数  $P(j)$  (d), 具体参数为: (I)  $\theta = 1.11\pi$ ,  $E_v = 0$ ; (II)  $\theta = 1.35\pi$ ,  $E_v = 2.02$ ; (III)  $\theta = 1.52\pi$ ,  $E_v = 2.81$ ; (IV)  $\theta = 1.71\pi$ ,  $E_v = -3.23$ 。

Fig. 3 Dependence of the eigenenergy  $E_v$  on the cyclic hopping parameter  $\theta$

With the statistical parameter  $\chi$  set to (a) 0, (b) 0.5, and (c) 1, respectively. The color scale represents the edge probability density  $P_{\text{end}}$  for each state. (d) Probability density function  $P(j)$  under typical parameters: (I)  $\theta = 1.11\pi$ ,  $E_v = 0$ ; (II)  $\theta = 1.35\pi$ ,  $E_v = 2.02$ ; (III)  $\theta = 1.52\pi$ ,  $E_v = 2.81$ ; (IV)  $\theta = 1.71\pi$ ,  $E_v = -3.23$ .

### 3 结论

本文基于开边界条件下的一维 SSH 模型, 研究双任意子态的边缘局域性规律及其能谱特性, 重点分析两者与任意子的统计参数和跳跃循环参数之间的依赖关系, 分别推导了非正交基矢和正交基矢展开波函数对应的本征方程, 得到一维 SSH 模型双粒子态的二维晶格映射关系。研究结果表明, 双任意子态的本征能谱在跳跃循环参数  $\theta$  趋向 0 (拓扑平庸相) 或者  $\pi$  (拓扑相) 时呈现能级化结构, 且任意子的统计参数并不改变能谱的能级化特征。此外, 双任意子态的本征能量随着统计参数的改变而发生数值波动。通过数值计算粒子概率密度函数, 发现跳跃循环参数  $\theta$  在一定范围内粒子概率密度函数分布在不同统计参数下保持一致。但在此范围外, 统计参数显著改变其分布特征, 在统计参数趋向费米子极限时系统存在边缘束缚态。该结论为深入理解任意子统计参数对边缘态的调控作用提供了新视角。

#### 参考文献:

- [1] LAIDLAW M G G, DEWITT C M. Feynman Functional Integrals for Systems of Indistinguishable Particles[J]. *Phys Rev D*, 1971, **3**(6): 1375–1378. DOI: 10.1103/physrevd.3.1375.
- [2] LEINAAS J M, MYRHEIM J. On the Theory of Identical Particles[J]. *Nuovo Cimento B Ser*, 1977, **37**(1): 1–23. DOI: 10.1007/BF02727953.
- [3] WILCZEK F. Magnetic Flux, Angular Momentum, and Statistics[J]. *Phys Rev Lett*, 1982, **48**(17): 1144–1146. DOI: 10.1103/physrevlett.48.1144.
- [4] GREITER M, WILCZEK F. Fractional Statistics[J]. *Annu Rev Condens Matter Phys*, 2024, **15**: 131–157. DOI: 10.1146/annurev-conmatphys-040423-014045.
- [5] ZHANG J, XIE C D, PENG K C, et al. Anyon Statistics with Continuous Variables[J]. *Phys Rev A*, 2008, **78**(5): 052121. DOI: 10.1103/physreva.78.052121.
- [6] FENG G R, LONG G L, LAFLAMME R. Experimental Simulation of Anyonic Fractional Statistics with an NMR Quantum-information Processor[J]. *Phys Rev A*, 2013, **88**(2): 022305. DOI: 10.1103/physreva.88.022305.
- [7] JIANG L, BRENNEN G K, GORSHKOV A V, et al. Anyonic Interferometry and Protected Memories in Atomic Spin Lattices[J]. *Nat Phys*, 2008, **4**(6): 482–488. DOI: 10.1038/nphys943.
- [8] KEILMANN T, LANZMICH S, MCCULLOCH I, et al. Statistically Induced Phase Transitions and Anyons in 1D Optical Lattices[J]. *Nat Commun*, 2011, **2**: 361. DOI: 10.1038/ncomms1353.
- [9] ZHANG W X, YUAN H, WANG H T, et al. Observation

- of Bloch Oscillations Dominated by Effective Anyonic Particle Statistics[J]. *Nat Commun*, 2022, **13**(1): 2392. DOI: 10.1038/s41467-022-29895-0.
- [10] CAMINO F E, ZHOU W, GOLDMAN V J. Realization of a Laughlin Quasiparticle Interferometer: Observation of Fractional Statistics[J]. *Phys Rev B*, 2005, **72**(7): 075342. DOI: 10.1103/physrevb.72.075342.
- [11] BARTOLOMEI H, KUMAR M, BISOGNIN R, *et al.* Fractional Statistics in Anyon Collisions[J]. *Science*, 2020, **368**(6487): 173–177. DOI: 10.1126/science.aaz5601.
- [12] FRADKIN E. Jordan-Wigner Transformation for Quantum-spin Systems in Two Dimensions and Fractional Statistics[J]. *Phys Rev Lett*, 1989, **63**(3): 322–325. DOI: 10.1103/PhysRevLett.63.322.
- [13] KITAEV A Y. Fault-tolerant Quantum Computation by Anyons[J]. *Ann Phys*, 2003, **303**(1): 2–30. DOI: 10.1016/S0003-4916(02)00018-0.
- [14] IQBAL M, TANTIVASADAKARN N, VERRESEN R, *et al.* Non-abelian Topological Order and Anyons on a Trapped-ion Processor[J]. *Nature*, 2024, **626**(7999): 505–511. DOI: 10.1038/s41586-023-06934-4.
- [15] ANDERSEN T I, LENSKY Y D, KECHEDZHI K, *et al.* Non-abelian Braiding of Graph Vertices in a Superconducting Processor[J]. *Nature*, 2023, **618**(7964): 264–269. DOI: 10.1038/s41586-023-05954-4.
- [16] XU S B, SUN Z Z, WANG K, *et al.* Non-abelian Braiding of Fibonacci Anyons with a Superconducting Processor[J]. *Nat Phys*, 2024, **20**(9): 1469–1475. DOI: 10.1038/s41567-024-02529-6.
- [17] 王利, 贾丽芳, 张云波. 一维晶格中全同任意子的量子动力学与关联[J]. *物理学报*, 2022, **71**(13): 67–74. DOI: 10.7498/aps.70.20220188.  
WANG L, JIA L F, ZHANG Y B. Quantum Dynamics and Correlations of Indistinguishable Anyons in One-dimensional Lattices[J]. *Acta Phys Sin*, 2022, **71**(13): 67–74. DOI: 10.7498/aps.70.20220188.
- [18] WANG L M, WANG L, ZHANG Y B. Quantum Walks of Two Interacting Anyons in One-dimensional Optical Lattices[J]. *Phys Rev A*, 2014, **90**(6): 063618. DOI: 10.1103/physreva.90.063618.
- [19] KWAN J, SEGURA P, LI Y, *et al.* Realization of One-dimensional Anyons with Arbitrary Statistical Phase[J]. *Science*, 2024, **386**(6725): 1055–1060. DOI: 10.1126/science.adi3252.
- [20] LAU L L H, DUTTA S. Quantum Walk of Two Anyons across a Statistical Boundary[J]. *Phys Rev Research*, 2022, **4**: L012007. DOI: 10.1103/physrevresearch.4.L012007.
- [21] ZHENG C C, XIE J H, ZHANG M, *et al.* Necessity of Orthogonal Basis Vectors for the Two-anyon Problem in a One-dimensional Lattice[J]. *Commun Theor Phys*, 2024, **76**(12): 125103. DOI: 10.1088/1572-9494/ad7372.
- [22] LONGHI S, DELLA VALLE G. Anyonic Bloch Oscillations[J]. *Phys Rev B*, 2012, **85**(16): 165144. DOI: 10.1103/physrevb.85.165144.
- [23] ZHANG W X, QIAN L, SUN H J, *et al.* Anyonic Bound States in the Continuum[J]. *Commun Phys*, 2023, **6**: 139. DOI: 10.1038/s42005-023-01245-6.
- [24] OLEKHNO N A, ROZENBLIT A D, STEPANENKO A A, *et al.* Topological Transitions Driven by Quantum Statistics and Their Electrical Circuit Emulation[J]. *Phys Rev B*, 2022, **105**(20): 205113. DOI: 10.1103/PhysRevB.105.205113.
- [25] SHEN S Q. Topological Insulators: Dirac Equation in Condensed Matters[M]. Singapore: Springer, 2021, 17–32.
- [26] SCHINDLER F, COOK A M, VERGNORY M G, *et al.* Higher-order Topological Insulators[J]. *Sci Adv*, 2018, **4**(6): eaat0346. DOI: 10.1126/sciadv.aat0346.
- [27] SU W P, SCHRIEFFER J R, HEEGER A J. Solitons in Polyacetylene[J]. *Phys Rev Lett*, 1979, **42**(25): 1698–1701. DOI: 10.1103/physrevlett.42.1698.
- [28] LI L H, XU Z H, CHEN S. Topological Phases of Generalized Su-Schrieffer-Heeger Models[J]. *Phys Rev B*, 2014, **89**(8): 085111. DOI: 10.1103/physrevb.89.085111.
- [29] GHOSH A, MARTIN A M. Edge State Behavior of Interacting Bosons in a Su-Schrieffer-Heeger Lattice[J]. *Phys Rev Research*, 2025, **7**: 013169. DOI: 10.1103/physrevresearch.7.013169.
- [30] DE LÉSÉLEUC S, LIENHARD V, SCHOLL P, *et al.* Observation of a Symmetry-protected Topological Phase of Interacting Bosons with Rydberg Atoms[J]. *Science*, 2019, **365**(6455): 775–780. DOI: 10.1126/science.aav9105.
- [31] ATALA M, AIDELSBURGER M, BARREIRO J T, *et al.* Direct Measurement of the Zak Phase in Topological Bloch Bands[J]. *Nat Phys*, 2013, **9**(12): 795–800. DOI: 10.1038/nphys2790.
- [32] JIN T, RUGGIERO P, GIAMARCHI T. Bosonization of the Interacting Su-Schrieffer-Heeger Model[J]. *Phys Rev B*, 2023, **107**(20): L201111. DOI: 10.1103/physrevb.107.L201111.
- [33] BATCHELOR M T, GUAN X W, OELKERS N. One-dimensional Interacting Anyon Gas: Low-energy Properties and Haldane Exclusion Statistics[J]. *Phys Rev Lett*, 2006, **96**(21): 210402. DOI: 10.1103/PhysRevLett.96.210402.
- [34] KUNDU A. Exact Solution of Double  $\delta$  Function Bose Gas through an Interacting Anyon Gas[J]. *Phys Rev Lett*, 1999, **83**(7): 1275–1278. DOI: 10.1103/physrevlett.83.1275.