第 64 卷　第 4 期　　厦门大学学报(自然科学版)　　Vol. 64　No. 4
2025 年 7 月　　Journal of Xiamen University (Natural Science)　　Jul. 2025
doi:10.6043/j.issn.0438-0479.202408017

基于加权移位 Grünwald-Letnikov 公式的时间分数阶抛物型积分微分方程的紧差分方法

陈　奥,陈雪娟*,朱小娟
(集美大学理学院,福建 厦门 361021)

摘要:[**目的**]时间分数阶抛物型积分微分方程可用来描述具有记忆和遗传特性的复杂动态系统,其含有时间分数阶 Riemann-Liouville(R-L)积分项,与传统的抛物型方程有所不同.本文提出了一种有效求解时间分数阶抛物型积分微分方程的紧差分法.[**方法**]时间方向上对时间分数阶 R-L 积分项利用二阶加权移位的 Grünwald-Letnikov(SWGL)公式逼近,并结合 Crank-Nicolson(C-N)格式进行离散,空间方向上采用紧差分方法进行离散,从而得到基于 SWGL 公式的全离散数值格式,并使用能量方法证明了该数值格式的无条件稳定性和收敛性.[**结果**]该数值解法在时间方向上具有二阶精度,在空间方向上具有四阶精度.最后借助数值算例验证了方法的可行性和有效性.[**结论**]本文基于 SWGL 公式建立的时间分数阶抛物型积分微分方程的紧差分格式,为求解工程领域中含有分数阶积分项的物理模型提供了一种有效的高精度的数值解法.

关键词:时间分数阶抛物型积分微分方程;时间分数阶 Riemann-Liouville 积分;加权移位的 Grünwald-Letnikov 公式;Crank-Nicolson 格式;紧差分格式

中图分类号:O 241.82　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:0438-0479(2025)04-0740-07

Compact difference method for the time fractional parabolic integro-differential equation based on weighted and shifted Grünwald-Letnikov formulae

CHEN Ao,CHEN Xuejuan*,ZHU Xiaojuan
(School of Science,Jimei University,Xiamen 361021,China)

Abstract:[**Objective**] Time fractional parabolic integro-differential equations can be used to describe complex dynamic systems with memory and hereditary characteristics. Notably,the time fractional Riemann-Liouville (R-L) integral term differs from traditional parabolic equations. Herein,an effective compact difference method for solving time fractional parabolic integro-differential equations is proposed.[**Methods**] In time,the fractional R-L integral term is approximated by using the second-order weighted and shifted Grünwald-Letnikov (SWGL) formulae,combined with the Crank-Nicolson (C-N) scheme. Whereas in space,the compact difference method is used for discretization. Then a fully discrete numerical scheme based on the SWGL formulae is obtained. Finally,results of unconditional stability and convergence of this numerical scheme are proved by using the energy method.[**Results**] In the proposed numerical method,accuracies of the second order in time and those of the fourth order in space have been achieved. Finally,through numerical examples,the feasibility and the effectiveness of the method are confirmed.[**Conclusions**] The compact difference scheme of time fractional parabolic integro-differential equations based on the SWGL formulae is established,thus providing an effective and

收稿日期:2024-08-29　**录用日期**:2024-11-28
基金项目:福建省高校数学学科联盟计划项目(2024SXLMMS03);福建自然科学基金面上项目(2022J01338);集美大学数字福建大数据建模与智能计算研究所开放基金
* **通信作者**:xue_105@jmu.edu.cn
引文格式:陈奥,陈雪娟,朱小娟.基于加权移位 Grünwald-Letnikov 公式的时间分数阶抛物型积分微分方程的紧差分方法[J].厦门大学学报(自然科学版),2025,64(4):740-746.
Citation:CHEN A,CHEN X J,ZHU X J. Compact difference method for the time fractional parabolic integro-differential equation based on weighted and shifted Grünwald-Letnikov formulae[J]. J Xiamen Univ Nat Sci,2025,64(4):740-746.(in Chinese)

highly accurate numerical method for the physical model containing fractional integral terms in the engineering field.

Keywords: time fractional parabolic integro-differential equations; Riemann-Liouville integral; weighted and shifted Grünwald-Letnikov formulae; Crank-Nicolson scheme; compact difference scheme

分数阶微积分的核心概念之一是允许系统动态的描述超越传统的局部性假设. 在现代科学和工程领域，复杂系统的动态行为常常表现出显著的非局部性和记忆效应，这些特性在传统的整数阶微积分方程中往往难以得到准确描述. 为了更准确地描述这些现象以及系统状态对历史行为的依赖性，我们使用分数阶微积分方程来建造模型. 例如，Oldham 等[1]首次引入了时间分数阶微分方程，并探讨了其在物理学中的应用. Podlubny[2]提出了分数阶微积分的基本概念和理论框架，且随着研究的深入，人们逐渐认识到分数阶微积分方程在信号处理、黏弹性材料、医学、控制理论以及流体力学等领域的广泛应用[3-6]. 这些工作为分数阶微积分在相关工程领域应用中奠定了基础.

在物理相关工程领域，时间分数阶抛物型积分微分方程一直是研究物质的记忆和遗传等性质方面的重要工具. 然而由于这类方程的解通常在初始时刻附近具有奇异性，且积分项引入了非局部性，传统数值方法在处理这类问题时有诸多困难，在实际应用中我们是很难求出其解析解，因此寻求对此类方程既可行又高效的数值解和数值方法是必要的. 例如，Yan 等[7]提出了基于空间上的积分样条配置离散法和时间方向上的拉普拉斯变换的一类带有光滑核的抛物型积分微分方程的数值解法. Mclean 等[8]研究了带有光滑核和奇异核的抛物型积分微分方程初边值问题的数值方法. Tang[9]采用乘积型梯形公式的数值分析方法来处理积分项. Chen 等[10]采用 1985 年 Lubich 提出的二阶卷积求积公式处理方程中的积分项[11]. 曲双红等[12]针对抛物型积分微分方程，提出了一种连续时空有限元方法，与传统全离散方式不同的是，该方法对时间和空间变量同时采用有限元逼近，且无时间离散步长和空间网格尺寸的网格比限制. 翁胜龙[13]在针对时间方向的离散是使用非均匀网格的梯形 Product Interation 法则来逼近 Riemann-Liouville (R-L)积分. 上述研究方法的时间精度至多达到 $1+\alpha$ 阶. 为了使时间达到二阶收敛，Wang 等[14]提出了通过对积分项的乘积型平均积分法则，并结合 Crank-Nicolson(C-N)格式的紧差分方法求解一类带有弱奇异性抛物型积分微分方程的有效数值解法.

本文旨在给出一种求解时间分数阶抛物型积分微分方程的高精度的数值解法，该解法在时间方向上利用二阶加权移位的 Grünwald-Letnikov(SWGL)公式来逼近时间分数阶 R-L 积分项，并与 C-N 格式结合进行离散，在空间方向上采用紧差分方法[15]进行离散，从而得到全离散的紧差分格式. 利用能量方法分析数值格式的稳定性和收敛性，并通过引入紧差分方法，使得该格式不仅在时间方向上达到二阶精度，在空间方向上也可以达到四阶精度. 最后通过数值实验结果验证格式的可行性和有效性.

本文考虑时间分数阶抛物型积分微分方程[16]

$$\begin{cases} u_t(x,t) - {}_0I_t^\alpha \Delta u(x,t) - \Delta u(x,t) = f(x,t), \\ \quad 0 \leqslant x \leqslant L, 0 < t \leqslant T, \\ u(x,0) = u^0(x), 0 \leqslant x \leqslant L, \\ u(0,t) = \varphi_1(t), u(L,t) = \varphi_2(t), \\ \quad 0 < t \leqslant T. \end{cases} \tag{1}$$

其中，$0<\alpha<1$，Δ 为 Laplace 算子，$u^0(x)$ 为初始条件，$\varphi_1(t)$ 以及 $\varphi_2(t)$ 为已知函数. 这里 ${}_0I_t^\alpha$ 表示 R-L 分数阶积分，定义如下：

$${}_0I_t^\alpha u(x,t) := \int_0^t \omega_\alpha(t-\tau)u(x,\tau)\mathrm{d}\tau, \omega_\alpha(t) := \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)},$$
$$\alpha \in (0,1), t > 0.$$

1 预备知识

为了离散时间分数阶抛物型积分微分方程中的时间分数阶 R-L 积分项以及建立紧差分格式，引入相关的定义及引理. 移位的 Grünwald-Letnikov 差分算子[17]，定义如下：

$$A_{\tau,p}^{-\alpha}s(x) = \tau^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} g_k^{(\alpha)} s(x-(k-p)\tau), \tag{2}$$

其中 p 为整数，式(2)中的系数 $g_k^{(\alpha)}$ 是由生成函数 $(1-z)^{-\alpha}$ 生成：

$$(1-z)^{-\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\alpha}{k}(-z)^k = \sum_{k=0}^{\infty} g_k^{(\alpha)} z^k, \tag{3}$$

其中 $g_k^{(\alpha)} = (-1)^k \binom{-\alpha}{k} = \binom{\alpha+k-1}{k}$，$0<\alpha<1$，$|z|<1$，且递归计算得

$$g_0^{(\alpha)} = 1, g_k^{(\alpha)} = \left(1 - \frac{1-\alpha}{k}\right) g_{k-1}^{(\alpha)}, k = 1,2,\cdots. \tag{4}$$

引理 1[18] 设 $\alpha>0$，$s(t) \in L^p(\mathbb{R})$，$p \geqslant 1$，则 Riemann-Liouville 分数阶积分算子的 Fourier 变换满足

$$F[I_+^\alpha s(t)] = (i w)^{-\alpha} \hat{s}(\omega),$$

其中 $\hat{s}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-i\omega t}s(t)\mathrm{d}t$ 为 $s(t)$ 的 Fourier 变换.

引理 2[19] 设 $s(t)$,${}_{-\infty}D_t^{2-\alpha}s(t)$ 以及它的 Fourier 变换都属于 $L^1(\mathbb{R})$,构造一个 SWGL 算子

$$\mathcal{I}_{\tau,p,q}s(t)=\frac{2q+\alpha}{2(q-p)}A_{\tau,p}^{-\alpha}s(t)+\frac{2p+\alpha}{2(p-q)}A_{\tau,q}^{-\alpha}s(t),\tag{5}$$

且有

$$\mathcal{I}_{\tau,p,q}s(t)={}_{-\infty}I_t^{\alpha}s(t)+O(\tau^2),\tag{6}$$

其中 $t\in\mathbb{R}$,p、q 为整数且 $p\neq q$,这里 p 和 q 满足对称性,即 $\mathcal{I}_{\tau,p,q}s(t)=\mathcal{I}_{\tau,q,p}s(t)$.

引理 3[15] 设 c,d 为给定的常数,且 $d>0$.若函数 $s\in C^6[c-d,c+d]$,则有

$$\frac{1}{12}[s''(c-d)+10s''(c)+s''(c+d)]=\frac{1}{d^2}[s(c-d)-2s(c)+s(c+d)]+\frac{d^4}{240}s^{(6)}(\zeta),\quad \zeta\in(c-d,c+d).\tag{7}$$

2 全离散紧差分格式的建立

本节将建立方程(1)的全离散紧差分格式.首先为了得到齐次的初始条件,对方程(1)作变换:令 $v(x,t)=u(x,t)-u^0(x)$,即 $u(x,t)=v(x,t)+u^0(x)$,考虑以下时间分数阶抛物型积分微分方程

$$\begin{cases}v_t(x,t)-{}_0I_t^{\alpha}\Delta v(x,t)-\Delta v(x,t)=g(x,t),\\ \quad 0\leqslant x\leqslant L,0<t\leqslant T,\\ v(x,0)=0,0\leqslant x\leqslant L,\\ v(0,t)=\psi_1(t),v(L,t)=\psi_2(t),\\ \quad 0<t\leqslant T.\end{cases}\tag{8}$$

其中

$$g(x,t)=f(x,t)+{}_0I_t^{\alpha}\Delta u^0+\Delta u^0=f(x,t)+\left(1+\frac{t^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}\right)\cdot\Delta u^0.$$

在下面数值方法的分析中,假设方程(8)存在一个唯一且足够光滑的解.接下来,对时间和空间进行离散,将求解区域 $D=\{(x,t)\mid 0\leqslant x\leqslant L,0\leqslant t\leqslant T\}$ 做剖分.取两个正整数 M,N,将区间 $[0,L]$ 作 M 等分,将区间 $[0,T]$ 作 N 等分,记空间步长为 $h=L/M$,时间步长为 $\tau=T/N$,步长比 $r=\tau/h^2$.时间方向上的网格部分为 $\Omega_\tau=\{t_n=n\tau,0\leqslant n\leqslant N\}$,空间方向上的网格部分为 $\Omega_h=\{x_i=ih,0\leqslant i\leqslant M\}$.记 $V_h=\{u\mid u=(u_0,u_1,\cdots,u_M)\}$ 和 $V_\tau=\{u\mid u=(u^0,u^1,\cdots,u^N)\}$ 分别为定义在 Ω_h 和 Ω_τ 的网格函数空间.再给出定义在 $\Omega_h\times\Omega_\tau$ 上的网格函数 $u=\{u_i^n\mid 0\leqslant i\leqslant M,0\leqslant n\leqslant N\}$,并引入以下记号

$$\begin{aligned}&t_{n+1/2}=\frac{t_n+t_{n+1}}{2},f_i^{n+1/2}=f(x_i,t_{n+1/2}),\\&u_i^{n+1/2}=\frac{1}{2}(u_i^{n+1}+u_i^n),\delta_t u_i^{n+1/2}=\frac{1}{\tau}(u_i^{n+1}-u_i^n),\\&\delta_x u_{i-1/2}^n=\frac{u_i^n-u_{i-1}^n}{h},\delta_x^2u_i^n=\frac{u_{i+1}^n-2u_i^n+u_{i-1}^n}{h^2}.\end{aligned}\tag{9}$$

对于任意网格函数 $u,v\in V_h$,定义如下紧算子 $\mathcal{A}$、离散内积以及范数:

$$\begin{aligned}&\mathcal{A}u_i=\begin{cases}\frac{1}{12}(u_{i-1}+10u_i+u_{i+1})=\left(1+\frac{h^2}{12}\delta_x^2\right)u_i,1\leqslant i\leqslant M-1,\\ u_i,i=0,M,\end{cases}\\&\langle u,v\rangle=h\left(\frac{1}{2}u_0v_0+\sum_{i=1}^{M-1}u_iv_i+\frac{1}{2}u_Mv_M\right),\\&\|v\|=\sqrt{\langle v,v\rangle},\\&\langle\delta_xu,\delta_xv\rangle=h\sum_{i=1}^{M}(\delta_xu_{i-1/2})(\delta_xv_{i-1/2}),\\&\langle u,v\rangle_{\mathcal{A}}=(u,v)-\frac{h^2}{12}(\delta_xu,\delta_xv),\\&\|v\|_{\mathcal{A}}=\sqrt{\langle v,v\rangle_{\mathcal{A}}},\\&\|v\|_\infty=\max_{0\leqslant i\leqslant M}|v_i|,|v|_1=\|\delta_xv\|.\end{aligned}\tag{10}$$

若对于任意网格函数 $v\in V_h$,且 $u\in\mathring{V}_h=\{u\mid u=(u_0,u_1,\cdots,u_M),u_0=u_M=0\}$,则以下公式成立[20]:

$$\begin{aligned}&\sqrt{\langle v,v\rangle_{\mathcal{A}}}=\sqrt{(\mathcal{A}v,v)},\\&\frac{2}{3}\|v\|^2\leqslant\|v\|_{\mathcal{A}}^2\leqslant\|v\|^2,\\&\langle\delta_x^2v,u\rangle=-\langle\delta_xv,\delta_xu\rangle,\|u\|\leqslant\frac{L}{\sqrt{6}}|u|_1.\end{aligned}\tag{11}$$

我们考虑时间分数阶 R-L 积分的 SWGL 近似,需把方程(8)中的函数 $v(x,t)$ 其 $t\leqslant 0$ 的部分扩展为零,则可以得到

$${}_0I_t^{\alpha}v(x,t)=\tau^{\alpha}\lambda_1\sum_{k=0}^{[t/\tau]+p}g_k^{(\alpha)}v(x,t-(k-p)\tau)+\tau^{\alpha}\lambda_2\sum_{k=0}^{[t/\tau]+q}g_k^{(\alpha)}v(x,t-(k-q)\tau)+O(\tau^2),\tag{12}$$

其中 $\lambda_1=\frac{2q+\alpha}{2(q-p)}$,$\lambda_2=\frac{2p+\alpha}{2(p-q)}$,且[·]表示取整.

令式(12)中 $(p,q)=(0,-1)$,则方程(8)中时间分数阶 R-L 积分项在点 (x_i,t_n) 处的离散形式如下:

$${}_0I_t^{\alpha}\Delta v(x_i,t_n)=\frac{2-\alpha}{2}\tau^{\alpha}\sum_{k=0}^{n}g_k^{(\alpha)}\Delta v(x_i,t_{n-k})+$$

$$\frac{\alpha}{2}\tau^{\alpha}\sum_{k=0}^{n-1}g_k^{(\alpha)}\Delta v(x_i,t_{n-k-1})+O(\tau^2)=$$

$$\tau^{\alpha}\sum_{k=0}^{n}\omega_k^{(\alpha)}\Delta v(x_i,t_{n-k})+O(\tau^2),\tag{13}$$

其中,

$$\omega_0^{(\alpha)}=\frac{(2-\alpha)}{2}g_0^{(\alpha)},$$

$$\omega_k^{(\alpha)}=\frac{(2-\alpha)}{2}g_k^{(\alpha)}+\frac{\alpha}{2}g_{k-1}^{(\alpha)},k\geqslant 1.\tag{14}$$

有了以上的介绍,接下来将针对方程(8)建立一个具有 $O(\tau^2+h^4)$ 精度的无条件稳定的紧差分格式.

将方程(8)的第一式在点 $(x_i,t_{n+1/2})$ 处离散,有

$$v_t(x_i,t_{n+1/2})-{}_0I_t^{\alpha}\Delta v(x_i,t_{n+1/2})-\Delta v(x_i,t_{n+1/2})=g(x_i,t_{n+1/2}),1\leqslant i\leqslant M-1,0\leqslant n\leqslant N-1.\tag{15}$$

在式(15)两端作用紧算子$\mathcal{A}$,得

$$\mathcal{A}v_t(x_i,t_{n+1/2})-\mathcal{A}_0I_t^{\alpha}\Delta v(x_i,t_{n+1/2})-\mathcal{A}\Delta v(x_i,t_{n+1/2})=\mathcal{A}g(x_i,t_{n+1/2}),1\leqslant i\leqslant M-1,0\leqslant n\leqslant N-1.\tag{16}$$

令 $V_i^n=v(x_i,t_n)$,$0\leqslant i\leqslant M,0\leqslant n\leqslant N$,由 Taylor 展开公式以及引理 3 易得如下公式:

$$\mathcal{A}\Delta v(x_i,t_n)=\mathcal{A}v_{xx}(x_i,t_n)=\delta_x^2V_i^n+O(h^4),\tag{17}$$

$$\mathcal{A}\left[\frac{1}{2}[v_{xx}(x_i,t_n)+v_{xx}(x_i,t_{n+1})]\right]=\frac{1}{2}(\delta_x^2V_i^n+\delta_x^2V_i^{n+1})+O(h^4),1\leqslant i\leqslant M-1,0\leqslant n\leqslant N-1,\tag{18}$$

$$v_t(x_i,t_{n+1/2})=\frac{1}{\tau}[v(x_i,t_{n+1})-v(x_i,t_n)]+O(\tau^2)=\delta_tV_i^{n+1/2}+O(\tau^2).\tag{19}$$

将式(13)、式(17)～(19)代入式(16),得到

$$\mathcal{A}\delta_tV_i^{n+1/2}-\frac{\tau^{\alpha}}{2}\sum_{k=0}^{n}\omega_k^{(\alpha)}(\delta_x^2V_i^{n+1-k}+\delta_x^2V_i^{n-k})-\delta_x^2V_i^{n+1/2}=\mathcal{A}g_i^{n+1/2}+R_i^{n+1/2}.\tag{20}$$

其中 $\mathcal{A}g_i^{n+1/2}=\mathcal{A}f_i^{n+1/2}+\left(1+\frac{t_{n+1/2}^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}\right)\cdot\delta_x^2u_i^0$,存在一个与 τ 和 h 无关的正常数 C_1 使得

$$|R_i^{n+1/2}|\leqslant C_1(\tau^2+h^4),1\leqslant i\leqslant M-1,0\leqslant n\leqslant N-1.$$

注意到初边值条件方程(8)的第二式和第三式,有

$$\begin{cases}V_i^0=0,0\leqslant i\leqslant M,\\ V_0^n=\psi_1(t_n),V_M^n=\psi_2(t_n),0\leqslant n\leqslant N.\end{cases}\tag{21}$$

在式(20)中略去小量项 $R_i^{n+1/2}$,用数值解 v_i^k 近似精确解 V_i^k,对方程(8)建立如下紧差分格式:

$$\begin{cases}\mathcal{A}\delta_tv_i^{n+1/2}-\frac{\tau^{\alpha}}{2}\sum_{k=0}^{n}\omega_k^{(\alpha)}(\delta_x^2v_i^{n+1-k}+\delta_x^2v_i^{n-k})-\\ \quad\delta_x^2v_i^{n+1/2}=\mathcal{A}g_i^{n+1/2},\\ \quad 1\leqslant i\leqslant M-1,0\leqslant n\leqslant N-1,\\ v_i^0=0,0\leqslant i\leqslant M,\\ v_0^n=\psi_1(t_n),v_M^n=\psi_2(t_n),0\leqslant n\leqslant N.\end{cases}\tag{22}$$

在下一节中,将分析紧差分格式(22)解的存在唯一性.

3　差分格式解的存在唯一性

定理 1　紧差分格式(22)是唯一可解的.

证明　记

$$v^n=(v_0^n,v_1^n,\cdots,v_{M-1}^n,v_M^n).$$

由方程(22)知,第 0 层值 v^0 已给定.设已求得第 n 层的值 v^n,则关于第 $n+1$ 层值 v^{n+1} 的差分格式为

$$\begin{cases}\mathcal{A}\delta_tv_i^{n+1/2}-\frac{\tau^{\alpha}}{2}\sum_{k=0}^{n}\omega_k^{(\alpha)}(\delta_x^2v_i^{n+1-k}+\delta_x^2v_i^{n-k})-\\ \quad\delta_x^2v_i^{n+1/2}=\mathcal{A}g_i^{n+1/2},1\leqslant i\leqslant M-1,\\ v_0^{n+1}=\beta_1(t_{n+1}),v_M^{n+1}=\beta_2(t_{n+1}).\end{cases}\tag{23}$$

将方程(23)的第一式展开可得

$$\mathcal{A}v_i^{n+1}-\frac{\tau^{\alpha+1}}{2}\omega_0^{(\alpha)}\delta_x^2v_i^{n+1}-\frac{\tau}{2}\delta_x^2v_i^{n+1}=\mathcal{A}v_i^n+\frac{\tau}{2}\delta_x^2v_i^n+\tau\mathcal{A}g_i^{n+1/2}+\frac{\tau^{\alpha+1}}{2}\sum_{k=0}^{n-1}(\omega_{k+1}^{(\alpha)}+\omega_k^{(\alpha)})\delta_x^2v_i^{n-k},$$

由式(10)定义的紧算子$\mathcal{A}$,得

$$\frac{1}{12}(v_{i-1}^{n+1}+10v_i^{n+1}+v_{i+1}^{n+1})-\left(\frac{r\tau^{\alpha}}{2}\omega_0^{(\alpha)}+\frac{r}{2}\right)(v_{i-1}^{n+1}-2v_i^{n+1}+v_{i+1}^{n+1})=\frac{1}{12}(v_{i-1}^n+10v_i^n+v_{i+1}^n)+\frac{r}{2}(v_{i-1}^n-2v_i^n+v_{i+1}^n)+\tau\mathcal{A}g_i^{n+1/2}+\frac{r\tau^{\alpha}}{2}\sum_{k=0}^{n-1}(\omega_{k+1}^{(\alpha)}+\omega_k^{(\alpha)})(v_{i-1}^{n-k}-2v_i^{n-k}+v_{i+1}^{n-k}),$$

进一步化简得到

$$\left(\frac{1}{12}-\frac{r\tau^{\alpha}}{2}\omega_0^{(\alpha)}-\frac{r}{2}\right)v_{i-1}^{n+1}+\left(\frac{5}{6}+r\tau^{\alpha}\omega_0^{(\alpha)}+r\right)v_i^{n+1}+\left(\frac{1}{12}-\frac{r\tau^{\alpha}}{2}\omega_0^{(\alpha)}-\frac{r}{2}\right)v_{i+1}^{n+1}=\left(\frac{1}{12}+\frac{r}{2}\right)v_{i-1}^n+\left(\frac{5}{6}-r\right)v_i^n+\left(\frac{1}{12}+\frac{r}{2}\right)v_{i+1}^n+\tau\mathcal{A}g_i^{n+1/2}+\frac{r\tau^{\alpha}}{2}\sum_{k=0}^{n-1}(\omega_{k+1}^{(\alpha)}+\omega_k^{(\alpha)})(v_{i-1}^{n-k}-2v_i^{n-k}+v_{i+1}^{n-k}).\tag{24}$$

由式(24)容易看出,在每个时间层,差分格式的系数矩阵是严格主对角占优的,因而我们建立的紧差分格式(22)有唯一解.定理证毕.

4 差分格式解的稳定性和收敛性

本节将借助如下引理 4 以及在第 2 节中引入的离散内积和对应范数来分析数值格式的稳定性和收敛性.

引理 4[19] 式(14)定义的 $\{\omega_k^{(\alpha)}\}_{k=0}^{\infty}$，对于任何正整数 k 和实向量 $(a_1,a_2,\cdots,a_N)^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^N$，则有

$$\sum_{n=0}^{N-1}\Big(\sum_{k=0}^{n}\omega_k^{(\alpha)}a^{n+1-k}\Big)a^{n+1}\geqslant 0.$$

4.1 稳定性分析

在实际运算中，误差是不可避免的. 在以上分析中，得到紧差分格式(22)的解应是 v_i^n. 记含有扰动误差的方程(22)的解为 $\tilde{v}_i^n$，扰动误差为 $\varepsilon_i^n=\tilde{v}_i^n-v_i^n$，$\tilde{f}_i^{n+1/2}$ 表示 $f_i^{n+1/2}$ 的扰动，$0\leqslant i\leqslant M-1,0\leqslant n\leqslant N-1$，则扰动误差满足如下差分格式：

$$\begin{cases}\mathcal{A}\delta_t\varepsilon_i^{n+1/2}-\dfrac{\tau^\alpha}{2}\sum\limits_{k=0}^{n}\omega_k^{(\alpha)}(\delta_x^2\varepsilon_i^{n+1-k}+\delta_x^2\varepsilon_i^{n-k})-\\ \quad\delta_x^2\varepsilon_i^{n+1/2}=\mathcal{A}\tilde{f}_i^{n+1/2}+\Big(1+\dfrac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\Big)\delta_x^2\varepsilon_i^0,\\ \quad 1\leqslant i\leqslant M-1,0\leqslant n\leqslant N-1,\\ \varepsilon_0^n=\varepsilon_M^n=0,0\leqslant n\leqslant N.\end{cases}\tag{25}$$

其中 $\varepsilon_i^0=\tilde{v}_i^0-v_i^0(i=1,2,\cdots,M-1)$ 为初值扰动. 我们有如下稳定性结论.

定理 2 差分格式(25)是无条件稳定的，即有

$$\|\varepsilon^n\|^2\leqslant\frac{3}{2}\|\varepsilon^0\|^2+\frac{L^2\cdot T}{4}\cdot\Big[\max_{0\leqslant j\leqslant n-1}\|\mathcal{A}\tilde{f}^{j+1/2}\|^2+\Big(1+\frac{T^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\Big)^2\cdot\|\delta_x^2\varepsilon^0\|^2\Big],1\leqslant n\leqslant N.\tag{26}$$

证明 记

$$\tilde{g}_i^{n+1/2}=\tilde{f}_i^{n+1/2}+\Big(1+\frac{t_{n+1/2}^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\Big)\delta_x^2\varepsilon_i^0,$$

用 $2\varepsilon^{n+1/2}$ 和方程(25)的第一式两边作内积，可得

$$2(\mathcal{A}\delta_t\varepsilon^{n+1/2},\varepsilon^{n+1/2})-\frac{\tau^\alpha}{2}\sum_{k=0}^{n}\omega_k^{(\alpha)}(\delta_x^2(\varepsilon^{n+1-k}+\varepsilon^{n-k}),2\varepsilon^{n+1/2})-2(\delta_x^2\varepsilon^{n+1/2},\varepsilon^{n+1/2})=2(\mathcal{A}\tilde{g}^{n+1/2},\varepsilon^{n+1/2}),$$

其中 $0\leqslant n\leqslant N-1$，由式(11)有

$$2(\mathcal{A}\delta_t\varepsilon^{n+1/2},\varepsilon^{n+1/2})=-\frac{\tau^\alpha}{2}\sum_{k=0}^{n}\omega_k^{(\alpha)}(\delta_x(\varepsilon^{n+1-k}+\varepsilon^{n-k}),\delta_x(\varepsilon^{n+1}+\varepsilon^n))+2(\delta_x^2\varepsilon^{n+1/2},\varepsilon^{n+1/2})+2(\mathcal{A}\tilde{g}^{n+1/2},\varepsilon^{n+1/2}),\tag{27}$$

利用以下公式

$$2(\mathcal{A}\delta_t\varepsilon^{n+1/2},\varepsilon^{n+1/2})=\frac{1}{\tau}(\|\varepsilon^{n+1}\|_{\mathcal{A}}^2-\|\varepsilon^n\|_{\mathcal{A}}^2),\tag{28}$$

$$(\delta_x^2\varepsilon^{n+1/2},\varepsilon^{n+1/2})=-(\delta_x\varepsilon^{n+1/2},\delta_x\varepsilon^{n+1/2})=-|\varepsilon^{n+1/2}|_1^2,\tag{29}$$

由式(27)得到

$$\frac{1}{\tau}(\|\varepsilon^{n+1}\|_{\mathcal{A}}^2-\|\varepsilon^n\|_{\mathcal{A}}^2)=-\frac{\tau^\alpha}{2}\sum_{k=0}^{n}\omega_k^{(\alpha)}(\delta_x(\varepsilon^{n+1-k}+\varepsilon^{n-k}),\delta_x(\varepsilon^{n+1}+\varepsilon^n))-2|\varepsilon^{n+1/2}|_1^2+2(\mathcal{A}\tilde{g}^{n+1/2},\varepsilon^{n+1/2}),$$

上式两边同乘 τ，将 n 记为 j，并对 j 从 0 到 $n-1$ 求和，得到

$$\sum_{j=0}^{n-1}(\|\varepsilon^{j+1}\|_{\mathcal{A}}^2-\|\varepsilon^j\|_{\mathcal{A}}^2)=-\frac{\tau^{\alpha+1}}{2}\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{j}\omega_k^{(\alpha)}(\delta_x(\varepsilon^{j+1-k}+\varepsilon^{j-k}),\delta_x(\varepsilon^{j+1}+\varepsilon^j))-2\tau\sum_{j=0}^{n-1}|\varepsilon^{j+1/2}|_1^2+2\tau\sum_{j=0}^{n-1}(\mathcal{A}\tilde{g}^{j+1/2},\varepsilon^{j+1/2}),$$

运用引理 4，有

$$\|\varepsilon^n\|_{\mathcal{A}}^2\leqslant\|\varepsilon^0\|_{\mathcal{A}}^2-2\tau\sum_{j=0}^{n-1}|\varepsilon^{j+1/2}|_1^2+2\tau\sum_{j=0}^{n-1}(\mathcal{A}\tilde{g}^{j+1/2},\varepsilon^{j+1/2}),$$

再由式(10)和(11)，可得

$$\begin{aligned}\frac{2}{3}\|\varepsilon^n\|^2&\leqslant\|\varepsilon^0\|^2-2\tau\sum_{j=0}^{n-1}|\varepsilon^{j+1/2}|_1^2+2\tau\sum_{j=0}^{n-1}(\mathcal{A}\tilde{g}^{j+1/2},\varepsilon^{j+1/2})\leqslant\|\varepsilon^0\|^2-\\&2\tau\sum_{j=0}^{n-1}|\varepsilon^{j+1/2}|_1^2+\frac{12}{L^2}\tau\sum_{j=0}^{n-1}\|\varepsilon^{j+1/2}\|^2+\frac{L^2}{12}\tau\sum_{j=0}^{n-1}\|\mathcal{A}\tilde{g}^{j+1/2}\|^2\leqslant\|\varepsilon^0\|^2-\\&2\tau\sum_{j=0}^{n-1}|\varepsilon^{j+1/2}|_1^2+2\tau\sum_{n=0}^{n-1}|\varepsilon^{j+1/2}|_1^2+\frac{L^2}{12}\tau\sum_{j=0}^{n-1}\|\mathcal{A}\tilde{g}^{j+1/2}\|^2\leqslant\|\varepsilon^0\|^2+\\&\frac{L^2}{12}\tau\sum_{j=0}^{n-1}\|\mathcal{A}\tilde{g}^{j+1/2}\|^2=\|\varepsilon^0\|^2+\frac{L^2}{12}\tau\sum_{j=0}^{n-1}\Big\|\mathcal{A}\tilde{f}^{j+1/2}+\Big(1+\frac{T^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\Big)\delta_x^2\varepsilon^0\Big\|^2\leqslant\\&\|\varepsilon^0\|^2+\frac{L^2\cdot T}{6}\cdot\Big[\max_{0\leqslant j\leqslant n-1}\|\mathcal{A}\tilde{f}^{j+1/2}\|^2+\Big(1+\frac{T^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\Big)^2\cdot\|\delta_x^2\varepsilon^0\|^2\Big],\end{aligned}$$

从而得到如下稳定性结论

$$\|\varepsilon^n\|^2\leqslant\frac{3}{2}\|\varepsilon^0\|^2+\frac{L^2\cdot T}{4}\cdot$$

$$\left[\max_{0\leqslant j\leqslant n-1}\|\mathcal{A}\widetilde{f}^{j+1/2}\|^2+\left(1+\frac{T^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\right)^2\cdot\right.$$
$$\left.\|\delta_x^2\varepsilon^0\|^2\right].$$

定理证毕.

4.2　收敛性分析

定理 3　设 $v(x,t)\in C_{x,t}^{6,2}([0,L]\times[0,T])$ 是方程(20)的解,$\{v_i^n\mid 0\leqslant i\leqslant M,0\leqslant n\leqslant N\}$ 是紧差分格式(22)的解,记误差 $e_i^n=v(x_i,t_n)-v_i^n,0\leqslant i\leqslant M,0\leqslant n\leqslant N$,则有

$$\|e^n\|\leqslant\frac{\sqrt{2T}}{4}\cdot L\cdot C_1(\tau^2+h^4),0\leqslant n\leqslant N.$$

证明　将式(20)与方程(22)第一式相减,得到误差方程组

$$\begin{cases}\mathcal{A}\delta_t e_i^{n+1/2}-\dfrac{\tau^\alpha}{2}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\omega_k^{(\alpha)}\delta_x^2(e_i^{n+1-k}+e_i^{n+1})-\\ \quad\delta_x^2e_i^{n+1/2}=R_i^{n+1/2},\\ \quad 1\leqslant i\leqslant M-1,0\leqslant n\leqslant N-1,\\ e_0^n=e_M^n=0,0\leqslant n\leqslant N,\\ e_i^0=0,1\leqslant i\leqslant M-1.\end{cases}\tag{30}$$

其中 $|R_i^{n+1/2}|\leqslant C_1(\tau^2+h^4)$.

类似定理 2 的证明,用 $2e_i^{n+1/2}$ 与式(30)的第一式作内积,经推导后得

$$\frac{2}{3}\|e^n\|^2\leqslant\frac{L^2}{12}\tau\sum_{j=0}^{n-1}\|R^{j+1/2}\|^2\leqslant\frac{L^2\cdot T}{12}\cdot$$
$$C_1^2(\tau^2+h^4)^2,0\leqslant n\leqslant N-1.$$

两边开方得

$$\|e^n\|\leqslant\frac{\sqrt{2T}}{4}\cdot L\cdot C_1(\tau^2+h^4).$$

定理证毕.

通过本节的分析,我们建立的紧差分格式(22)对 $\forall\alpha\in(0,1)$ 时,具有 $O(\tau^2+h^4)$ 精度且无条件稳定.

5　数值实验

本节通过数值算例验证所构造的数值格式的可行性和理论分析的有效性.在以下的数值实验中,所有的测试都是在 MATLAB 中完成的,我们定义数值解的最大误差以及收敛阶为

$$e_\infty(h,\tau)=\max_{\substack{0\leqslant i\leqslant M\\0\leqslant n\leqslant N}}\|v(x_i,t_n)-v_i^n\|,$$

$$\mathrm{Rate}_h=\log_2\frac{e(2h,\tau)}{e(h,\tau)},\mathrm{Rate}_\tau=\log_2\frac{e(h,2\tau)}{e(h,\tau)}.$$

考虑如下的时间分数阶抛物型积分微分方程:

$$u_t(x,t)-{}_0I_t^\alpha u_{xx}(x,t)-u_{xx}(x,t)=f(x,t),$$

其中 $x\in[0,1],t\in(0,1]$,设上述方程的精确解为 $u(x,t)=e^xt^{\alpha+2}$,则对应的边界条件为

$$u(0,t)=t^{\alpha+2},u(1,t)=et^{\alpha+2},$$

初始条件为 $u(x,0)=0$,相应的右端项为

$$f(x,t)=$$
$$e^x\left[(\alpha+2)t^{\alpha+1}-\frac{\Gamma(\alpha+3)}{\Gamma(2\alpha+3)}t^{2\alpha+2}-t^{\alpha+2}\right].$$

表 1 列出了当 α 分别取 0.1,0.5,0.9 时,固定空间步长 $h=1/50$,取不同时间份数所得数值解的最大误差及时间精度.实验结果反映出紧差分格式(22)在时间方向上的收敛精度达到二阶.表 2 给出了固定时间步长 $\tau=1/10\ 000$ 和 $\alpha=0.5$,当取不同空间份数时所得数值解的最大误差及空间精度.实验结果反映出紧差分格式(22)在空间方向上的收敛精度达到四阶.这和本文的理论分析结果一致.

6　结　论

本文主要研究含时间分数阶 R-L 积分项的分数阶抛物型积分微分方程的高精度数值解法.在时间方

表 1　时间方向的最大误差和收敛阶($h=1/50$)

Tab.1　The maximum errors and convergence orders for time ($h=1/50$)

τ	$\alpha=0.1$		$\alpha=0.5$		$\alpha=0.9$	
	$e_\infty(h,\tau)$	Rate_τ	$e_\infty(h,\tau)$	Rate_τ	$e_\infty(h,\tau)$	Rate_τ
1/5	2.585×10^{-3}	—	4.837×10^{-3}	—	6.457×10^{-3}	—
1/10	6.503×10^{-4}	1.991	1.208×10^{-3}	2.001	1.612×10^{-3}	2.002
1/20	1.627×10^{-4}	1.999	3.028×10^{-4}	1.997	4.035×10^{-4}	1.999
1/40	4.068×10^{-5}	1.999	7.583×10^{-5}	1.998	1.009×10^{-4}	1.999
1/80	1.017×10^{-5}	1.999	1.898×10^{-5}	1.999	2.524×10^{-5}	2.000
1/160	2.544×10^{-6}	2.000	4.747×10^{-6}	1.999	6.311×10^{-6}	2.000

表 2 空间方向的最大误差和收敛阶($\tau=1/10\ 000,\alpha=0.5$)

Tab. 2 The maximum errors and convergence orders for space ($\tau=1/10\ 000,\alpha=0.5$)

h	$e_\infty(h,\tau)$	Rate_h
1/2	4.646×10^{-5}	—
1/4	2.922×10^{-6}	3.991
1/8	1.819×10^{-7}	4.006
1/16	1.032×10^{-8}	4.139

向上,利用二阶 SWGL 公式,结合 C-N 格式逼近;在空间方向上,采用紧差分方法近似,从而得到了一个收敛阶为 $O(\tau^2+h^4)$ 且无条件稳定的紧差分格式. 给出了该格式的稳定性和收敛性的证明,并通过数值算例来验证此方法的可行性和有效性. 这种方法还可应用到其他含分数阶积分项的物理模型中,以期获得工程学科中其他潜在具有记忆和遗传特性的复杂动态系统等问题的高精度数值解. 由于该方法对所研究问题的解有较高的正则性要求,对正则性较低的解会出现掉阶的现象,如何处理该问题,这将是我们后续的工作.

参考文献:

[1] OLDHAM K,SPANIER J. The fractional calculus:theory and applications of differentiation and integration to arbitrary order[M]. New York:Academic Press,1974.

[2] PODLUBNY I. Fractional differential equation[M]. San Diego:Academic Press,1999.

[3] MEERSCHAERT M M,TADJERAN C. Finite difference approximations for two-sided space-fractional partial differential equations[J]. Applied Numerical Mathematics,2005,56(1):80-90.

[4] VLASOV V V,PEREZ ORTIZ R. Spectral analysis of integro-differential equations in viscoelasticity and thermal physics[J]. Mathematical Notes,2015,98:689-693.

[5] DING Y S,YE H P. A fractional-order differential equation model of HIV infection of CD4+T-cells[J]. Mathematical and Computer Modelling,2009,50(3):386-392.

[6] RENARDY M. Mathematical analysis of viscoelastic flows[J]. Annual Review of Fluid Mechanics,1989,21(1):21-34.

[7] YAN Y,FAIRWEATHER G. Orthogonal spline collocation methods for some partial integrodifferential equations[J]. SIAM Journal on Numerical Analysis,1992,29(3):755-768.

[8] MCLEAN W,THOMÉE V. Numerical solution of an evolution equation with a positive-type memory term[J]. The ANZIAM Journal,1993,35(1):23-70.

[9] TANG T. A finite difference scheme for partial integro-differential equations with a weakly singular kernel[J]. Applied Numerical Mathematics,1993,11(4):309-319.

[10] CHEN H B,GAN S Q,XU D,et al. A second-order BDF compact difference scheme for fractional-order Volterra equation[J]. International Journal of Computer Mathematics,2016,93(7):1140-1154.

[11] LUBICH C H. Fractional linear multistep methods for Abel-Volterra integral equations of the second kind[J]. Mathematics of Computation,1985,45(172):463-469.

[12] 曲双红,郭昱杉,关宏波. 抛物型积分微分方程的连续时空有限元方法[J]. 河南师范大学学报(自然科学版),2022,50(3):67-72.

[13] 翁胜龙. 一类时间分数阶积分微分方程的有限差分法[D]. 广东:广东工业大学,2023:3-15.

[14] WANG Y M,ZHANG Y J. A Crank-Nicolson-type compact difference method with the uniform time step for a class of weakly singular parabolic integro-differential equations[J]. Applied Numerical Mathematics,2022,172:566-590.

[15] 孙志忠. 偏微分方程数值解法(第三版)[M]. 北京:科学出版社,2022:86-173.

[16] MCLEAN W,SLOAN I H,THOMÉE V. Time discretization via Laplace transformation of an integro-differential equation of parabolic type[J]. Numerische Mathematik,2006,102(3):497-522.

[17] LUBICH C H. Discretized fractional calculus[J]. SIAM Journal on Mathematical Analysis,1986,17(3):704-719.

[18] 刘发旺,庄平辉,刘青霞. 分数阶偏微分方程数值方法及其应用[M]. 北京:科学出版社,2015:16.

[19] WANG Z B,VONG S W. Compact difference schemes for the modified anomalous fractional sub-diffusion equation and the fractional diffusion-wave equation[J]. Journal of Computational Physics,2014,277:1-15.

[20] GAO G H,SUN H W,SUN Z Z. Some high-order difference schemes for the distributed-order differential equations[J]. Journal of Computational Physics,2015,298:337-359.

(责任编辑:汪 军)