

# 关于图的特征多项式一些恒等式的初等证明

陈海燕,冯志尧\*

(集美大学理学院,福建 厦门 361021)

**摘要:** [目的] 研究关于图的邻接特征多项式一些恒等式的证明. [方法] 利用行列式的定义和基本性质. [结果] 设  $G = (V, E, \omega)$  是一个边赋权有向图,  $\mathbf{A}(G) = (a_{ij})_{n \times n}$  是其邻接矩阵. 令  $\Phi = (\phi_{ij}(G, x))_{n \times n}$  表示  $x\mathbf{I}_n - \mathbf{A}(G)$  的伴随矩阵. 本文给出了  $\phi_{ij}(G, x)$  和  $G$  的一些子图的特征多项式之间等式的初等证明. [结论] 本文给出的证明比已知的证明初等、简洁,并可以应用到其他类似的图多项式等式的证明.

**关键词:** 行列式;伴随矩阵;特征多项式

中图分类号:O 157.5

文献标志码:A

文章编号:0438-0479(2025)06-1019-03

## An elementary proof for some identities related to characteristic polynomials of graphs

CHEN Haiyan, FENG Zhiyao\*

(School of Science, Jimei University, Xiamen 361021, China)

**Abstract:** [Objective] Herein we study methods of proving identities satisfied by the adjacency polynomials of graphs. [Methods] The definition and properties of the determinant are presented. [Results] Let  $G = (V, E, \omega)$  be an edge-weighted digraph, and  $\mathbf{A}(G) = (a_{ij})_{n \times n}$  be its adjacency matrix. Let  $\Phi = (\phi_{ij}(G, x))_{n \times n}$  denote the adjoint matrix of  $x\mathbf{I}_n - \mathbf{A}(G)$ . In this note, we give an elementary proof for identities between  $\phi_{ij}(G, x)$  and characteristic polynomials of some subgraphs of  $G$ . [Conclusions] The proof given in this note is elementary and simple. Moreover, the idea can be used to prove similar identities of other polynomials of graphs.

**Keywords:** determinant; adjoint matrix; characteristic polynomial

### 1 预备知识

设  $G = (V, E, \omega)$  是一个边赋权有向图, 其中:  $D = (V, E)$ , 是顶点集为  $V = \{1, 2, \dots, n\}$ , 边集为  $E$  (这里我们允许每个顶点上最多有一个自环) 的有向图;  $\omega: E \rightarrow \mathbb{R}^+$  是边集  $E$  上的一个权函数.  $\mathbf{A}(G) = (a_{ij})_{n \times n}$  表示  $G$  的邻接矩阵, 其中  $a_{ij} = \omega(e)$ , 如果  $e = (i, j) \in E$ ; 否则  $a_{ij} = 0$ . 对任意的子图  $H \subseteq D$ ,  $H$  的权重记为  $\omega(H)$ , 定义为  $H$  中所有边上权的乘积. 令

$$\phi(G, x) = \det(x\mathbf{I}_n - \mathbf{A}(G))$$

表示  $\mathbf{A}(G)$  的特征多项式,

$$\Phi = (\phi_{ij}(G, x))_{n \times n} \triangleq \text{adj}(x\mathbf{I}_n - \mathbf{A}(G))$$

表示  $x\mathbf{I}_n - \mathbf{A}(G)$  的伴随矩阵. 伴随矩阵  $\Phi$  不仅和图  $G$  的道路生成函数以及图  $G$  上的随机游走有着紧密的联系, 并且和正交多项式中著名的 Christoffel-Darboux 恒等式有着紧密的联系<sup>[1-2]</sup>. 特别地, 利用  $\phi_{ij}(G, x)$  的性质, Tutte<sup>[3]</sup> 得到关于图重构理论中的一个重要结论, 即一个无向图  $G$  是可重构的, 如果  $\phi(G, x)$  在有理数域上不可约. 关于伴随矩阵  $\Phi$  详细的结

收稿日期: 2025-02-19 录用日期: 2025-05-13

基金项目: 国家自然科学基金面上项目(12271210)

通信作者: 761768510@qq.com

引文格式: 陈海燕, 冯志尧. 关于图的特征多项式一些恒等式的初等证明[J]. 厦门大学学报(自然科学版), 2025, 64(6): 1019-1021.

Citation: CHEN H Y, FENG Z Y. An elementary proof for some identities related to characteristic polynomials of graphs[J]. J Xiamen Univ Nat Sci, 2025, 64(6): 1019-1021. (in Chinese)



果可参见文献[1]. 这里主要关注下面这些经典优美的恒等式.

**定理 1**<sup>[1]</sup> 设  $G = (V, E, \omega)$  是一个边赋权有向图, 则对任意的  $i, j \in V$ :

$$\phi_{ij}(G, x) = \sum_{P \in \mathcal{P}_{ij}} \omega(P) \phi(G \setminus P, x), \tag{1}$$

其中:  $\mathcal{P}_{ij}$  表示  $G$  中从顶点  $i$  到顶点  $j$  的所有有向路的集合,  $G \setminus P$  表示从  $G$  中去掉  $P$  上所有的顶点及其所关联的边所得到的子图.

注意到, 如果  $D$  是一个无向图且  $\omega \equiv 1$ , 则对  $G$  中的任意路  $P$  有  $\omega(P) = 1$ . 这时式(1)可简化为

$$\phi_{ij}(G, x) = \sum_{P \in \mathcal{P}_{ij}} \phi(G \setminus P, x). \tag{2}$$

**注 1:** 恒等式(2)首先出现在 Schwenk<sup>[4]</sup>的论文中. Schwenk 首先直接定义矩阵  $\mathbf{M} = (m_{ij})$ , 其中  $m_{ij} = \sum_{P \in \mathcal{P}_{ij}} \phi(G \setminus P, x)$ , 然后验证  $\mathbf{M}$  等于  $\text{adj}(x\mathbf{I} - \mathbf{A}(G))$ . 后来, Godsil<sup>[1]</sup>利用  $\phi_{ij}(G, x)$  和道路生成函数的关系给出了式(2)的一个归纳性证明. Godsil 也在文献[1]中首次给出了一般形式(1). 注意到 Schwenk 和 Godsil 所给出的关于式(2)的证明都很容易推广到式(1)的证明. 但本文将直接从行列式的定义出发, 给出式(1)一个简洁初等的证明.

## 2 定理 1 的初等证明

在给出定理 1 的证明之前, 首先约定一些符号. 对任意的一个有限集合  $B$ , 用  $S_B$  表示集合  $B$  上的对称群. 如果  $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ , 则  $S_{[n]}$  简记为  $S_n$ . 众所周知, 对任意的  $\sigma \in S_n$ ,  $\sigma$  可表示成不相交的循环的乘积:

$$\sigma = (i_1 i_2 \dots i_{t_1})(j_1 j_2 \dots j_{t_2}) \dots (l_1 l_2 \dots l_{t_k}) = C_1 C_2 \dots C_k,$$

且上面的表示除了循环  $C_i$ 's 之间的顺序以及每个循环内的起点之外, 是唯一的. 所以不失一般性, 下面总是假定  $C_1 = (1 \dots)$ . 用  $|C|$  表示循环  $C$  的长度, 根据  $|C|$  的奇偶性, 分别称  $C$  是奇循环或偶循环. 对任意  $\sigma \in S_n$ , 用  $\text{cyc}(\sigma)$  和  $\tau(\sigma)$  分别表示  $\sigma$  中循环和偶循环的个数.

给定一个  $n \times n$  矩阵  $\mathbf{M} = (m_{ij})$  和一个子集  $B \subseteq [n]$ , 令  $\mathbf{M}_B$  表示从  $\mathbf{M}$  删掉  $B$  中的行和列所得到的子矩阵, 令  $M_{ij}$  表示  $m_{ij}$  的代数余子式. 则由行列式的定

义可得

$$\det \mathbf{M} = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\tau(\sigma)} \prod_{j=1}^{\text{cyc}(\sigma)} \omega_{\mathbf{M}}(C_j) = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\tau(\sigma)} \omega_{\mathbf{M}}(\sigma), \tag{3}$$

这里对任意的循环  $C = (i_1 i_2 \dots i_t)$ , 有

$$\omega_{\mathbf{M}}(C) = \begin{cases} m_{i_1 i_1}, & \text{如果 } t = 1, \\ m_{i_1 i_2} m_{i_2 i_3} \dots m_{i_{t-1} i_t}, & \text{如果 } t > 1. \end{cases}$$

现在根据循环  $C_1$  把集合  $S_n$  划分成如下  $n$  类:

$$C_1 = (1), C_i = (1 i_2 i_3 \dots i_t), i_2 = 2, \dots, n.$$

对任意  $\sigma = C_1 C_2 \dots C_k$ , 令  $\sigma' = C_2 \dots C_k$ , 则显然有  $\sigma' \in S_{[n] \setminus C_1}$ , 且

$$(-1)^{\tau(\sigma')} = (-1)^{\tau(\sigma) + |C_1| + 1}.$$

这样一方面由式(3)可得

$$\begin{aligned} \det \mathbf{M} &= \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\tau(\sigma)} \prod_{j=1}^{\text{cyc}(\sigma)} \omega_{\mathbf{M}}(C_j) = \\ &= \sum_{\sigma \in S_n, C_1=(1)} (-1)^{\tau(\sigma)} \omega_{\mathbf{M}}(C_1) \prod_{j=2}^{\text{cyc}(\sigma)} \omega_{\mathbf{M}}(C_j) + \\ &= \sum_{i_2=2}^n \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ C_1=(1 i_2 i_3 \dots i_t)}} (-1)^{\tau(\sigma)} \omega_{\mathbf{M}}(C_1) \prod_{j=2}^{\text{cyc}(\sigma)} \omega_{\mathbf{M}}(C_j) = \\ &= m_{11} \sum_{\sigma' \in S_{[n] \setminus 1}} (-1)^{\tau(\sigma')} \omega_{\mathbf{M}_{C_1}}(\sigma') + \\ &= \sum_{i_2=2}^n \sum_{C_1=(1 i_2 i_3 \dots i_t)} m_{1 i_2} m_{i_2 i_3} \dots m_{i_{t-1} i_t} m_{i_t 1} \\ &= \sum_{\sigma' \in S_{[n] \setminus C_1}} (-1)^{\tau(\sigma') + t + 1} \omega_{\mathbf{M}_{C_1}}(\sigma') = m_{11} \det \mathbf{M}_{\{1\}} + \\ &= \sum_{i_2=2}^n m_{1 i_2} \sum_{C_1=(1 i_2 i_3 \dots i_t)} (-1)^{t+1} m_{i_2 i_3} \dots m_{i_{t-1} i_t} m_{i_t 1} \\ &= \det \mathbf{M}_{\{1 i_2 i_3 \dots i_t\}}. \end{aligned} \tag{4}$$

另一方面, 把  $\det \mathbf{M}$  按第一行展开可得

$$\det \mathbf{M} = m_{11} \mathbf{M}_{11} + \sum_{i_2=2}^n m_{1 i_2} \mathbf{M}_{1 i_2}. \tag{5}$$

注意到若把  $m_{1j}, j = 1, 2, \dots, n$  看成为未定元, 则  $\det \mathbf{M}$  是关于  $m_{1j}, j = 1, 2, \dots, n$  的多元一次函数, 所以由式(4)和(5)比较对应项系数马上可得

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{11} &= \det \mathbf{M}_{\{1\}}, \\ \mathbf{M}_{1 i_2} &= \sum_{C_1=(1 i_2 i_3 \dots i_t)} (-1)^{t+1} m_{i_2 i_3} \dots m_{i_{t-1} i_t} \\ &= m_{i_2 1} \det \mathbf{M}_{\{1 i_2 i_3 \dots i_t\}}. \end{aligned} \tag{6}$$

现在开始定理 1 的证明.

定理 1 的证明. 不失一般性, 假定  $j = 1$ .

令  $\mathbf{M} = x\mathbf{I}_n - \mathbf{A}(G) = (m_{ij})$ , 回顾一下, 在这种情

况下对任意的  $i \neq j$ , 如果  $e = (i, j) \in E$ , 则  $m_{ij} = -\omega(e)$ , 否则  $m_{ij} = 0$ .

则由伴随矩阵的定义和式(6), 当  $i = 1$  时, 可得

$$\phi_{11}(G, x) = \mathbf{M}_{11} = \det \mathbf{M}_{(1)} = \phi(G \setminus \{1\}, x),$$

当  $i \neq 1$  时, 可得

$$\begin{aligned} \phi_{i1}(G, x) &= \mathbf{M}_{i1} = \sum_{C_1=(1\bar{i}_3 \cdots i_t)} (-1)^{t+1} m_{\bar{i}_3} \cdots \\ & m_{i_{t-1}i_t} m_{i_t 1} \det \mathbf{M}_{\{1\bar{i}_3 \cdots i_t\}} = \sum_{\{(i, i_3), \dots, (i_{t-1}, i_t), (i_t, 1)\} \subseteq E} \\ & (-1)^{t+1} (-1)^{t-1} \omega(i, i_3) \cdots \omega(i_{t-1}, i_t) \\ & \omega(i_t, 1) \det \mathbf{M}_{\{1\bar{i}_3 \cdots i_t\}} = \\ & \sum_{P=\bar{i}_3 \cdots i_t, 1 \in \mathcal{P}_{i1}} \omega(P) \phi(G \setminus P, x). \end{aligned}$$

即对任意的  $i \in V$ , 式(1)成立. 证毕.

上面直接从行列式的定义出发, 给出了定理 1 的一个初等证明, 这个初等证明比 Schwenk 和 Godsil 的证明更简洁. 更重要的是, 本文的证明思路可以应用到各种各样图的多项式, 如拉普拉斯特

征多项式、归一化的拉普拉斯特征多项式等递推关系的证明.

### 参考文献:

[1] GODSIL C D. Algebraic combinatorics[M]. New York: Chapman and Hall, 1993.  
 [2] GODSIL C D. Walk generating functions, christoffel-Darboux identities and the adjacency matrix of a graph[J]. Combinatorics, Probability and Computing, 1992, 1(1):13-25.  
 [3] TUTTE W T. All the king's horses[C]// Graph Theory and Related Topics. New York: Academic Press, 1979: 15-33.  
 [4] SCHWENK A J. Removal cospectral sets of points in a graph[C]// Proc 10th S-E Conf Combinatorics, Graph Theory and Computing. Winnipeg: Utilitas Math, 1979: 849- 860.

(责任编辑:汪 军)