doi:10.6043/j.issn.0438-0479.202410023

$3\leqslant\Delta\leqslant 4$ 的图的 $D(2)$-点和可区别全染色

何 静,强会英*

(兰州交通大学数理学院,甘肃 兰州 730070)

摘要:[**目的**] 探究最大度满足 $3\leqslant\Delta\leqslant 4$ 的简单连通图 G 的 $D(2)$-点和可区别全染色特性,明确其 $D(2)$-点和可区别全色数,进而拓展该染色问题在平面图中的研究结论,为图论中相关染色理论的完善提供支撑.[**方法**] 采用组合零点定理与权转移方法相结合的研究手段.通过组合零点定理构建染色存在性的理论基础,借助权转移方法分析图中顶点与边的权值分配关系,验证染色方案的合理性与可行性.[**结果**] 成功确定了 $3\leqslant\Delta\leqslant 4$ 的简单连通图 G 的 $D(2)$-点和可区别全色数的值;进一步将该结论推广至平面图范畴,证明了满足 $3\leqslant\Delta\leqslant 4$ 的平面图同样具备相应的 $D(2)$-点和可区别全染色性质,且其点和可区别全色数与简单连通图保持一致.[**结论**] 组合零点定理与权转移方法可有效解决 $3\leqslant\Delta\leqslant 4$ 图类的 $D(2)$-点和可区别全染色问题,所得色数结论对简单连通图及平面图均适用,为后续研究图的最大度在其他范围内的此类色数问题提供了可借鉴的方法与理论依据.

关键词:$D(2)$-点和可区别全染色;组合零点定理;权转移方法

中图分类号:O 157.5 **文献标志码:**A **文章编号:**0438-0479(2025)06-1005-06

The $D(2)$-vertex sum distinguishing total coloring of graphs with $3\leqslant\Delta\leqslant 4$

HE Jing, QIANG Huiying*

(School of Mathematics, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou 730070, China)

Abstract: [**Objective**] This study explores characteristics of $D(2)$-vertex sum distinguishing total coloring for simple connected graphs G with maximum degree satisfying $3\leqslant\Delta\leqslant 4$, clarifies their vertex sum distinguishing total chromatic numbers, and further extends the research conclusions of this coloring problem to planar graphs, thereby providing the support for the improvement of relevant coloring theories in graph theory. [**Methods**] We conduct a combined research approach of the Combinatorial Nullstellensatz and the method of weight transfer. The Combinatorial Nullstellensatz is used to establish the theoretical basis for the existence of coloring, while the discharging method is employed to analyze the weight distribution relationship between vertices and edges in the graph, so that the rationality and the feasibility of the coloring scheme are verified. [**Results**] The specific value of the $D(2)$-vertex sum distinguishing total chromatic number for simple connected graphs G with $3\leqslant\Delta\leqslant 4$ is successfully determined. Furthermore, this conclusion is extended to the category of planar graphs, and it is proved that planar graphs satisfying $3\leqslant\Delta\leqslant 4$ also possess the corresponding $D(2)$-vertex sum distinguishing total coloring property, with their vertex sum distinguishing total chromatic numbers being consistent with those of simple connected graphs. [**Conclusions**] The Combinatorial Nullstellensatz and the discharging method can effectively solve the $D(2)$-vertex sum distinguishing total coloring problem for graph classes with $3\leqslant\Delta\leqslant 4$. These obtained chromatic-number conclusions are applicable to both simple connected graphs and planar graphs, thus providing referable methodological and theoretical bases for subsequent research on such chromatic number problems within other ranges.

Keywords: $D(2)$-vertex sum distinguishing total colorings; combinatorial nullstellensatz; discharging method

---

收稿日期:2024-10-30 **录用日期:**2025-02-09

基金项目:国家自然科学基金(61962035)

* **通信作者:**qhy2005ww@126.com

引文格式:何静,强会英. $3\leqslant\Delta\leqslant 4$ 的图的 $D(2)$-点和可区别全染色[J].厦门大学学报(自然科学版),2025,64(6):1005-1010.

Citation: HE J, QIANG H Y. The $D(2)$-vertex sum distinguishing total coloring of graphs with $3\leqslant\Delta\leqslant 4$[J]. J Xiamen Univ Nat Sci, 2025, 64(6): 1005-1010. (in Chinese)

图是建立各种数学模型的强有力的工具,图染色是数学中以图为研究对象的一个分支. Pilśniak 和 Wozniak[1] 最早研究了邻和可区别全染色,并提出猜想:对于 $n \geqslant 2$ 的图 G,都有 $\Delta(G)+1 \leqslant \chi''_{\Sigma}(G) \leqslant \Delta(G)+3$. 2019 年,杨笑蕊等[2] 研究了两类冠图的邻和可区别全色数. 2020 年,姚丽等[3] 研究了两类笛卡尔积图的邻和可区别全色数. 2021 年,强会英等[4] 研究了无 K_4-子式图的 2-距离和可区别边色数. 2024 年,刘欢等[5] 研究了树图的 2-距离和可区别染色. 基于上述文献,本文研究了 $3 \leqslant \Delta \leqslant 4$ 的简单连通图的 $D(2)$-点和可区别全染色.

本文所涉及的图 G 都是有限、无向的简单连通图. $V(G)$,$E(G)$,$\Delta(G)$,$\delta(G)$ 分别表示图 G 的点集、边集、最大度和最小度,$|V(G)|$ 表示图 G 中点的个数,$|E(G)|$ 表示图 G 中边的个数,$d(u,v)$ 表示点 u,v 的距离,用 $d_H(v)$ 表示 H 中点 v 的度数,$S(u)$ 表示点 u 及其关联边的颜色数之和,用 $\mathrm{ad}(G)$ 表示 G 的平均度,$\mathrm{mad}(G)$ 表示图 G 的所有非空子图的最大平均度,C_n^m 表示 n 取 m 的组合数. 其余未说明的符号和术语参见文献[5-15].

1 预备知识

定义 1[6] 令 φ 是图 G 的一个 k-正常全染色,对 $\forall u,v \in V(G)$,若 $d_G(u,v) \leqslant 2$,都有 $S(u) \neq S(v)$,其中 $S(u)=\varphi(u)+\sum_{u\omega \in E(G)} \varphi(u\omega)$. 则称 φ 为图 G 的 k-$D(2)$-点和可区别全染色,简记为 k-$D(2)$-VSD 全染色. 其中用到的最小颜色数 k 称为图 G 的 $D(2)$-点和可区别全色数,记为 $\chi''_{2-\Sigma}(G)$.

引理 1[7] 设 B_1,B_2 是数集,且 $|B_1|=m \geqslant 2$,$|B_2|=n \geqslant 2$,令 $B_3=\{x+y \mid x \in B_1, y \in B_2, x \neq y\}$. 则 $|B_3| \geqslant m+n-3$,并且,如果 $B_1 \neq B_2$,那么 $|B_3| \geqslant m+n-2$.

引理 2[8](组合零点定理) $Q=Q(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为属于任一数域 F 上的多项式,设 $\deg(Q)=\sum_{i=1}^{n} k_i$,其中 k_i 为非负整数,且 $C_Q(x_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n}) \neq 0$,若 $S_1,S_2,\cdots,S_n \subseteq F$ 且 $|S_i|>k_i$,$1 \leqslant i \leqslant n$,则存在 $s_1 \in S_1$,$s_2 \in S_2$,$\cdots$,$s_n \in S_n$,使得 $Q(s_1,s_2,\cdots,s_n) \neq 0$.

引理 3[9] 对简单图 G,若 G 存在 $d(\Delta,\Delta) \leqslant 2$,有 $\chi'_{2-\Sigma}(G) \geqslant \Delta(G)+2$,否则 $\chi'_{2-\Sigma}(G) \geqslant \Delta(G)+1$.

2 主要结论

定理 1 对简单连通图 G,若 $\Delta(G)=3$,且 $\mathrm{mad}(G)<\frac{9}{4}$,则 $\chi''_{2-\Sigma}(G) \leqslant 7$.

证明 采用反证法证明,设图 G 是定理 $|V(G)|+|E(G)|$ 的一个极小反例,即 $\Delta(G)=3$,且图 G 是使 $|V(G)|+|E(G)|$ 最小的不存在 7-$D(2)$-VSD 全染色的图. 所以图 G 的任意真子图 G' 都有一个 7-$D(2)$-VSD 全染色 ϕ'. 下面通过删去图 G 中的某些非割边及点得到图 G 的真子图 G',若图 G' 的 7-$D(2)$-VSD 全染色 ϕ' 可扩展为图 G 的 7-$D(2)$-VSD 全染色 ϕ,这与 G 是极小反例相矛盾. 令 $S(u)$、$S'(u)$ 分别表示在染色 ϕ、ϕ' 中点 u 及其关联的边的颜色数之和.

注:删去图 G 的所有 1-点,所得图记为 H,显然 H 为连通图. 因为 1-点达到 $D(2)$-VSD 全染色易染,所以在下面分析中,对任意点(或边)染色时,不考虑与其相邻(或 2 距离以内)的 1-点的颜色情况.(定理 2 同.)

断言 1 $\delta(H) \geqslant 2$.

假定 $\delta(H) \leqslant 1$. 若 $\delta(H)=0$,则图 G 为星图 $K_{1,3}$,易得 $\chi''_{2-\Sigma}(K_{1,3})=4 \leqslant 7$,与 G 为极小反例矛盾. 若 $\delta(H)=1$,不妨设 $d_H(v)=1$,即 $d_G(v)=2$ 或 3. 记边 uv 为 e. 令 $G'=G-e$,由于图 G 是极小反例,可得图 G' 存在 7-$D(2)$-VSD 全染色 ϕ'. 下面通过对点 v 及其关联边和边 e 重新染色,从而将 ϕ' 扩展为图 G 的 7-$D(2)$-VSD 全染色 ϕ. 因为 $C_7^4=35$ 共有 13 种不同的颜色数之和,而 v 点在 2-距离之内至多有 3 个三度点,此时边 e 有 4 种可用色,点 v 有 5 种可用色,与点 v 相邻的悬挂边及 1-点易染. 故可得图 G 的 7-$D(2)$-VSD 全染色 ϕ,推出矛盾,故 $\delta(H) \geqslant 2$.

对 $\forall v \in V(H)$,若 $d_H(v)=2$,则 $2 \leqslant d_G(v) \leqslant 3$,若 $d_H(v)=d_G(v)=2$,则称 v 为好 2-点,否则称 v 为坏 2-点.

断言 2 H 中不存在相邻的两个 2-点.

若图 H 中 $\exists uv \in E(H)$,有 $d_H(u)=d_G(v)=2$. 分以下 3 种情形进行讨论:

1)u,v 均为好 2-点,则图 G 包含与图 1 中 G_1 同构的子图,令 $G'=G-uv$,图 G' 存在一个 7-$D(2)$-VSD 全染色 ϕ',下将 G' 的染色 ϕ' 扩展为图 G 的 7-$D(2)$-VSD 全染色 ϕ. 重染 u,v,uv 的颜色,记 u,v,uv 分配的颜色分别为 x_1,x_2,x_3,由染色条件得多项式 Q_1:

$$\begin{aligned}Q_1(x_1,x_2,x_3)=&\prod_{1\leqslant i<j\leqslant 3}(x_i-x_j)(x_1-\phi'(uu_1))\\&(x_1-\phi'(u_1))(x_2-\phi'(vv_1))(x_2-\phi'(v_1))\\&(x_3-\phi'(uu_1))(x_3-\phi'(vv_1))(x_2+x_3+\\&\phi'(vv_1)-S'(v_1))(x_2+x_3+\phi'(vv_1)-\\&S'(v_{11}))(x_2+x_3+\phi'(vv_1)-S'(v_{12}))(x_2+\end{aligned}$$

$$x_3+\phi'(vv_1)-S'(u_1))(x_1+x_3+\phi'(uu_1)-S'(u_1))(x_1+x_3+\phi'(uu_1)-S'(u_{11}))(x_1+x_3+\phi'(uu_1)-S'(u_{12}))(x_1+x_3+\phi'(uu_1)-S'(v_1))(x_1+\phi'(uu_1)-x_2-\phi'(vv_1)).$$

去掉 Q_1 中的常数得如下多项式 $\widetilde{Q}_1$：

$$\widetilde{Q}_1(x_1,x_2,x_3)=x_1^2x_2^2x_3^2\prod_{1\leqslant i<j\leqslant 3}(x_i-x_j)(x_2+x_3)^4(x_1+x_4)^4(x_1-x_2).$$

显然 $\widetilde{Q}_1$ 中 $x_1^6x_2^6x_3^6$ 的系数与 Q_1 中 $x_1^6x_2^6x_3^6$ 的系数相同. 由 Matlab 计算得系数为 $-20\neq 0$，由引理 2 知图 G 存在 7-$D(2)$-VSD 全染色 ϕ.

2) u,v 中有一个好 2-点. 设 v 为好 2-点，则图 G 包含与图 1 中 G_2 同构的子图，令 $G'=G-uv$，图 G' 存在 7-$D(2)$-VSD 全染色 ϕ'，重染 u,v,uv,uu_2 的颜色，记 u,v,uv,uu_2 分配的颜色分别为 x_1,x_2,x_3,x_4，由染色条件得多项式 Q_2：

$$Q_2(x_1,x_2,x_3,x_4)=\prod_{1\leqslant i<j\leqslant 3}(x_i-x_j)(x_1-\phi'(uu_1))(x_1-\phi'(u_1))(x_2-\phi'(vv_1))(x_2-\phi'(v_1))(x_3-\phi'(uu_1))(x_3-\phi'(vv_1))(x_4-\phi'(uu_1))(x_1-x_4)(x_3-x_4)(x_1+x_3+x_4+\phi'(uu_1)-S'(u_1))(x_1+x_3+x_4+\phi'(uu_1)-S'(u_{11}))(x_1+x_3+x_4+\phi'(uu_1)-S'(u_{12}))(x_1+x_3+x_4+\phi'(uu_1)-S'(v_1))(x_2+x_3+\phi'(vv_1)-S'(v_1))(x_2+x_3+\phi'(vv_1)-S'(v_{11}))(x_2+x_3+\phi'(vv_1)-S'(v_{12}))(x_2+x_3+\phi'(vv_1)-S'(u_1))(x_1+x_4+\phi'(uu_1)-x_2-\phi'(vv_1)).$$

去掉 Q_2 中的常数得如下多项式 $\widetilde{Q}_2$：

$$\widetilde{Q}_2(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1^2x_2^2x_3^2x_4\prod_{1\leqslant i<j\leqslant 3}(x_i-x_j)(x_1-x_4)(x_3-x_4)(x_1+x_3+x_4)^4(x_2+x_3)^4(x_1-x_2+x_4).$$

显然 $\widetilde{Q}_2$ 中 $x_1^5x_2^5x_3^5x_4^6$ 的系数与 Q_2 中 $x_1^5x_2^5x_3^5x_4^6$ 的系数相同. 用 Matlab 计算得系数为 $22\neq 0$，由组合零点定理知图 G 存在 7-$D(2)$-VSD 全染色 ϕ.

3) u,v 均为坏 2-点，则图 G 包含与图 1 中 G_3 同构的子图. 令 $G'=G-uv$，ϕ' 为 G' 的 7-$D(2)$-VSD 全染色，重染 u,v,uv,uu_2,vv_2 的颜色. 记 u,v,uv,uu_2,vv_2 分配的颜色分别为 x_1,x_2,x_3,x_4,x_5，由染色条件得多项式 Q_3：

$$Q_3(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)=\prod_{i=1}^{2}(x_i-x_{i+3})(x_{i+3}-x_3)\prod_{1\leqslant p<q\leqslant 3}(x_p-x_q)(x_1-\phi'(uu_1))(x_1-\phi'(u_1))(x_2-\phi'(vv_1))(x_2-\phi'(v_1))(x_3-\phi'(uu_1))(x_3-\phi'(vv_1))(x_4-\phi'(uu_1))(x_5-\phi'(vv_1))(x_1+x_3+x_4+\phi'(uu_1)-S'(u_1))(x_1+x_3+x_4+\phi'(uu_1)-S'(u_{11}))(x_1+x_3+x_4+\phi'(uu_1)-S'(u_{12}))(x_1+x_3+x_4+\phi'(uu_1)-S'(v_1))(x_2+x_3+x_5+\phi'(vv_1)-S'(v_1))(x_2+x_3+x_5+\phi'(vv_1)-S'(v_{11}))(x_2+x_3+x_5+\phi'(vv_1)-S'(v_{12}))(x_2+x_3+x_5+\phi'(vv_1)-S'(u_1))(x_1+x_4+\phi'(uu_1)-x_2-x_5-\phi'(vv_1)).$$

去掉 Q_3 中的常数得如下多项式 $\widetilde{Q}_3$：

$$\widetilde{Q}_3(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)=x_1^2x_2^2x_3^2x_4x_5\prod_{1\leqslant p<q\leqslant 3}(x_p-x_q)(x_1-x_4)(x_4-x_3)(x_2-x_5)(x_5-x_3)(x_1+x_3+x_4)^4(x_2+x_3+x_5)^4(x_1+x_4-x_2-x_5).$$

显然 $\widetilde{Q}_3$ 中 $x_1^5x_2^5x_3^2x_4^6x_5^6$ 的系数与 Q_3 中 $x_1^5x_2^5x_3^2x_4^6x_5^6$ 的系数相同. 用 Matlab 计算得系数为 $-30\neq 0$，由引理 2 知图 G 存在 7-$D(2)$-VSD 全染色 ϕ.

结合 1)～3)可知，断言 2 成立，即 H 中任意两个 2-点不相邻.

由以上断言易得以下结论.

(i) $\Delta(H)=3$.

(ii) 对任意 2-点，与其 2-距离之内的 3-点至多有 6 个.

(iii) 对任意 3-点，与其 2-距离之内的 2-点至多有 6 个.

下面运用权转移方法.

首先定义初始的权值函数 $\omega(v)$，对 $\forall v\in V(H)$，令 $\omega(v)=d_H(v)-\frac{9}{4}$. 则图 H 中所有点的权和为

$$\sum_{v\in V(H)}\left(d_H(v)-\frac{9}{4}\right)=|V(H)|\times\left(\mathrm{ad}(H)-\frac{9}{4}\right)\leqslant|V(H)|\times\left(\mathrm{mad}(H)-\frac{9}{4}\right)<0.$$

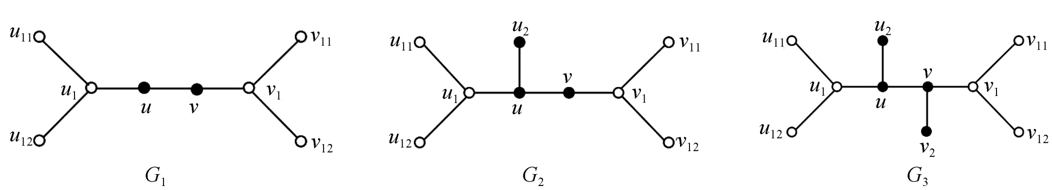

图 1　定理 1 中的 G_1、G_2 和 G_3

Fig. 1　G_1、G_2 and G_3 in Theorem 1

给定如下权转移规则：

(R1) H 中任一 3-点向其 2 距离内的 2-点转移权$\frac{1}{8}$.

设 $\omega'(v)$ 是进行权转移之后点 v 新的权函数，下面检查图 H 中点的新权. 对 $\forall v \in V(H)$：

若 $d_H(v)=2$，得 $\omega'(v)=\omega(v)+6\times\frac{1}{8}\geqslant 0$；

若 $d_H(v)=3$，得 $\omega'(v)\geqslant\omega(v)-6\times\frac{1}{8}=0$.

综合上述分析，对 $\forall v\in V(H)$，都有 $\omega'(v)\geqslant 0$，从而 $0\leqslant\sum_{v\in V(H)}\omega'(v)=\sum_{v\in V(H)}\omega(v)<0$，产生矛盾，说明图 H 不存在，因此图 G 也不存在，故 $\Delta(G)=3$ 时，定理 1 成立.

若 G 为平面图，由欧拉公式[16] 易得 $\mathrm{mad}(G)<\frac{2g(G)}{g(G)-2}$，进而可得下面推论.

推论 1 设 G 为平面图，若 $g(G)\geqslant 18$，且 $\Delta(G)=3$ 则 $\chi''_{2-\Sigma}(G)\leqslant 7$.

定理 2 G 是任一图，若 $\Delta(G)=4$，且 $\mathrm{mad}(G)<\frac{12}{5}$，则 $\chi''_{2-\Sigma}(G)\leqslant 8$.

证明 反证法，设图 G 是定理 $|V(G)|+|E(G)|$ 的一个极小反例，即 $\Delta(G)=4$，且图 G 是使 $|V(G)|+|E(G)|$ 最小的不存在 8-D(2)-VSD 全染色的图. 所以图 G 的任意真子图 G' 都有一个 8-D(2)-VSD 全染色 ϕ'. 下面通过删去图 G 中的某些非割边得到图 G 的真子图 G'，若图 G' 的 8-D(2)-VSD 全染色 ϕ' 扩展为图 G 的 8-D(2)-VSD 全染色 ϕ，这与 G 是极小反例相矛盾. 令 $S(u)$、$S'(u)$ 分别表示在染色 ϕ、ϕ' 中点 u 及其关联边的颜色数之和.

断言 1 $\delta(H)\geqslant 2$.

假定 $\delta(H)\leqslant 1$. 若 $\delta(H)=0$，则图 G 为星图 $K_{1,4}$，易得 $\chi''_{2-\Sigma}(K_{1,4})=5\leqslant 8$，与 G 的选取矛盾. 若 $\delta(H)=1$，不妨设 $d_H(v)=1$，则图 G 包含与图 2 中 G_1 同构的子图，这里 $1\leqslant l\leqslant 3$. 令 $G'=G-vv_1$，图 G' 存在 8-D(2)-VSD 全染色 ϕ'，在 ϕ' 的基础上及染色条件可知，vv_1 至少有 4 种颜色可用，点 v_1 易染. 故可得图 G 的 8-D(2)-VSD 全染色 ϕ，与 G 为反例矛盾，故 $\delta(H)\geqslant 2$.

对 $\forall v\in V(H)$，若 $d_H(v)=2$，则 $2\leqslant d_G(v)\leqslant 4$，若 $d_H(v)=d_G(v)=2$，则称 v 为好 2-点，否则称 v 为坏 2-点.

断言 2 对 $\forall v\in V(H)$，若 $d_H(v)=2$，则 $d_G(v)=2$.

反证法，若 $\forall v\in V(H)$ 满足 $d_H(v)=2$ 且 $3\leqslant d_G(v)\leqslant 4$，则图 G 包含与图 2 中 G_2 同构的子图，其中 $1\leqslant l\leqslant 2$.

当 $l=1$ 时，令 $G'=G-vv_1$，图 G' 存在一个 8-D(2)-VSD 全染色 ϕ'，对 vv_1 进行染色，vv_1 至多有 5 种色不可用，点 v_1 易染，结合引理 1，知图 G 存在 8-D(2)-VSD 全染色 ϕ.

当 $l=2$ 时，令 $G'=G-\{vv_1,vv_2\}$，则 G' 存在 8-D(2)-VSD 全染色 ϕ'，由染色条件可知，vv_i 至少有 5 种颜色可用，其中 $i=1,2$. 由引理 1，对于边 vv_1,vv_2 至少有 7 种颜色分配方案，又因为至多存在两种分配方案可使得 $S(v)=S(u_i)(i=1,2)$，因此，对于边 vv_1,vv_2 至少有 5 种可用颜色分配方案. 点 v_i 易染. 故可得图 G 的 8-D(2)-VSD 全染色 ϕ，与 G 为极小反例矛盾，故断言 2 成立.

断言 3 H 中任意两个 2-点不相邻.

若 H 中存在两个相邻的 2-点 u 和 v，由断言 2 知，u 和 v 均为好 2-点，与定理 1 断言 2 的 1) 证明类似，从而证得 H 中任意两个 2-点不相邻.

显然，$\forall v\in V(H)$，若 $d_H(v)=3$，则 $d_G(v)=3$ 或 4，若 $d_H(v)=d_G(v)=3$，称 v 为好 3-点，否则称为坏 3-点.

断言 4 H 中任一好 3-点至多与两个 2-点相邻.

若图 H 中存在好 3-点 v 与 3 个 2-点相邻. 则 G 包含与图 2 中 G_3 同构的子图. 令 $G'=G-vv_1$，图 G' 存在 8-D(2)-VSD 全染色 ϕ'，重染 $vv_1,vv_2,vv_3,v_1,v_2,v_3,v$ 的颜色，记 $vv_1,vv_2,vv_3,v_1,v_2,v_3,v$ 所分配的颜色分别为 $x_1,x_2,\cdots,x_7$，由染色条件得多项式 Q_1：

$$\begin{aligned}Q_1(x_1,x_2,\cdots,x_7)=&\prod_{i=1}^{3}(x_i-\phi'(u_iv_i))(x_{i+3}-\phi'(u_iv_i))(x_{i+3}-\phi'(u_i))(x_i-x_7)(x_i-x_{i+3})(x_{i+3}-x_7)(x_i+x_{i+3}+\phi'(u_iv_i)-\\&g'(u_i))\prod_{j=1}^{3}(x_i+x_{i+3}+\phi'(u_iv_i)-g'(u_{ij}))\prod_{1\leqslant i<j\leqslant 3}(x_i-x_j)(x_1+x_2+x_7-x_6-\phi'(u_3v_3))\\&(x_2+x_3+x_7-x_4-\phi'(u_1v_1))(x_1+x_3+x_7-x_5-\phi'(u_2v_2))(x_1+x_2+x_3+x_7-g'(u_1))\\&(x_1+x_2+x_3+x_7-g'(u_2))(x_1+x_2+x_3+x_7-g'(u_3))(x_1+x_4+\phi'(u_1v_1)-x_2-x_5-\\&\phi'(u_2v_2))(x_1+x_4+\phi'(u_1v_1)-x_3-x_6-\phi'(u_3v_3))(x_2+x_5+\phi'(u_2v_2)-x_3-x_6-\\&\phi'(u_3v_3)).\end{aligned}$$

去掉 Q_1 中的常数得如下多项式 $\widetilde{Q}_1$：

$$\widetilde{Q}_1(x_1,x_2,\cdots,x_7)=x_1x_2x_3x_4^2x_5^2x_6^2(x_1-x_7)$$

$(x_2-x_7)(x_3-x_7)(x_1-x_4)(x_2-x_5)(x_3-x_6)(x_4-x_7)(x_5-x_7)(x_6-x_7)(x_1+x_4)^4(x_2+x_5)^4(x_3+x_6)^4(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_2-x_3)(x_1+x_2+x_7-x_6)(x_2+x_3+x_7-x_4)(x_1+x_3+x_7-x_5)(x_1+x_2+x_3+x_7)^3(x_1+x_4-x_2-x_5)(x_1+x_4-x_3-x_6)(x_2+x_5-x_3-x_6)$.

显然 $\widetilde{Q}_1$ 中 $x_1^6x_2^6x_3^6x_4^6x_5^6x_6^6$ 的系数与 Q_1 中 $x_1^6x_2^6x_3^6x_4^6x_5^6x_6^6$ 的系数相同. 用 Matlab 计算得系数为 $-8\,820\neq 0$，由引理 2 知图 G 存在 8-$D(2)$-VSD 全染色 ϕ. 断言 4 成立.

断言 5　H 中任一坏 3-点至多与 1 个 2-点相邻.

假定 H 中存在坏 3-点 v 与至少两个 2-点相邻，则 G 包含与图 2 中 G_4 同构的子图，令 $G'=G-uv$，图 G' 存在 8-$D(2)$-VSD 全染色 ϕ'. 重染 v_1,v_2,vv_1,vv_2,v,uv 的颜色，记 v_1,v_2,vv_1,vv_2,v,uv 分配的颜色分别为 $x_1,x_2,\cdots,x_6$，由染色条件得多项式 Q_2：

$$Q_2(x_1,x_2,\cdots,x_6)=\prod_{i=1}^{2}(x_i-\phi'(u_iv_i))(x_i-\phi'(u_i))(x_{i+2}-\phi'(u_iv_i))(x_{i+2}-\phi'(v\omega))(x_i-x_{i+2})(x_i-x_5)(x_i+x_{i+2}+\phi'(u_iv_i)-g'(u_i))\prod_{j=1}^{3}(x_i+x_{i+2}+\phi'(u_iv_i)-g'(u_{ij}))(x_3+x_4+x_5+x_6+\phi'(v\omega)-g'(\omega_j))(x_6-\phi'(v\omega))(x_5-\phi'(\omega))(x_5-\phi'(v\omega))\prod_{3\leqslant i<j\leqslant 6}(x_i-x_j)(x_3+x_5+x_6+\phi'(v\omega)-x_2-\phi'(u_2v_2))(x_4+x_5+x_6+\phi'(v\omega)-x_1-\phi'(u_1v_1))(x_3+x_4+x_5+x_6+\phi'(v\omega)-g'(\omega))(x_3+x_4+x_5+x_6+\phi'(v\omega)-g'(u_1))(x_3+x_4+x_5+x_6+\phi'(v\omega)-g'(u_2))(x_1+x_3+\phi'(u_1v_1)-g'(\omega))(x_1+x_3+\phi'(u_1v_1)-x_2-x_4-\phi'(u_2v_2))(x_2+x_4+\phi'(u_2v_2)-g'(\omega)).$$

去掉 Q_2 中的常数得如下多项式 $\widetilde{Q}_2$：

$$\widetilde{Q}_2(x_1,x_2,\cdots,x_6)=x_1^2x_2^2x_3^2x_4^2x_5^2x_6(x_1-x_3)(x_2-x_4)(x_1-x_5)(x_2-x_5)(x_1+x_3)^5(x_2+x_4)^5(x_3-x_4)(x_3-x_5)(x_3-x_6)(x_4-x_5)(x_4-x_6)(x_5-x_6)(x_3+x_5+x_6-x_2)(x_4+x_5+x_6-x_1)(x_3+x_4+x_5+x_6)^6(x_1+x_3-x_2-x_4).$$

显然 $\widetilde{Q}_2$ 中 $x_1^6x_2^6x_3^7x_4^7x_5^7x_6^7$ 的系数与 Q_2 中 $x_1^6x_2^6x_3^7x_4^7x_5^7x_6^7$ 的系数相同. 用 Matlab 计算得系数为 $3\,500\neq 0$，由引理 2 知图 G 存在 8-$D(2)$-VSD 全染色 ϕ. 断言 5 成立.

由以上断言及 $\Delta(G)=4$ 易得以下结论.

(i) $\Delta(H)\geqslant 3$.

(ii) 对任意 2-点，与其 2-距离之内的 3^+-点至多有 8 个.

(iii) 对任意 3-点，与其 2-距离之内的 2-点至多有 6 个.

(iv) 对任意 4-点，与其 2-距离之内的 2-点至多有 8 个.

下面运用权转移方法.

对 $\forall v\in V(H)$，定义初始权 $\omega(v)=d_H(v)-\frac{12}{5}$，图 H 中所有点的权和为 $\sum_{v\in V(H)}\left(d_H(v)-\frac{12}{5}\right)=|V(H)|\times\left(\mathrm{ad}(H)-\frac{12}{5}\right)\leqslant|V(H)|\times\left(\mathrm{mad}(H)-\frac{12}{5}\right)<0$. 给定如下权转移规则：

(R2) H 中任一 3^+-点向其 2-距离之内的 2-点转移权 $\frac{1}{10}$.

对 $\forall v\in V(H)$，用 $\omega'(v)$ 表示点 v 的新权.

若 $d_H(v)=2$，

$$\omega'(v)=\omega(v)+8\times\frac{1}{10}=d_H(v)-\frac{12}{5}+\frac{8}{10}=2-\frac{12}{5}+\frac{8}{10}\geqslant 0.$$

若 $d_H(v)=3$，

$$\omega'(v)\geqslant\omega(v)-6\times\frac{1}{10}=3-\frac{12}{5}-\frac{6}{10}=0.$$

若 $d_H(v)=4$，

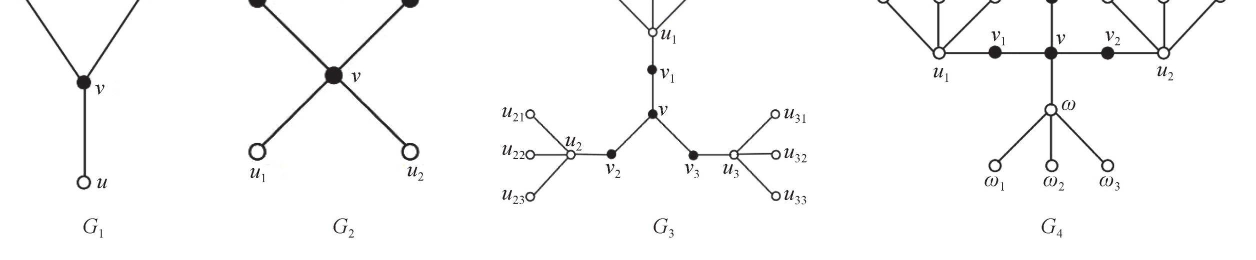

图 2　定理 2 中的 G_1、G_2、G_3 和 G_4

Fig. 2　G_1, G_2, G_3 and G_4 in Theorem 2

$$\omega'(v) \geqslant \omega(v) - 8 \times \frac{1}{10} = 4 - \frac{12}{5} - \frac{8}{10} = \frac{4}{5} > 0.$$

综合上述分析，$\sum_{v \in V(H)} \omega'(v) \geqslant 0$，与 $\sum_{v \in V(H)} \omega'(v) = \sum_{v \in V(H)} \omega(v) < 0$ 产生矛盾. 定理 2 结论成立.

若 G 为平面图，由欧拉公式易得 $\mathrm{mad}(G) < \frac{2g(G)}{g(G)-2}$，进而可得下面推论.

推论 2　设 G 为平面图，若 $g(G) \geqslant 12$，且 $\Delta(G) = 4$，则 $\chi''_{2-\Sigma}(G) \leqslant 8$.

参考文献：

[1] PILŚNIAK M，WOZNIAK M. On the adjacent-vertex-distinguishing index by sums in total proper colorings [EB/OL]. [2024-10-01]. http://www.ii.uj.edu.pl/preMD/index.php.

[2] 杨笑蕊，强会英，李雨虹. 两类冠图的邻和可区别全染色[J]. 兰州交通大学学报，2019，38(5)：114-117.

[3] 姚丽，强会英，杨笑蕊. 两类笛卡尔积图的邻和可区别全染色[J]. 兰州交通大学学报，2020，39(3)：125-129，166.

[4] 强会英，姚丽. 无 K_4-子式图的 2-距离和可区别边染色[J]. 山东大学学报(理学版)，2021，56(11)：83-86.

[5] 刘欢，强会英，王洪申，等. 树图的 2-距离和可区别染色[J]. 山东大学学报(理学版)，2024，59(2)：47-52，58.

[6] 姚丽. 几类图的 2-距离和可区别染色[D]. 兰州：兰州交通大学，2021.

[7] CHENG X H，HUANG D J，WANG G H，et al. Neighbor sum distinguishing total colorings of planar graph with maximum degree [J]. Discrete Applied Mathematica，2015，190：34-41.

[8] ALON N. Combinatorial nullstellensatz [J]. Combinatorics，Probability and Computing，1999，8(1/2)：7-29.

[9] 闫瑞敏，陈祥恩. $K_{5,5,p}$ 的点可区别的 IE-全染色($p \geqslant 2028$)[J]. 华东师范大学学报(自然科学版)，2022(2)：16-23.

[10] 卜月华，朱旭波，朱俊蕾. 最大度为 4 的平面图的 2-距离染色[J]. 数学进展，2024，53(2)：281-291.

[11] 刘冉，徐常青. 无三角形 NIC-可平面图的邻和可区别全可选性[J]. 数学进展，2023，52(3)：433-442.

[12] BAZGAN C，HARKAT-BENHAMDINE A，LI H，et al. On the vertex-distinguishing proper edge-colorings of graphs[J]. Journal of Combinatorial Theory，Series B，1999，75(2)：288-301.

[13] 陈祥恩，曹静. 圈与路的点被多重集可区别的 E- 全染色[J]. 华东师范大学学报(自然科学版)，2024(2)：14-22.

[14] FLANDRIN E，MARCZYK A，PRZYBYŁO J，et al. Neighbor sum distinguishing index [J]. Graphs and Combinatorics，2013，29(5)：1329-1336.

[15] PILŚNIAK M，WOŹNIAK M. On the total-neighbor-distinguishing index by sums[J]. Graphs and Combinatorics，2015，31(3)：771-782.

[16] YAO J J，SHAO Z L，XU C Q. Neighbor sum distinguishing total choosability of graphs with $\Delta = 3$[J]. Advancess in Mathematics (China)，2016，45(3)：343-348.

(责任编辑：汪　军)