

考虑混合不确定性的转子临界转速的灵敏度快速计算方法

林海东¹, 邓振鸿¹, 邓旺群^{2,3*}, 聂卫健^{2,3,4}, 刘文魁^{2,3}, 张保强^{1*}, 冯吴俊¹

(1. 厦门大学航空航天学院, 福建 厦门 361102; 2. 中国航发湖南动力机械研究所, 湖南 株洲 412002;

3. 中国航空发动机集团航空发动机振动技术重点实验室, 湖南 株洲 412002;

4. 北京航空航天大学能源与动力工程学院, 北京 102206)

摘要: [目的] 为了实现转子系统中存在不确定性时各变量对临界转速影响程度的快速求解, 提出一种考虑混合不确定性的全局灵敏度快速计算方法. [方法] 采用概率盒表征输入参数的混合不确定性; 再将混沌多项式展开 (polynomial chaos expansion, PCE) 与切比雪夫 (Chebyshev) 区间法相结合, 分别用于处理随机和认知不确定性; 最后通过不确定性传递求解 Sobol 灵敏度指标的上下界实现全局灵敏度分析. 建立某动力涡轮模拟转子的有限元模型, 以系统参数对其临界转速的灵敏度分析为例, 对所提出方法进行验证, 并与传统的双层蒙特卡洛采样法 (Monte Carlo sampling, MCS) 进行对比. [结果] 在计算精度相当的情况下, 与双层 MCS 相比, 本文所提方法计算时间减少了 98.63%, 显著提高了灵敏度分析的效率. [结论] 该方法可快速获得考虑混合不确定性情况下与转子临界转速有关参数的重要性排序.

关键词: 临界转速; 混合不确定性; 多项式混沌展开; 切比雪夫区间法; 全局灵敏度; Sobol 指标

中图分类号: V 23

文献标志码: A

文章编号: 0438-0479(2025)02-0277-09

Rapid sensitivity calculation method for rotor critical speeds considering hybrid uncertainties

LIN Haidong¹, DENG Zhenhong¹, DENG Wangqun^{2,3}, NIE Weijian^{2,3,4},
LIU Wenkui^{2,3}, ZHANG Baoqiang^{1*}, FENG Wujun¹

(1. School of Aerospace Engineering, Xiamen University, Xiamen 361102, China; 2. AECC Hunan Aviation Powerplant Research Institute, Zhuzhou 412002, China; 3. Key Laboratory of Aero-engine Vibration Technology, Aero Engine Corporation of China, Zhuzhou 412002, China; 4. School of Energy and Power Engineering, Beihang University, Beijing 102206, China)

Abstract: [Objective] To rapidly determine the impact of various variables on the critical speed of rotor systems with uncertainty, herein we propose a rapid global sensitivity calculation method in which hybrid uncertainties are considered. [Methods] In this method, probability boxes are used to represent the mixed uncertainty of input parameters. Then combine the Chebyshev interval method with the polynomial chaos expansion (PCE) to handle cognitive and random uncertainties, respectively. Finally, global sensitivity analysis is achieved by solving the upper and lower bounds of the Sobol sensitivity index through uncertainty transfer. A finite element model of a simulated power turbine rotor is established to verify the proposed method through sensitivity analyses of system parameters on its critical speeds. [Results] Our simulation results are compared with those obtained by the traditional double-loop Monte Carlo sampling (MCS) method. They indicate that, with comparable computational accuracy, the proposed method reduces computation time by 98.63% compared to the double-loop MCS, thus significantly enhancing the efficiency of sensitivity analyses. [Conclusions] The proposed method can quickly obtain the importance ranking of parameters related to the critical speed of

收稿日期: 2024-06-29 录用日期: 2024-11-28

基金项目: 中国航发产学研合作项目 (HFZL2020CXY004, HFZL2020CXY009)

* 通信作者: hnzzdwq@163.com; bqzhang@xmu.edu.cn

引文格式: 林海东, 邓振鸿, 邓旺群, 等. 考虑混合不确定性的转子临界转速的灵敏度快速计算方法[J]. 厦门大学学报(自然科学版), 2025, 64(2): 277-285.

Citation: LIN H D, DENG Z H, DENG W Q, et al. Rapid sensitivity calculation method for rotor critical speeds considering hybrid uncertainties[J]. J Xiamen Univ Nat Sci, 2025, 64(2): 277-285. (in Chinese)



rotor-considering mixed uncertainties.

Keywords: critical speed; hybrid uncertainty; polynomial chaos expansion; Chebyshev interval method; global sensitivity; Sobol indices

转子系统是航空发动机、燃气轮机等涡轮机械的核心部件,其设计是一项重要且复杂的工作^[1].在现代工业设计中,工程人员普遍采用建模和仿真技术进行转子系统的结构与评估,以确保其能够安全平稳地运行.转子的临界转速是结构设计过程必须考虑的重要因素,需要使临界转速远离工作转速,以防系统产生剧烈振动.然而仿真得到的转子动态特性易受到普遍存在的不确定性的影响而与真实动态特性存在误差,这甚至可能导致性能偏离初始设计或振动恶化^[2],这些不确定性包括制造误差、材料特性、外部激励,以及模型简化、测量和仿真误差等.

考虑到上述不确定性因素的存在,有必要定量分析输入变量的不确定性对临界转速的影响程度,为简化模型、减小决策失误率和提高产品质量提供理论依据^[3].全局灵敏度分析可以用于描述模型受每个输入变量或其组合的可变性的影响,常用的灵敏度分析包括:基于方差的全局灵敏度分析^[4]、基于相关性度量^[5]和基于线性化方法的局部灵敏度分析^[6-7]等. Cao 等^[8]在考虑模型随机不确定性的情况下,利用全局灵敏度分析对航空往复式发动机最大压力的相关参数进行重要性排序,并根据结果重新设计相关参数实现发动机性能提升. Ma 等^[9]基于蒙特卡洛法揭示了双转子在非平衡态下的振动规律和各参数的灵敏度. Salomon 等^[10]以涡扇发动机为例,用 Kucherenko 指标进行灵敏度分析,证实了劣化效应对飞机发动机关键性能参数的直接影响.由于计算灵敏度过程往往需重复调用模型,计算成本高,因此常常利用代理模型技术来提高计算效率.常用的代理模型方法包括多项式响应面法(response surface method, RSM)、Kriging 模型、支持向量机(support vector machine, SVM)、神经网络(neural network, NN)等.陈泽权^[11]借助 Kriging 模型,提出了适用于全局精度代理模型的序列与并行自适应采样策略,构建了全局精度代理模型.李朝阳^[12]提出全域响应面法,克服了传统标量型响应面法的位置依赖性,大幅度减少有限元分析次数.庞慧明^[13]将方向重要性抽样和双拓展支持向量回归相结合,并拓展为一种自适应算法,该方法减少了灵敏度分析所需样本数.金燕等^[14]采用遗传算法改善了神经网络法中随机变量多且差异大时灵敏度计算效率低下的问题.在不确定性分析领域,多项式混沌展开(PCE)是

最常用的代理模型技术之一,其核心为各类正交多项式,而每一类正交多项式正好对应一类典型的概率分布模型,使得 PCE 能非常高效地获得响应在特定分布参数下的随机统计矩^[15],从而快速求解灵敏度指标.

现有灵敏度研究主要考虑参数的随机性,随着工程需求提升以及实际问题复杂度的增加,存在因认知不足导致难以确定各输入变量的分布参数的情况,有必要进一步发展兼顾随机不确定性与认知不确定性的灵敏度分析方法.宋静文^[16]提出了一种基于扩展双层蒙特卡洛采样(Monte Carlo sampling, MCS)的灵敏度指标求解方法.汤鸿杰等^[17]提出一种概率盒框架下的全局灵敏度分析方法,基于双层非嵌入式 PCE 求解灵敏度指标,提升计算效率.现有研究在考虑混合不确定性的灵敏度分析中,针对认知不确定性通常使用 MCS 方法,然而 MCS 的主要缺点是收敛速度慢,这意味着它需要大量采样才能产生准确可靠的输出,导致计算效率低.此外,在转子临界转速的灵敏度分析方面相关工作较少.本文提出一种考虑混合不确定性的转子临界转速快速灵敏度计算方法.采用概率盒表征转子系统输入参数的混合不确定性,利用切比雪夫(Chebyshev)区间法(即利用切比雪夫多项式估计变量区间的方法)处理认知不确定性,用 PCE 处理随机不确定性,最后用 Sobol 灵敏度指标的上下界来判别变量对系统输出响应的影响程度. Chebyshev-PCE 法旨在结合两类多项式代理模型的优势,在不改变原系统求解方案的前提下有效处理包含两类不确定性的动力学问题.

1 考虑混合不确定性的转子模型

1.1 转子临界转速

对于一个转子系统,建立其运动微分方程为

$$M\ddot{U} + (C + \Omega G)\dot{U} + KU = F, \quad (1)$$

式中, M 、 C 、 G 和 K 分别表示转子系统全局质量矩阵、阻尼矩阵、陀螺矩阵和刚度矩阵, Ω 为转子自转角速度, F 为外部激励, \ddot{U} 、 \dot{U} 和 U 分别为加速度、速度和位移向量.考虑陀螺力矩的情况下,圆盘不仅有自转角速度,还有圆盘中心绕静平衡位置作频率为 ω 的简谐运动,称为涡动或进动.当 Ω 和 ω 方向相同时称为正进动,反之为反进动.式(1)的齐次式为

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + (\mathbf{C} + \Omega\mathbf{G})\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} = 0. \quad (2)$$

设其解为 $\mathbf{U} = \mathbf{U}_0 e^{i\omega t}$, 代入式(2)得其特征方程为

$$[-\mathbf{M}\omega^2 + (\mathbf{C} + \Omega\mathbf{G})\omega + \mathbf{K}]\mathbf{U}_0 = 0. \quad (3)$$

令系数行列式为0,有

$$|-\mathbf{M}\omega^2 + (\mathbf{C} + \Omega\mathbf{G})\omega + \mathbf{K}| = 0. \quad (4)$$

求解 ω , 就可以得出在自转角速度为 Ω 时, 转子系统的涡动角速度. 当 $\omega = \Omega$ 时, 称此时的进动为同步正进动, $\omega = -\Omega$ 时则称为同步反进动. 由于不平衡量的激励, 转子将作正进动, 因此通常所说的转子临界转速一般指同步正进动时的临界转速. 将 $\Omega = \omega$ 带入式(3), 特征值的算术平方根即为各阶临界角速度. 有限元软件中计算复杂转子临界转速最通用的方法是作坎贝尔图. 在感兴趣的转速区间内选取若干个自转角速度, 计算对应的涡动角速度, 将相同阶次、相同涡动方向的点连接起来, 找到连线上与直线 $\omega = \Omega$ 相交的点, 即为临界转速.

1.2 混合不确定性

如今最受认可的分类法将各种不确定性分为两类: 随机不确定性和认知不确定性. 随机不确定性用于描述物理系统和自然过程中固有的随机性或可变性, 认知不确定性源于对物理系统和人为因素的不完整了解, 通过收集更多信息和学习更多知识, 可以减少甚至消除它. 在实际工程应用中, 对于一个随机变量, 由于无法获得该变量足够多的测量值, 则难以确定该变量的参数. 例如已知转子的密度 $\rho \sim N(7\ 870, \sigma^2)$, 这表现了随机不确定性; 但方差 σ^2 的值不确定, 只知其在某区间内变化, 这表现了认知不确定性, 则可称 ρ 考虑了随机和认知的混合不确定性.

在混合不确定性条件下, 式(2)可改为

$$\mathbf{M}(\mathbf{ab}^1)\ddot{\mathbf{U}}(\mathbf{ab}^1) + (\mathbf{C}(\mathbf{ab}^1) + \omega\mathbf{G}(\mathbf{ab}^1))\dot{\mathbf{U}}(\mathbf{ab}^1) + \mathbf{K}(\mathbf{ab}^1)\mathbf{U}(\mathbf{ab}^1) = \mathbf{F}(\mathbf{ab}^1), \quad (5)$$

其中, \mathbf{ab}^1 表示同时考虑转子系统存在的随机不确定性和认知不确定性. 对于这样的不确定系统, 很难有统一的理论框架来求解. 常规的处理方法是分别量化随机和区间不确定性, 本研究提出的方法将首先处理认知不确定性, 其次解决随机不确定性, 通过不确定性传递计算概率盒框架下转子临界转速参数的 Sobol 灵敏度指标.

1.3 基于 Chebyshev-PCE 的混合不确定性快速传递方法

针对转子临界转速灵敏度计算问题, 若用传统 MCS 方法对混合不确定性系统进行抽样, 将需要大量样本数量, 产生巨大的计算成本, 因此考虑使用其他

高效的 uncertainty 分析方法. 在众多概率和非概率方法中, Chebyshev 区间法相比于其他区间法有更小的过估计; PCE 方法能够精确地描述任意分布形式的随机变量的随机性, 理论上, 当条件满足时, PCE 方法可以获得指数收敛的速度, 是一种非常有效的基于随机展开的不确定性分析方法. 因此本文提出一种 Chebyshev-PCE 方法, 以期在保证准确性的前提下大幅减少计算时间.

首先采用 Chebyshev 区间法处理混合不确定性问题中的认知不确定性. 对于任意标准区间变量 $x \in [-1, 1]$, n 维 Chebyshev 多项式定义为

$$C_n(x) = \cos(n \cdot \arccos(x)), x \in [-1, 1]. \quad (6)$$

根据 Weierstrass 定理, 任意一个定义在标准区间内的实函数 $f(x)$ 可以找到一个 n 阶最佳平方逼近函数 $g_n(x)$:

$$f(x) \approx g_n(x) = \frac{S_0}{2} + \sum_{i=1}^n S_i C_i(x), x \in [-1, 1], \quad (7)$$

$$S_i = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(x)C_i(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \approx$$

$$\frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^q S_k \tilde{f}(x_k) C_i(x_k), \quad (8)$$

式中: q 为插值节点数; S_k 为积分系数, 可取为 $S_k = \pi/q$; $\tilde{f}(x_k)$ 为原函数 $f(x)$ 在插值节点处的值; $C_i(x_k)$ 为 $C_i(x)$ 在插值节点处的值. 插值节点 x_k 可以取为

$$x_k = \cos\left(\frac{2k-1}{2q}\pi\right), k = 1, 2, \dots, q. \quad (9)$$

至此, 可将式(7)改写为

$$g_n(x) = \frac{1}{q} \sum_{k=1}^q \tilde{f}(x_k) + \frac{2}{q} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^q \tilde{f}(x_k) C_i(x_k) C_i(x). \quad (10)$$

由于 Chebyshev 多项式要求在标准区间内进行, 因此需要将任意区间范围 $[\underline{b}, \bar{b}]$ 的输入参数 b 线性变换到标准区间 $[-1, 1]$ 内:

$$x = \frac{2b - (\underline{b} + \bar{b})}{\bar{b} - \underline{b}}, x \in [-1, 1], b \in [\underline{b}, \bar{b}]. \quad (11)$$

式(11)是一维区间参数的表达方式, 若区间参数有多维且各自独立, 则每一个参数都按此法逐一进行变换. 为方便说明, 考虑一维区间参数的转子系统动力学不确定性问题可表示为

$$g_n(x) = \frac{1}{q} \sum_{k=1}^q \tilde{Y}(b_k) +$$

$$\frac{2}{q} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^q \tilde{Y}(x_k) C_i(x_k) C_i(x), \quad (12)$$

式中 $\tilde{Y}(b_k)$ 为转子系统在原区间插值节点 b_k 处的实际输出值, 是一个确定性的值, 在本研究中代表 Sobol 指标. 进一步, 容易求出 g_n 在区间 $[-1, 1]$ 的最值. 最后根据式(11)进行逆变换即可得到取得转子 Sobol 指标边界时的实际区间参数向量. 将得到的确定性区间参数向量传递至内层随机不确定性中进行后续计算.

接着考虑随机不确定性, 区间参数都使用上一步计算得到的确定值. 转子系统的位移写为

$$U = \sum_{i=0}^p \alpha_i \psi_i(\xi), \quad (13)$$

其中: α_i 为 PCE 系数, 是重点关注的部分; $\psi_i(\xi)$ 表示 Hermite 正交多项式. PCE 的项数 p 为

$$p = \frac{(n_1 + \lambda)!}{n_1! \lambda!} - 1, \quad (14)$$

其中: n_1 为随机参数的维数, λ 为截断后 PCE 的阶数. 理论上求 $p+1$ 个系数需要有 $p+1$ 个真实样本点, 但实际操作中取样本点多于 $p+1$ 的情况对结果收敛效果更好^[18], 本研究取样本点数 $Q \in [1.5p, 2p]$. 式(13)可化为矩阵形式

$$\begin{bmatrix} \psi_0(\xi_1) & \psi_1(\xi_1) & \cdots & \psi_p(\xi_1) \\ \psi_0(\xi_2) & \psi_1(\xi_2) & \cdots & \psi_p(\xi_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_0(\xi_Q) & \psi_1(\xi_Q) & \cdots & \psi_p(\xi_Q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U(\xi_1) \\ U(\xi_2) \\ \vdots \\ U(\xi_Q) \end{bmatrix}. \quad (15)$$

其中, $\xi_j (j = 1, 2, \dots, Q)$ 为随机参数样本点, $U(\xi_j)$ 为转子系统在样本点处的实际位移输出, 是一个确定的数值或向量. 求出系数后即可成功构建多项式混沌代

理模型, 后续计算只需在代理模型上进行即可, 较好解决了原模型计算量庞大的问题.

计算 PCE 系数的方法主要有回归法和投影法, 回归法相比于投影法的最主要的优势在于可以使用任意数量的点来计算系数. 由于样本数目多于 PCE 系数个数, 因此选用普通最小二乘回归 (ordinary least squares, OLS) 即可求得 PCE 系数. 熊芬芬等^[19]的研究表明, 在低维问题中基于 OLS 求解 PCE 系数的计算精度可以与 MCS 非常接近. 对于高维问题, OLS 将不可避免地遇到维数灾难与多重共线性问题. 因此, 赵威等^[20]提出一种稀疏偏最小二乘回归-PCE 代理模型方法, 用于解决高维全局灵敏度分析问题. 在转子设计问题中自变量个数一般比较少, 可以简化为低维问题, 因此本文暂时不纳入与高维方法的对比.

上述产生样本点的方法假定了所有样本点同等重要, 但该假设是不合理的, 那些处于低频区的样本点对回归的影响会被放大, 从而带来误差. 因此可在式(15)中加上样本权值矩阵 $\mathbf{W} = \text{diag}(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_Q)$, 如此考虑了各样本点的重要性, 以确保数据的代表性, 可以一定程度上避免过拟合或欠拟合问题, 从而提高 PCE 系数的估算精度.

2 基于概率盒框架的 Sobol 灵敏度指标

2.1 概率盒理论

概率盒是非精确概率描述方法的一种, 对于任意随机变量 X , 其累积分布函数 (cumulative distribution function, CDF) $F(x)$ 的下限和上限为

$$\begin{aligned} \underline{F}(x) &= \underline{P}(X \leq x), x \in R, \\ \overline{F}(x) &= \overline{P}(X > x), x \in R. \end{aligned} \quad (16)$$

精确与非精确概率的差异如图 1 所示. 概率盒 [图 1(b)] 由若干条 CDF 曲线组成, 每条 CDF 的光滑

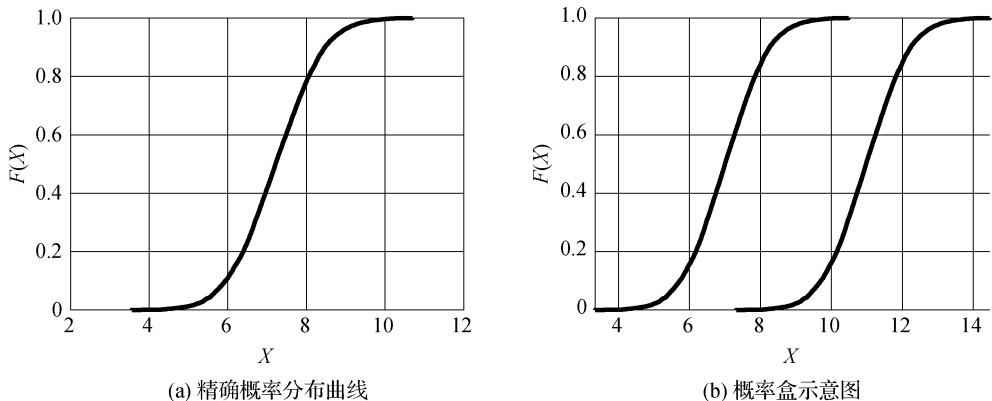


图 1 精确与非精确概率的差异

Fig. 1 The difference between exact and imprecise probabilities

程度与随机不确定性的样本数量正相关,概率盒宽度由认知不确定性决定.当信息充足时,变量的参数都已确定,此时精确概率分布曲线如图 1(a)所示;若变量的参数只知变化范围时,所有的 CDF 曲线包含在如图 1(b)两条曲线包围的区域内,该区域就是描述变量 X 不确定性的概率盒.随着收集到更多的信息,概率盒会向着精确分布靠近.

2.2 概率盒框架下的 Sobol 指标

全局灵敏度分析旨在根据每个单个输入参数或其组合的贡献来分解模型输出的方差^[21].判别参数贡献程度的指标多种多样,有 Borgonovo 指标、Sobol 指标、协方差分析指标和 Kucherenko 指标等,其中 Sobol 指标可以将输出方差分解成输入变量的各部分及其交互作用的贡献,有助于全面理解参数间的复杂关系.由此可得灵敏度的定义为

$$S_{i,\dots} = \frac{V_{i,\dots}}{V}, \quad (17)$$

其中, V 为总方差, $V_{i,\dots}$ 为偏方差.无论是一阶效应项(如 S_i)还是高阶交互效应项(如 $S_{i,j}$)公式皆一致,均表示对应变量或变量组的贡献占总方差的比例.在后续阐述中,将 S_i 称为主指标, S_i^T 称为总指标,其定义为 $S_i^T = 1 - S_{\sim i}$, 其中 $S_{\sim i}$ 是除变量 X_i 之外的所有变量的灵敏度之和.

传统 Sobol 法输入变量为精确分布函数,因此灵敏度指标结果为常值,而用概率盒描述输入变量不确定性时,灵敏度指标结果将在区间内变化.考虑一存在混合不确定性的输入变量 X_i , 其分布参数 θ_i 存在认知不确定性,并用区间描述,即 $\theta_i \in [\theta_i^L, \theta_i^U]$, 分布参数在区间内每指定一个值,就可得对应的灵敏度指标,因此 Sobol 指标是分布参数的函数,定义为:

$$\begin{cases} S_i^L = \min_{k=1,2,\dots,K} S_{ik}(\theta_{ik}), \\ S_i^U = \max_{k=1,2,\dots,K} S_{ik}(\theta_{ik}), \end{cases} \quad (18)$$

$$\begin{cases} S_i^{TL} = \min_{k=1,2,\dots,K} S_{ik}^T(\theta_{ik}), \\ S_i^{TU} = \max_{k=1,2,\dots,K} S_{ik}^T(\theta_{ik}). \end{cases} \quad (19)$$

其中, K 为分布参数 θ_i 在区间 $[\theta_i^L, \theta_i^U]$ 内的取值个数.输入变量 X_i 为概率盒时,主指标下界 S_i^L 表示 X_i 的分布参数 θ_i 取值对结果影响最小的情况,若其大于一个较大的规定值 ϵ_1 , 则区间 $[S_i^L, S_i^U]$ 内所有值均大于 ϵ_1 , 那么减小该参数的不确定性可以显著影响到输出结果;总指标上界 S_i^{TU} 表示 X_i 的分布参数 θ_i 取值对结果影响最大的情况,若其小于一个较小的规定值 ϵ_2 则区间 $[S_i^{TL}, S_i^{TU}]$ 内所有值均小于 ϵ_2 , 则无论怎样减小

该参数的不确定性对输出结果的影响都可忽略不计.综上,对于概率盒框架下的灵敏度问题可用主指标下界 S_i^L 作为确定重要变量的指标,用总指标上界 S_i^{TU} 作为确定可忽略不确定性的变量的指标.

2.3 基于 Chebyshev-PCE 的概率盒框架的参数灵敏度求解

根据 1.3 节中介绍的混合不确定性快速传递方法,基于 Chebyshev-PCE 的概率盒灵敏度求解方法总体思路为:用 Chebyshev 区间法确定取得灵敏度区间边界时的参数 θ_i 的取值,将其传递至内层,再由构建的 PCE 代理模型求得已知参数 θ_i 对应的灵敏度区间边界.具体步骤如下:

步骤 1:从转子系统的材料特性和几何特性中选择具有混合不确定性的变量,确认其服从的分布类型和分布参数的区间范围.

步骤 2:按顺序从 r 个参数中选择第 i 个参数 ($i = 1, 2, \dots, r$), 根据该参数的区间边界和设置的插值点数计算 Chebyshev 插值点 b_k .

步骤 3:此时将其他参数取区间中值,计算系统在插值点处的各变量的主指标 S_i 和总指标 S_i^T . 该步骤可以用步骤 5~7 的 PCE 方法简化计算.

步骤 4:构建切比雪夫逼近方程,寻找最值位置 b_{\max} 和 b_{\min} , 得到取得灵敏度区间边界时参数的实际值,将该组值传递至内层.

步骤 5:根据每一个随机不确定性变量的分布选择合适的正交多项式基底,选择合适的阶数和配置节点.

步骤 6:将配置点带入系统原模型中得到确定性的输出值并用于求解 PCE 系数.

步骤 7:通过 PCE 代理模型计算各变量的 S_i^L 、 S_i^U 、 S_i^{TL} 和 S_i^{TU} . 依照 S_i^L 和 S_i^U 对各变量进行排序分析,筛选主要变量和可忽略不确定性的变量.

从图 2 可以看出,基于 Chebyshev-PCE 的方法计算概率盒框架下 Sobol 灵敏度指标时,共调用原模型计算 $M \times r \times (q+2)$ 次, M 为 PCE 配置点数.相比于双层 MCS 调用次数 $Q \times (N(r+2))$ (其中 N 是内层抽样数)和双层 MCS-非嵌入式 PCE(MCS-NIPC)法调用次数 $M \times Q$ (其中 Q 为认知不确定性的抽样数)^[17], 因 $r \times (q+2) \ll Q$, 所以本方法提升了概率盒框架下 Sobol 指标的求解效率.而其他元模型方法(如 Kriging 模型)通常只应用于某一类型的不确定性.在考虑随机和认知均存在的混合不确定问题中,本文所采用的方法在抽样效率上显著优于多种目前广泛采用的单层代理模型.

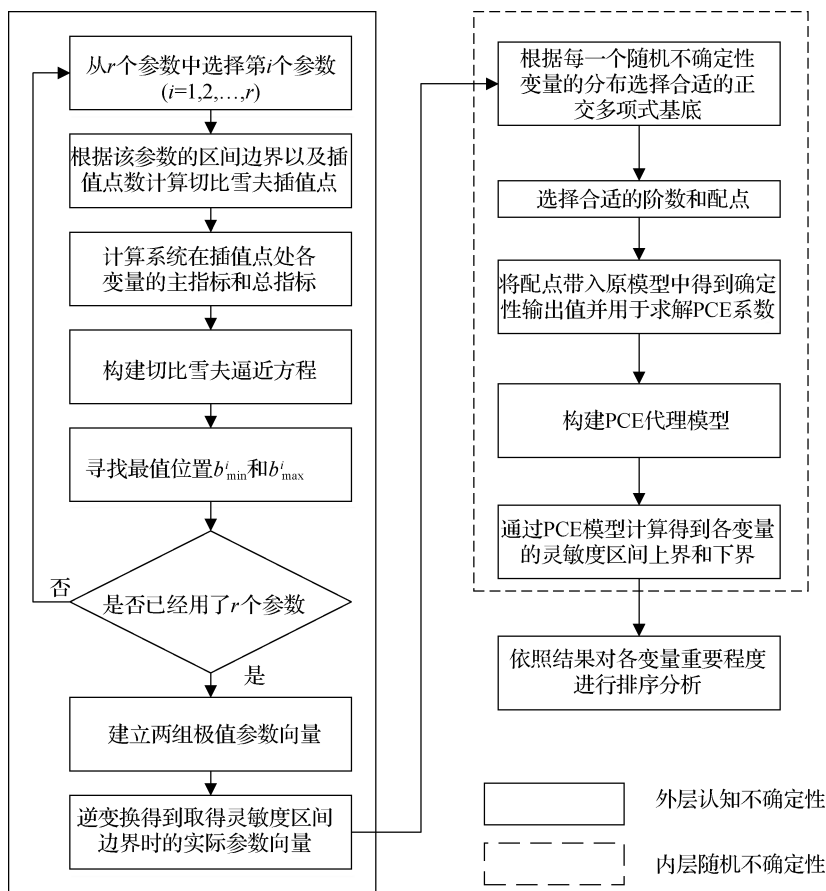


图2 基于 Chebyshev-PCE 概率盒框架下的 Sobol 指标求解流程

Fig. 2 Sobol indices solving process based on Chebyshev-PCE under probability box framework

3 基于 Chebyshev-PCE 的灵敏度分析算例

为了验证所提出方法是否可以高效且准确地计算概率盒框架下的 Sobol 灵敏度指标,本节先用一个简单的数值算例验证 Chebyshev-PCE 法的准确性,然后将本方法应用于转子临界转速的灵敏度分析中。

3.1 数值算例

考虑一个 3 变量模型 $Y = X_1^2 + X_2 + 0.1X_1X_3$ ^[21], 具体不确定性特征如表 1 所示。

表 1 数值算例的不确定性表征

Tab. 1 Uncertainty representation of numerical example

自变量	参数分布类型	分布参数的认知不确定性
X_1	正态分布	$\mu_1 = 0, \sigma_1^2 \in [0.04, 1]$
X_2	正态分布	$\mu_2 = 0, \sigma_2^2 \in [0.04, 1]$
X_3	正态分布	$\mu_3 = 0, \sigma_3^2 \in [0.04, 1]$

通过解析法求得三个变量的一阶方差和总方差为:

$$\begin{aligned}
 V(Y) &= 2\sigma_1^4 + \sigma_2^2 + 0.01\sigma_1^2\sigma_3^2, \\
 V_1 &= 2\sigma_1^4, V_2 = \sigma_2^2, V_3 = 0, \\
 V_1^T &= 2\sigma_1^4 + 0.01\sigma_1^2\sigma_3^2, V_2^T = \sigma_2^2, \\
 V_3^T &= 0.01\sigma_1^2\sigma_3^2.
 \end{aligned}
 \tag{20}$$

由上式容易求得灵敏度指标上下界,作为对照解。

根据图 2 所示流程,PCE 截断阶数取 6,配置点数为 100,抽样方法为拉丁超立方抽样;Chebyshev 插值点数为 10,多项式阶数为 5。将 Chebyshev-PCE 法与解析法的求解结果进行对照,如表 2 所示。

从表 2 可知两种方法计算结果基本相同,按 $S_{\theta_k}^L$ 对变量重要程度进行排序,结果均为 $X_2 > X_1 > X_3$,由此可得基于 Chebyshev-PCE 的概率盒框架下灵敏度求解方法可以准确判断变量的重要性大小。

3.2 动力涡轮转子临界转速灵敏度分析算例

以某动力涡轮模拟悬臂柔性转子^[22]为例对所提出方法进行验证,转子有限元模型如图 3 所示。盘和轴分别采用四面体网格和六面体网格,单元尺寸为 5 mm,

表 2 不同求解方法下数值算例各变量的灵敏度指标对比

Tab. 2 Sensitivity indicators comparison of variables in numerical example solved by different methods

自变量	求解方法	S^L	S^U	S^{TL}	S^{TU}
X_1	解析法	0.003 2	0.980 2	0.003 3	0.980 5
	Chebyshev-PCE 法	0.003 2	0.980 2	0.003 2	0.980 5
X_2	解析法	0.019 5	0.996 7	0.019 6	0.996 8
	Chebyshev-PCE 法	0.019 5	0.996 8	0.019 5	0.996 8
X_3	解析法	0	0	0.000 1	0.017 4
	Chebyshev-PCE 法	0	0	0	0.010 3

节点数量为 147 954,单元数为 69 708,已经过网格收敛性验证.使用 Intel i7-9700@3.00 GHz 台式机进行计算,单次计算平均时间为 48 s.选择轴弹性模量 E ,密度 ρ ,泊松比 ν ,4 个支点处轴承刚度 k_1, k_2, k_5, k_6 ,两级盘的质量 m ,极转动惯量 J_p 和直径转动惯量 J_d ,共

10 个物理量作为输入随机变量.假设各随机变量服从正态分布且相互独立,利用有限元法求出上述 10 个物理量的值作为平均值,变异系数取 5%~15% 求出方差的区间,动力涡轮转子系统各变量具体信息如表 3 所示.

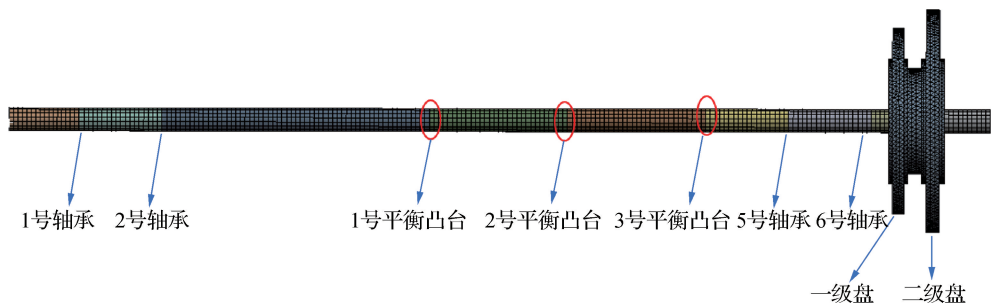


图 3 动力涡轮转子有限元模型

Fig. 3 Finite element model of power turbine rotor

表 3 动力涡轮转子变量的分布及其参数信息

Tab. 3 Variables distribution and its parameter information of power turbine rotor

变量	参数分布类型	分布参数的认知不确定性	
		μ	σ^2
弹性模量 E/Pa	正态分布	2.09×10^{11}	$[1.09 \times 10^{20}, 9.83 \times 10^{20}]$
密度 $\rho/(\text{kg} \cdot \text{m}^{-3})$	正态分布	7 870	$[1.55 \times 10^5, 1.39 \times 10^6]$
泊松比 ν	正态分布	0.295	$[2.18 \times 10^{-4}, 1.96 \times 10^{-3}]$
1 号支点轴承刚度 $k_1/(\text{N} \cdot \text{m}^{-1})$	正态分布	5×10^7	$[6.25 \times 10^{12}, 5.63 \times 10^{13}]$
2 号支点轴承刚度 $k_2/(\text{N} \cdot \text{m}^{-1})$	正态分布	6.3×10^5	$[9.92 \times 10^8, 8.93 \times 10^9]$
5 号支点轴承刚度 $k_5/(\text{N} \cdot \text{m}^{-1})$	正态分布	5×10^7	$[6.25 \times 10^{12}, 5.63 \times 10^{13}]$
6 号支点轴承刚度 $k_6/(\text{N} \cdot \text{m}^{-1})$	正态分布	4.6×10^5	$[5.29 \times 10^8, 4.76 \times 10^9]$
盘的质量 $m/(\text{kg})$	正态分布	9.354	$[0.22, 1.97]$
盘极转动惯量 $J_p/(\text{kg} \cdot \text{m}^2)$	正态分布	0.055 48	$[7.70 \times 10^{-6}, 6.93 \times 10^{-5}]$
盘直径转动惯量 $J_d/(\text{kg} \cdot \text{m}^2)$	正态分布	0.030 9	$[2.39 \times 10^{-6}, 2.15 \times 10^{-5}]$

根据图 2 所示步骤,PCE 截断阶数取 8,配置点数为 200,抽样方法为拉丁超立方抽样,根据变量分布类型均取 Hermite 多项式为基函数;Chebyshev 插值点

数为 8,多项式阶数为 5.为验证结果准确性,采用双层蒙特卡洛抽样计算灵敏度作为对照,如表 4 所示,误差均在 6%合理范围内,不影响排序结果,证明该方法

有很好的准确性. Chebyshev-PCE 法调用原模型次数为 16 400 次, (MCS-MCS) 法调用原模型次数为 1.2×10^6 次, 计算时间减少 98.63%, 计算效率明显提升. 依

据主指标下界 S_i^L , 十个变量按照重要性程度从大到小排列为: $E > \rho > J_p > J_d > m > k_6 > k_1 = k_2 = k_5 = \nu$. 主指标和总指标排序分别如图 4 和图 5 所示.

表 4 动力涡轮转子的 Sobol 指标计算结果
Tab. 4 Sobol indices calculation results of power turbine rotor

变量	计算方法	S^L	误差/%	S^U	S^{TU}	S^{TU}	误差/%
E/Pa	MCS-MCS	0.094 3		0.852 7	0.096 6	0.882 8	
	Chebyshev-PCE	0.099 9	5.9	0.906 0	0.100 3	0.906 6	2.7
$\rho/(\text{kg} \cdot \text{m}^{-3})$	MCS-MCS	0.064 2		0.797 6	0.658 0	0.872 1	
	Chebyshev-PCE	0.061 0	5.0	0.839 6	0.063 7	0.843 0	3.3
ν	MCS-MCS	0		0	$3.792 7 \times 10^{-5}$	$9.168 9 \times 10^{-5}$	
	Chebyshev-PCE	0	0	0	$3.783 2 \times 10^{-5}$	$8.942 2 \times 10^{-5}$	2.5
$k_1/(\text{N} \cdot \text{m}^{-1})$	MCS-MCS	0		0	2.8146×10^{-4}	8.6886×10^{-4}	
	Chebyshev-PCE	0	0	0	$2.802 0 \times 10^{-4}$	$8.297 3 \times 10^{-4}$	4.5
$k_2/(\text{N} \cdot \text{m}^{-1})$	MCS-MCS	0		$6.080 4 \times 10^{-4}$	$5.450 3 \times 10^{-4}$	$5.634 5 \times 10^{-4}$	
	Chebyshev-PCE	0	0	$6.079 8 \times 10^{-4}$	$5.435 7 \times 10^{-4}$	$5.482 2 \times 10^{-4}$	2.7
$k_5/(\text{N} \cdot \text{m}^{-1})$	MCS-MCS	0		0	0.001 3	0.002 6	
	Chebyshev-PCE	0	0	0	0.001 3	0.002 5	3.8
$k_6/(\text{N} \cdot \text{m}^{-1})$	MCS-MCS	$2.608 3 \times 10^{-5}$		0.001 9	$5.907 3 \times 10^{-4}$	0.001 2	
	Chebyshev-PCE	$2.505 1 \times 10^{-5}$	4.0	0.001 9	$5.890 8 \times 10^{-4}$	0.001 2	0
m/kg	MCS-MCS	0.002 8		0.205 5	0.005 3	0.212 7	
	Chebyshev-PCE	0.002 7	3.6	0.198 4	0.005 1	0.204 0	4.1
$J_p/(\text{kg} \cdot \text{m}^2)$	MCS-MCS	0.005 3		0.301 9	0.007 2	0.311 8	
	Chebyshev-PCE	0.005 2	1.9	0.300 1	0.006 9	0.299 6	3.9
$J_d/(\text{kg} \cdot \text{m}^2)$	MCS-MCS	0.004 1		0.278 0	0.005 1	0.275 2	
	Chebyshev-PCE	0.003 9	4.9	0.265 0	0.004 9	0.265 0	3.7

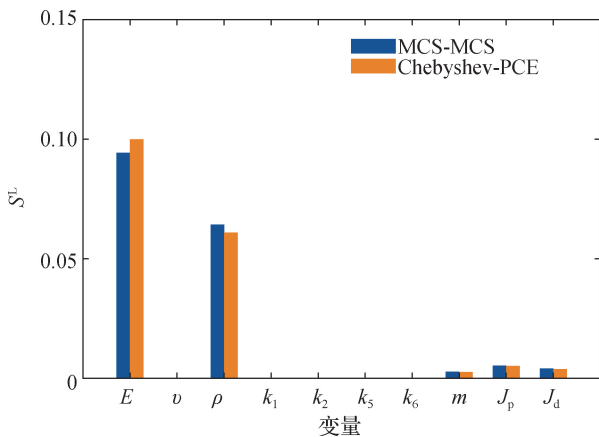


图 4 S^L
Fig. 4 S^L

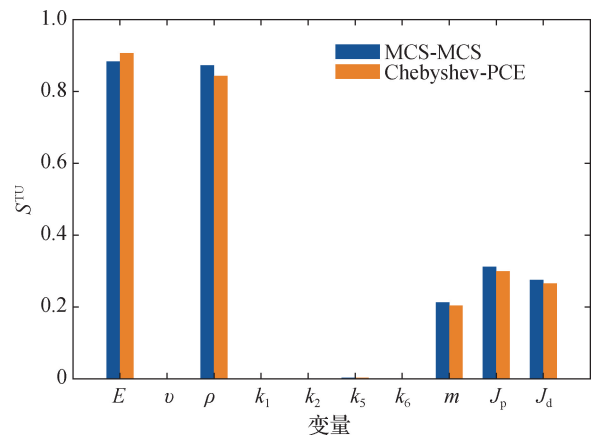


图 5 S^{TU}
Fig. 5 S^{TU}

由表 4 和图 4~5 可知, 弹性模量 E 、密度 ρ 、盘的质量 m 、转动惯量 J_p 和 J_d 主指标下界 S^L 较大, 这些变量对转子临界转速的影响很大, 不可忽略其不确定

性. 泊松比 ν 和刚度 k_1, k_2, k_5, k_6 的总指标上界 S^{TU} 较小, 这些变量对转子临界转速的影响很微弱. 因此可以得出结论, 该动力涡轮转子临界转速不确定性主要

由弹性模量、密度和盘的质量与转动惯量引起,对该模型进行不确定性量化和分析时可将泊松比和4个支承处刚度的参数定为其区间内任意值,该做法不会对结果产生影响且实现了模型的降维。

4 结 论

1) 考虑参数在混合不确定性的情况下, Chebyshev-PCE法可以进行概率盒框架下的灵敏度指标求解,且准确性好。该方法使用了 Chebyshev 多项式拟合逼近和 PCE 代理模型,避免了传统方法抽取大量样本,显著提升了 Sobol 灵敏度指标计算的效率。

2) 概率盒灵敏度方法可以在考虑混合不确定性时对转子系统的变量进行重要性排序,筛选其中对输出响应影响小的变量。在对该模型后续的研究中可将该变量视为确定的数值,实现模型降维。

3) 本研究仅考虑了转子系统的临界转速进行灵敏度分析,然而实际工程中对转子不平衡响应等其他输出响应也感兴趣,后续研究会考虑多响应情况的灵敏度分析。另外为了方便说明方法的原理且不失一般性,本文将各变量视为互相独立,后续将会研究变量间相关性问题的。

参考文献:

[1] FRISWELL M I, PENNYJE T, GARVEY S D, et al. Dynamics of rotating machines [M]. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2010.

[2] FU C, REN X M, YANG Y F, et al. Dynamic response analysis of an overhung rotor with interval uncertainties [J]. Nonlinear Dynamics, 2017, 89(3): 2115-2124.

[3] SONG J W, CUI Y F, WEI P F, et al. Constrained Bayesian optimization algorithms for estimating design points in structural reliability analysis [J]. Reliability Engineering & System Safety, 2024, 241: 109613.

[4] MARELLI S, LAMAS C, KONAKLI K, et al. UQLab user manual-sensitivity analysis[R]. Zurich: ETH Zurich, 2024.

[5] 欧阳衡. 基于相关性分析的结构不确定性传播与计算反求方法研究[D]. 长沙: 湖南大学, 2022.

[6] 潘宏刚, 李根稼, 郭宝仁, 等. 基于传递矩阵算法的支承变化对临界转速影响的灵敏度分析[J]. 汽轮机技术, 2022, 64(6): 416-420, 423.

[7] 胡德昌, 孙永鑫, 蔡伟, 等. 转子结构重频特征灵敏度计算的一种新方法[J/OL]. 计算力学学报: 1-9[2024-05-20].

<http://kns.cnki.net/kcms/detail/21.1373.O3.20240418.1851.042.html>.

[8] CAO J K, DING S T. Sensitivity analysis for safety design verification of general aviation reciprocating aircraft engine[J]. Chinese Journal of Aeronautics, 2012, 25(5): 675-680.

[9] MA P P, ZHAI J Y, WANG Z H M, et al. Unbalance vibration characteristics and sensitivity analysis of the dual-rotor system in aeroengines [J]. Journal of Aerospace Engineering, 2021, 34(1): 04020094.

[10] SALOMON J, GÖING J, LÜCK S, et al. Sensitivity analysis of an aircraft engine model under consideration of dependent variables[C]// Turbomachinery Technical Conference and Exposition. New York: ASME, 2021: V001T01A005.

[11] 陈泽权. 基于 Kriging 模型的结构可靠性及全局灵敏度自适应分析方法研究[D]. 长春: 吉林大学, 2023.

[12] 李朝阳. 高效响应面法及其在施工脚手架可靠度分析中的应用研究[D]. 南宁: 广西大学, 2020.

[13] 庞慧明. 基于双拓展支持向量回归的可靠性和灵敏度计算方法研究[D]. 西安: 西安电子科技大学, 2023.

[14] 金燕, 刘少军, 张建阁. 基于遗传算法优化的人工神经网络下高速滚动轴承的疲劳可靠性[J]. 航空动力学报, 2018, 33(11): 2748-2755.

[15] FU C, XU Y D, YANG Y F, et al. Response analysis of an accelerating unbalanced rotating system with both random and interval variables[J]. Journal of Sound and Vibration, 2020, 466: 115047.

[16] 宋静文. 结构不确定分析中的全局及区域灵敏度研究[D]. 西安: 西北工业大学, 2016.

[17] 汤鸿杰, 陈梅玲, 张保强, 等. 考虑随机和认知混合不确定性的航空发动机燃烧效率灵敏度分析[J]. 推进技术, 2023, 44(7): 207-214.

[18] 许泽伟. 基于多项式混沌展开的不确定性模型修正方法研究[D]. 兰州: 兰州交通大学, 2021.

[19] 熊芬芬, 杨树兴, 刘宇, 等. 工程概率不确定性分析方法[M]. 北京: 科学出版社, 2015: 139-140.

[20] 赵威, 卜令泽, 王伟. 稀疏偏最小二乘回归-多项式混沌展开代理模型方法[J]. 工程力学, 2018, 35(9): 44-53.

[21] TANG H J, ZHANG S C, LI J H, et al. Imprecise P-box sensitivity analysis of an aero-engine combustor performance simulation model considering correlated variables [J]. Energies, 2023, 16(5): 2362.

[22] 邓旺群, 吴施志, 刘文魁, 等. 带柔性静子结构高速转子支承刚度修正方法[J]. 振动与冲击, 2020, 39(7): 29-35, 66.

(责任编辑:任滢滢)