

# 随机激励下声学黑洞梁裂纹疲劳扩展分析

项子建<sup>1,2</sup>, 杜伟奇<sup>1,2\*</sup>, 邱小彪<sup>3</sup>, 戴启雷<sup>4</sup>

(1. 中国矿业大学机电工程学院, 江苏 徐州 221116; 2. 宁波大学 机械工程与力学学院, 宁波 315211;  
3. 宁波更大集团有限公司, 浙江 宁波 315211; 4. 华纬科技股份有限公司, 浙江 诸暨 311800)

**摘要:** [目的] 声学黑洞(acoustics black hole, ABH)很薄的局部位置存在结构强度问题, 并可能产生裂纹. 本文对 ABH 梁随机振动的裂纹疲劳扩展分析理论进行研究, 并对其疲劳寿命进行预测. [方法] 采用 Paris 公式模拟裂纹疲劳的扩展速率, 构建裂纹扩展速率与应力范围均方根的关系式; 再基于假设振型法建立振动方程, 通过应力频响函数推导出应力功率谱密度(power spectral density, PSD), 进而计算随机激励下的应力范围均方根. 最后将裂纹情况下等效弯曲刚度修正模型带入应力范围均方根, 并提出了一种针对 ABH 梁的随机振动疲劳寿命预测流程. [结果] ABH 梁中裂纹相对深度与疲劳寿命基本呈负相关. 裂纹位置和 ABH 结构参数(包括黑洞半径、黑洞阶次和截断厚度)对裂纹疲劳寿命的影响具有明显的非线性特性; 此外, 增加阻尼能够有效延长裂纹疲劳寿命. [结论] 当监测到 ABH 梁的裂纹时, 需根据裂纹的位置和相对深度、黑洞半径、截断厚度等参数预测 ABH 梁的裂纹疲劳寿命.

**关键词:** 声学黑洞梁; 随机振动; 裂纹扩展; 应力功率谱; 寿命预测

中图分类号: TH 113.1

文献标志码: A

文章编号: 0438-0479(2025)02-0346-07

## Crack Fatigue propagation analysis of acoustic black hole beam under random excitation

XIANG Zijian<sup>1,2</sup>, DU Weiqi<sup>1,2\*</sup>, QIU Xiaobiao<sup>3</sup>, DAI Qilei<sup>4</sup>

(1. School of Mechanical and Electrical Engineering, China University of Mining and Technology, Xuzhou 221000, China;  
2. School of Mechanical Engineering and Mechanics, Ningbo University, Ningbo 315211, China; 3. Great Group Company, Ningbo 315211, China; 4. Hwaway Technology Corporation Limited, Zhujia, 311800, China)

**Abstract:** [Objective] In the thin local area of the acoustic black hole (ABH), structural strength issues exist, and cracks may develop. Herein, we attempt to theoretically analyze the random vibration crack fatigue growth of ABH beams and predicts their fatigue life. [Methods] The Paris formula is used to simulate the crack fatigue growth rate and to establish the relationship between the crack growth rate and the root mean square (RMS) of stress range. Then, the vibration equation is also established based on the assumed mode method, and the stress power spectral density is derived through the stress frequency response function. All these results lead to the computation of the RMS of stress range. Finally, the equivalent bending stiffness correction model under crack conditions is substituted into the RMS of stress range, and a random vibration fatigue life prediction process for ABH beams is proposed. [Results] The correctness of the method is validated by comparing the natural frequencies. The RMS of stress range values of ABH beams and uniform beams are compared, and it is found that the RMS of stress range values of ABH beams significantly exceeds than that of uniform beams, indicating a more obvious local stress concentration effect. Meanwhile, the relative depth of the crack in ABH beams is basically negatively correlated with the fatigue life. Furthermore, the influence of crack location and ABH

收稿日期: 2024-07-01 录用日期: 2025-01-02

基金项目: 浙江省自然科学基金(LQ22A020002); 宁波市重点研发项目(2023T013); 浙江省省属高校基本科研业务费项目(SJLY2023001)

\*通信作者: duweiqi@nbu.edu.cn

引文格式: 项子建, 杜伟奇, 邱小彪, 等. 随机激励下声学黑洞梁裂纹疲劳扩展分析[J]. 厦门大学学报(自然科学版), 2025, 64(2): 346-352.

Citation: XIANG Z J, DU W Q, QIU X B, et al. Crack fatigue propagation analysis of acoustic black hole beam under random excitation[J]. J Xiamen Univ Nat Sci, 2025, 64(2): 346-352. (in Chinese)



structural parameters (including black hole radius, black hole order, and truncation thickness) on the crack fatigue life shows obvious nonlinear characteristics. In addition, increasing damping can effectively extend the crack fatigue life. [Conclusion] When cracks are detected in the ABH beam, the fatigue life of the ABH beam needs to be predicted based on parameters such as the location and the relative depth of cracks, the radius of the black hole, as well as the cutoff thickness.

**Keywords:** acoustic black hole beam; random vibration; crack propagation; stress power spectrum; life prediction

Krylov 等<sup>[1]</sup>提出声学黑洞(acoustics black hole, ABH)这一术语,借鉴天体物理学中‘黑洞’(BH)的概念.其基本原理源于 Mironov<sup>[2]</sup>的开创性研究:在薄板楔形结构中,存在类似于黑洞效应的现象:随着薄板厚度的减小,弯曲波的传播速度也随之降低;在薄板的边界附近,由于厚度的减少,波到达边缘所需的传播时间趋于无限,从而导致该区域的反射系数接近于零. Krylov 等<sup>[1,3]</sup>首次将 ABH 的概念应用于梁结构,通过在结构中引入厚度变化来操控弯曲波的传播,从而实现了对弯曲波的有效控制.

ABH 作为一种全新的结构形式,在振动噪声控制、声波调控和能量回收等领域展示出极大应用潜力<sup>[4-5]</sup>.由于 ABH 梁存在局部位置较薄,在实际应用中会引起结构强度问题. Du 等<sup>[6]</sup>提出了一种基于高斯展开的频域方法,用于 ABH 结构的疲劳分析.该方法通过利用 ABH 结构模态的特性,直接在频域中估算疲劳损伤.结果表明,该方法在 ABH 结构的疲劳分析中表现出良好的适用性和高精度.魏彩凤等<sup>[7]</sup>采用四种随机载荷谱对 ABH 梁进行数值建模,并进行了疲劳可靠性分析.结果表明,特征频率和位移功率谱密度(power spectral density, PSD)偏差均在误差范围内,且 ABH 区域的振动疲劳寿命随载荷谱变化而变化.在航空航天、航海及汽车工程等领域,结构常面临复杂的随机振动载荷环境,这使得振动疲劳寿命成为这些重要工程领域的关键制约因素.目前,针对随机载荷下的疲劳寿命问题已取得了不少研究进展. Petrucci 等<sup>[8]</sup>提出了一种基于应力 PSD 的方法,用于高效预测部件在高斯稳态宽带随机载荷下的高周疲劳寿命.该方法避免了繁琐的时域仿真,适用于任意形状的 PSD 随机应力过程,并显著提升了预测精度. Wu 等<sup>[9]</sup>建立基于道路载荷谱的平均值和振幅分布模型,结合高低周疲劳的临界应力与载荷校正因子,提出了一种改进的疲劳寿命预测方法,并通过材料试验与发动机支架实验验证了其准确性和实用性. Wang 等<sup>[10]</sup>改进了疲劳寿命预测模型,采用加权系数、动弹性模量及等幅疲劳中值面,并结合 Miner 线性损伤理论,大幅提升了随机载荷下寿命估计的准确性. Ge 等<sup>[11]</sup>则提出了一种频-时混合方法,用于随机载荷下

多轴疲劳寿命预测.该方法基于频域等效应力法确定临界损伤点,并通过功率谱密度生成随机载荷时间历史,在时域中进行寿命预测.其在 7075-T6 铝合金随机振动疲劳试验中的验证表明,该方法预测结果与实验数据高度一致.

目前,ABH 梁的研究主要集中在减振降噪和能量回收,而针对振动疲劳寿命的研究较少.为了预测存在裂纹时的裂纹扩展情况并确保工程安全性,本文以含裂纹 ABH 梁为研究对象,通过修正等效弯曲刚度模型,建立其振动方程,并在此基础上进行裂纹疲劳扩展分析,提出疲劳寿命预测的计算流程.

## 1 结构振动分析

### 1.1 模型建立

本文的研究对象是含有表面裂纹的 ABH 悬臂梁结构(图 1). ABH 悬臂梁是一种根据幂律分布  $h(x) = \epsilon x^m$  ( $m \geq 2$ ,  $m$  为黑洞阶次,  $\epsilon$  为斜率)沿波传播方向不断减小结构厚度以实现减震消音的结构.在这种悬臂梁末端,弯曲波传播速度不断降低,波长被压缩,弯曲波收敛形成 ABH 现象.本文中, ABH 悬臂梁结构黑洞区域的厚度服从幂律分布  $h(x) = \epsilon x^m + h_0$  (即  $[x_1, x_2]$  区域),  $h_0$  为截断厚度,  $\epsilon = (h_{\text{uni}} - h_0)/r_{\text{ABH}}^m$  为斜率,  $[0, x_1]$  区域均匀部分的厚度为  $h_{\text{uni}}$ . 梁的左端通过平移弹簧  $k_t$  和旋转弹簧  $k_r$  连接,调整刚度系数  $k_t$  和  $k_r$  可以模拟不同的边界条件.为了模拟 ABH 悬臂梁左端固定的边界条件,本文设置了平移弹簧刚度系数  $k_t \rightarrow +\infty$  和旋转弹簧刚度系数  $k_r \rightarrow +\infty$ . 在  $x = x_1$  处施加随机激励使梁振动. 梁的几何参数见表 1.

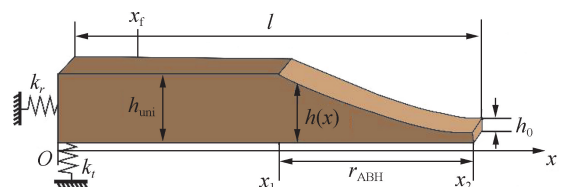


图 1 ABH 悬臂梁模型

Fig. 1 ABH cantilever beam model

表 1 ABH 悬臂梁的几何参数

Tab. 1 Geometric parameters of ABH cantilever beam

参数	数值
梁长 $l=x_2/m$	0.5
均匀厚度 $h_{uni}/(10^{-3} \text{ m})$	8
截断厚度 $h_0/(10^{-4} \text{ m})$	8
斜率 $\epsilon$	0.115 2
黑洞阶次 $m$	2
裂纹坐标 $c/m$	0.4
裂纹相对深度 $\frac{a_0}{h(c)}$	0.2
黑洞半径 $r_{ABH}/m$	0.25

### 1.2 随机振动裂纹扩展

在裂纹扩展中,通常采用 Pair 定律来描述裂纹扩展速率:

$$\frac{da}{dN} = C(\Delta K)^n, \tag{1}$$

其中,  $a$  为裂纹深度,  $N$  为裂纹扩展疲劳寿命,  $C, n$  为材料常数,  $\Delta K$  为裂纹尖端动态应力强度因子.

$$\Delta K = f\left(\frac{a}{h(c)}\right) \Delta\sigma_d \sqrt{\pi a}, \tag{2}$$

其中,  $\Delta\sigma_d$  为各振动周期内裂纹截面处的动弯曲应力幅值,  $f\left(\frac{a}{h(c)}\right)$  是几何校正因子. 当  $\frac{a}{h(c)} < 0.6$  时,可用以下数值函数近似几何校正因子<sup>[12]</sup>:

$$f\left(\frac{a}{h(c)}\right) = 1.12 - 1.4\left(\frac{a}{h(c)}\right) + 7.33\left(\frac{a}{h(c)}\right)^2 - 13.8\left(\frac{a}{h(c)}\right)^3 + 14\left(\frac{a}{h(c)}\right)^4. \tag{3}$$

本文为零均值平稳随机过程,应力比为 -1,因此,应力强度因子可定义为<sup>[13]</sup>  $\Delta K = K_{\max}$ .

在随机激励下,裂纹尖端的应力强度因子表现为一种随机过程.从概率统计的角度来看,应力强度因子的均方值  $\Delta K_{\text{rms}}$  反映了随机变量的能量能级,而其均方根值则揭示了应力强度因子在整个频域上的平均特性.在考虑能量守恒的原则下,本文将  $K_{\max}$  替换成  $\Delta K_{\text{rms}}$ <sup>[14]</sup>.

本文只考虑宏观裂纹,即裂纹为 I 型裂纹,则裂纹扩展速率公式改写为:

$$\frac{da}{dN} = C(\Delta K_{\text{rms}})^n, \tag{4}$$

$$\Delta K_{\text{rms}} = f\left(\frac{a}{h(c)}\right) \Delta\sigma_{\text{rms}} \sqrt{\pi a}, \tag{5}$$

其中,  $\Delta\sigma_{\text{rms}}$  为应力范围的均方根值,可表示为:

$$\Delta\sigma_{\text{rms}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{S}_{\text{sf}}(x, \omega) d\omega, \tag{6}$$

其中,  $\mathbf{S}_{\text{sf}}(x, \omega)$  为应力响应的 PSD 函数,  $\omega$  为角频率.

假设 ABH 梁的总裂纹深度为  $a_i$ , 初始裂纹深度为  $a_0$ , 则第  $i$  个振动周期后的总裂纹深度为

$$a_i = a_0 + \sum_{k=1}^i \Delta a_k. \tag{7}$$

其中,  $i$  为总振动循环次数,  $\Delta a_k$  是第  $k$  个振动周期处的裂纹增量,可以近似为

$$\Delta a_k = C \left( \Delta\sigma_{\text{rms}} \sqrt{\pi a_{k-1}} f\left(\frac{a_{k-1}}{h}\right) \right)^n, \tag{8}$$

其中,  $a_{k-1}$  为第  $k-1$  个振动周期处的裂纹深度.

本文考虑两个 ABH 悬臂梁发生失效破坏标准:

标准 1) 当裂纹疲劳延伸至悬臂梁中性面可确定发生失稳破坏,即当  $a_i \geq h(c)/2$  时发生破坏;

标准 2) 当裂纹尖端的应力强度因子达到 ABH 梁的断裂韧性时,认为其失稳破坏,即  $(K_{\max} \geq K_C)$ .

### 1.3 应力频响函数

已知无裂纹悬臂梁弯曲应力的公式:

$$\sigma(x, t) = \frac{Eh(x)}{2v(x, t)}. \tag{9}$$

其中,  $E$  为弹性模量,  $v(x, t)$  为  $t$  时刻  $x$  位置的曲率半径,它可由位移函数  $w(x, t)$  求导得到:

$$v(x, t) = \frac{\left[1 + \left(\frac{dw(x, t)}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{d^2w(x, t)/dx^2}. \tag{10}$$

然而,所述表达式属于时域范畴,缺乏频域应力计算公式.假设能够获取时域应力谱,仅需进行 PSD 估计,即可获得相应的 PSD.

在进一步的动力学建模中,位移函数  $w(x, t)$  往往难以直接计算.通常情况下,  $w(x, t)$  需通过一系列形函数与广义坐标的乘积表示,具体形式如下<sup>[15]</sup>:

$$w(x, t) = \sum q_i(t) \varphi_i(x) = \mathbf{q}^T \boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi}^T \mathbf{q}, \tag{11}$$

其中,  $\mathbf{q}, \boldsymbol{\varphi}$  分别是的时间相关的权重列向量与形函数列向量.

对 ABH 梁进行能量分析,可以得到它的动能  $E_k$ 、势能  $E_p$ ,以及外力做功  $W$  分别为:

$$E_k = \frac{1}{2} \int_0^l \rho h(x) \dot{w}^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^l \rho h(x) (\dot{\mathbf{q}}^T \boldsymbol{\varphi} \boldsymbol{\varphi}^T \dot{\mathbf{q}}) dx \equiv \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}}, \tag{12}$$

$$E_p = \frac{1}{2} \int_0^l EI \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 dx + \frac{1}{2} k_t w^2(x_2, t) + \frac{1}{2} k_r \left(\frac{\partial w(x_2, t)}{\partial x}\right)^2 = \frac{1}{2} \int_0^l EI (\mathbf{q}^T \partial_{xx}^2 \boldsymbol{\varphi} \partial_{xx}^2 \boldsymbol{\varphi}^T \mathbf{q}) dx +$$

$$k_t \mathbf{q}^T \boldsymbol{\varphi}(x_2) \boldsymbol{\varphi}^T(x_2) \mathbf{q} / 2 + k_b \mathbf{q}^T \partial_x \boldsymbol{\varphi}(x_2) \partial_x \boldsymbol{\varphi}^T(x_2) \mathbf{q} / 2 = (\mathbf{q}^T \mathbf{K}_b \mathbf{q} + \mathbf{q}^T \mathbf{K}_{\text{edge},1} \mathbf{q} + \mathbf{q}^T \mathbf{K}_{\text{edge},2} \mathbf{q}) / 2 \equiv \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q} / 2, \quad (13)$$

$$W = \int_0^l \delta(x_f) f(t) w(x_f, t) dx = \mathbf{q}^T \int_0^l f(t) \boldsymbol{\varphi} dx \equiv \mathbf{q}^T \mathbf{f}. \quad (14)$$

其中:  $\rho$  为梁的密度;  $EI$  为等效抗弯刚度, 当 ABH 梁含裂纹时, 按 1.5 节对  $EI$  进行修正;  $k_b$  为 ABH 梁本身的刚度矩阵,  $\mathbf{K}_{\text{edge},1}$  为平移弹簧刚度矩阵,  $\mathbf{K}_{\text{edge},2}$  为旋转弹簧刚度矩阵;  $\mathbf{K}$  为加上边界条件后整个 ABH 梁的刚度矩阵. 由式(12)~(14)可得系统的拉格朗日函数为:

$$L = E_k - E_p + W = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}} - \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q} + \mathbf{q}^T \mathbf{f}, \quad (15)$$

其中,  $\mathbf{M}$  为 ABH 悬臂梁的质量矩阵,  $\mathbf{f}$  为外力在形函数下的力向量.

进而借助欧拉-拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j(t)} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial q_j(t)} \right) = 0, \quad (16)$$

将式(12)~(15)代入式(16)可得到时域内振动方程

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K} \mathbf{q}(t) = \mathbf{f}(t). \quad (17)$$

将式(17)进行傅里叶变换得

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{Q} = \mathbf{F}, \quad (18)$$

其中,  $\omega$  为角频率,  $\mathbf{Q}$  为激励响应幅值向量,  $\mathbf{F}$  为激励幅值向量.

在简谐激励条件下, 可从上述方程直接计算振幅. 然而, 针对本文所涉及的随机激励情景, 需要获得相应的频率响应函数.

一般来说, 位移函数  $w(x, t)$  的频率响应函数为

$$\mathbf{H} = (\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})^{-1}, \quad (19)$$

但是, 真实的外力激励为

$$f(t) = f(t) \cdot \boldsymbol{\varphi}(x_f), \quad (20)$$

其中,  $\boldsymbol{\varphi}(x_f)$  为位置  $x_f$  处的模态形状函数.

因此, 真实的位移函数  $w(x, t)$  的频率响应函数为:

$$\mathbf{H} = (\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})^{-1} \boldsymbol{\varphi}(x_f). \quad (21)$$

位移函数  $w(x, t)$  的一阶导数和二阶导数分别为:

$$\frac{dw(x, t)}{dx} = \mathbf{q}^T \frac{d\boldsymbol{\varphi}}{dx}, \quad (22)$$

$$\frac{d^2 w(x, t)}{dx^2} = \mathbf{q}^T \frac{d^2 \boldsymbol{\varphi}}{dx^2}. \quad (23)$$

式(22)~(23)的频率响应函数为:

$$\mathbf{H}_x = [(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})^{-1} \boldsymbol{\varphi}(x_f)] \frac{d\boldsymbol{\varphi}}{dx}, \quad (24)$$

$$\mathbf{H}_{xx} = [(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})^{-1} \boldsymbol{\varphi}(x_f)] \frac{d^2 \boldsymbol{\varphi}}{dx^2}. \quad (25)$$

## 1.4 应力功率谱密度

根据式(24)和(25)可知, 位移函数  $w(x, t)$  的导数的 PSD 分别为:

$$\mathbf{S}_1 = \mathbf{H}_x^* \mathbf{H}_x \mathbf{S}_f(\omega) = |\mathbf{H}_x|^2 \mathbf{S}_f(\omega), \quad (26)$$

$$\mathbf{S}_2 = \mathbf{H}_{xx}^* \mathbf{H}_{xx} \mathbf{S}_f(\omega) = |\mathbf{H}_{xx}|^2 \mathbf{S}_f(\omega), \quad (27)$$

其中,  $\mathbf{S}_f(\omega)$  为激励的 PSD, \* 表示求共轭复数.

由于在频域内直接计算 PSD 较为复杂, 需要在时域内进行计算. 因此, 需要将频域内的结果转换回时域.

首先, 把单边 PSD 幅值变为双边 PSD 幅值, 计算期望双边频谱幅值:

$$A_1 = \sqrt{\mathbf{S}_1 \cdot M \cdot f_s / 2}, \quad (28)$$

$$A_2 = \sqrt{\mathbf{S}_2 \cdot M \cdot f_s / 2}, \quad (29)$$

其中,  $M$  为调整系数,  $f_s$  为采样频率. 考虑到信号仅具有幅度谱而缺乏相位谱, 在信号合成过程中, 引入随机相位角  $\vartheta_s$ , 其取值范围为 0 到  $\pi$ , 且服从均匀分布, 通过以下方式得到频谱:

$$X_{s1}(x, \omega) = A_1 \cdot e^{f_s \cdot \vartheta_s}, \quad (30)$$

$$X_{s2}(x, \omega) = A_2 \cdot e^{f_s \cdot \vartheta_s}, \quad (31)$$

接着, 借助频谱的共轭对称性, 计算双边频谱, 并应用傅里叶逆变换. 这样得到的实部即为所需的时域条件下位移关于  $x$  的一阶导数和二阶导数:

$$\frac{dw(x, t)}{dx} = \text{Re} \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_{s1}^*(x, \omega) e^{i\omega t} d\omega \right), \quad (32)$$

$$\frac{d^2 w(x, t)}{dx^2} = \text{Re} \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_{s2}^*(x, \omega) e^{i\omega t} d\omega \right), \quad (33)$$

式中,  $\text{Re}$  为取复数的实部.

最后, 把式(32)和(33)的结果代入式(10), 得曲率半径  $v(x, t)$ , 再由式(9)得到应力响应函数  $\boldsymbol{\sigma}(x, t)$ . 应力频率响应函数  $\mathbf{H}_{sf}$  和应力响应函数  $\boldsymbol{\sigma}(x, t)$  可通过傅里叶变换相互转换:

$$\mathbf{H}_{sf}(x, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{\sigma}(x, t) e^{-i\omega t} dt. \quad (34)$$

最终, 得到应力响应的 PSD:

$$\mathbf{S}_{sf}(x, \omega) = \mathbf{H}_{sf}^*(x, \omega) \cdot \mathbf{H}_{sf}(x, \omega) \cdot \mathbf{S}_f(x, \omega), \quad (35)$$

式中  $\mathbf{S}_f(x, \omega)$  为激励的 PSD.

## 1.5 等效抗弯刚度修正

值得注意的是, 裂纹的存在会导致动态刚度下降, 从而对梁的特征频率和振型产生影响. 因此, 考虑梁上存在裂纹的情况时, 需要进行修正的模态分析. Swamida 等<sup>[16]</sup>提出了等效抗弯刚度的修正式:

$$EI_c(x) = \frac{EI}{1 + \frac{EIR(a, c)}{1 + \left( \frac{x-c}{k(a, c)a} \right)^2}}. \quad (36)$$

其中,  $EI_c(x)$  是在裂纹位置  $x$  处的修正抗弯刚度,  $EIR(a, c)$  和  $k(a, c)$  分别为:

$$EIR(a, c) = \frac{3\pi f \left(\frac{a}{h(c)}\right)^2 a}{k(a, c)h \left[ \arctan\left(\frac{l-c}{k(a, c)a}\right) + \arctan\left(\frac{c}{k(a, c)a}\right) \right]}, \quad (37)$$

$$k(a, c) = \frac{3\pi f \left(\frac{a}{h(c)}\right)^2 (h(c) - a)^3 a}{(h(c)^3 - (h(c) - a)^3)h(c)}. \quad (38)$$

ABH 梁的初始裂纹在外部激励下逐渐扩大. 同时, 裂纹尺寸的变化会导致弯曲刚度的减小, 从而影响 ABH 的动态特性. 含裂纹梁的振动与裂纹疲劳扩展是相互影响和相互作用的. 因此, 为了提高疲劳寿命预测的精度, 需要进行结构振动分析和裂纹疲劳扩展计算. 图 2 为振动疲劳寿命预测流程图.

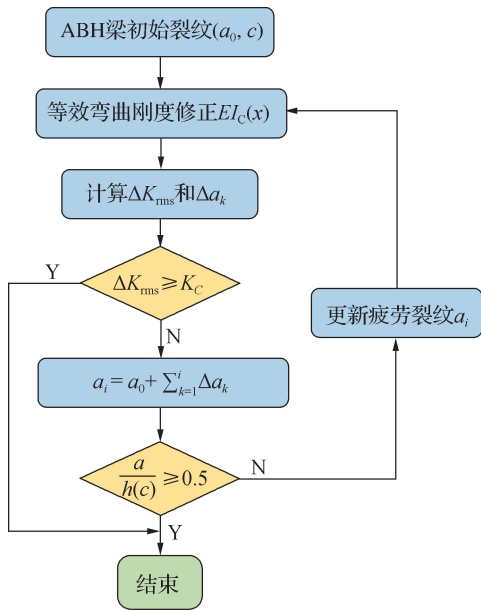


图 2 ABH 悬臂梁失效预测流程

Fig. 2 Failure prediction process of ABH cantilever beam

## 2 仿真与讨论

### 2.1 数值解与有限元验证

本文使用有限元软件 COMSOL 建立了一个包含裂纹的 ABH 悬臂梁的有限元模型. 通过高斯扩展法对该模型进行了振动特性分析, 并将 MATLAB 的数值计算结果与有限元分析结果进行对比(表 2). 分析结果表明, 在前 7 阶模态中, 最大误差仅为 0.42%, 整体计算精度在可接受范围内.

表 2 有限元与数值结果的固有频率比较

Tab. 2 Comparison of eigenfrequencies between finite element and numerical results

固有频率/Hz	有限元解	数值解	误差/%
$\omega_1$	46.89	46.88	0.02
$\omega_2$	121.31	121.68	0.30
$\omega_3$	274.32	274.10	0.08
$\omega_4$	466.94	466.34	0.13
$\omega_5$	758.30	758.25	0.01
$\omega_6$	1 119.70	1 115.60	0.37
$\omega_7$	1 530.39	1 524.00	0.42

## 2.2 裂纹疲劳扩展寿命分析

### 2.2.1 无裂纹时应力范围均方根值

为了研究 ABH 区域对振动疲劳寿命的影响, 在  $x=l/8$  处对 ABH 梁和均匀梁施加随机载荷, 采用表 1 所示的几何参数和表 3 所示的材料参数, 进行 ABH 梁振动疲劳寿命的预测. 图 3 显示了在相同随机载荷下, 区域  $[0.25, 0.50]$  内 ABH 梁和均匀梁的应力范围的均方根值. 整体上, ABH 梁的应力范围均方根值明显高于均匀梁, 尤其在 ABH 区域  $[0.450, 0.475]$  范围

表 3 ABH 悬臂梁的材料参数

Tab. 3 Material parameters of ABH cantilever beam

参数	数值
杨氏模量 $E/\text{GPa}$	73
$\rho/(\text{kg} \cdot \text{m}^{-3})$	2 700
指数 $n$	4.05
常数 $C/10^{-11}$	1.86

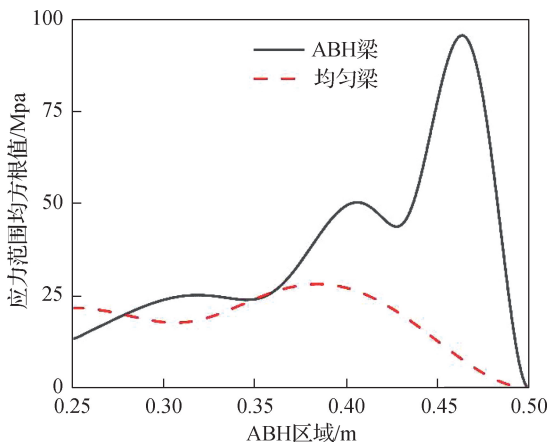


图 3 ABH 梁与均匀梁的应力范围均方根值对比

Fig. 3 Comparison of root mean squares of stress range value between ABH beam and uniform beam

内达到了峰值. 因此, 该 ABH 梁的失效破坏区域多数集中在此. 所以, 在使用 ABH 梁时需要特别关注 ABH 区域的安全性.

### 2.2.2 裂纹参数对疲劳寿命的影响

图 4 给出了不同裂纹位置坐标下, 不同裂纹相对深度失效破坏的最小随机振动即最小寿命循环次数. 随着裂纹相对深度的增加, ABH 梁的整体寿命呈下降趋势. 这是由于随着裂纹相对深度的增加, 裂纹更容易扩展至结构中面. 裂纹位置坐标的增加与寿命的缩短呈正相关, 即裂纹位置坐标越大, 寿命越短. 当裂纹相对深度一定时, 寿命不完全随裂纹坐标位置的增加而减小. 当  $a/h(c)$  为 0.25 和 0.30 时, 裂纹位于 0.35 m 时寿命最大, 而裂纹位于 0.30 m 时的寿命远小于裂纹位于 0.35 m 的情况.

从中可以得出结论, 裂纹位置会影响 ABH 梁的寿命, 因为不同位置的裂纹会导致不同的动应力响应. 对 ABH 梁的振动进行寿命估算时必须考虑裂纹位置的影响.

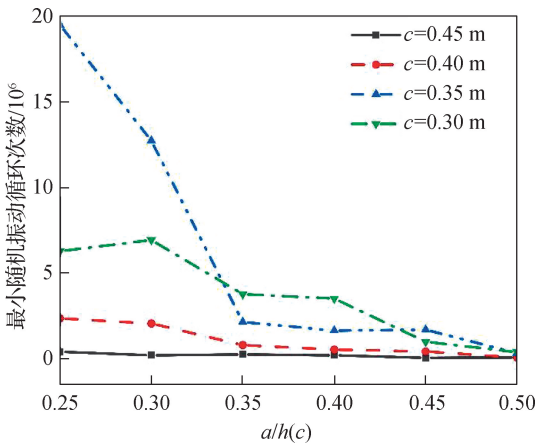


图 4 不同裂纹位置坐标  $c$  下随裂纹相对深度变化的疲劳寿命  
Fig. 4 Fatigue life varying with relative crack depth under different crack position coordinate  $c$

### 2.2.3 ABH 梁结构参数对疲劳寿命的影响

通常情况下, ABH 效应只有在激励频率超过特定频率时才会显现, 这一频率被称为黑洞的截止频率, 其由黑洞直径( $2r_{ABH}$ )决定. 换言之, 只有波长小于  $2r_{ABH}$  的声波能够进入黑洞, 并在一定程度上被吸收. 黑洞截止频率为

$$f_{\text{jie zhi}} = \frac{h_{\text{uni}}}{4r_{\text{ABH}}} \sqrt{\frac{E}{3\rho}}, \quad (39)$$

式中,  $E$  为杨氏模量,  $\rho$  为材料密度, 其数值见表 3 所示.

从上式可知截止频率仅与  $r_{\text{ABH}}$  有关, 为了研究黑洞半径对寿命的影响, 在黑洞阶次  $m=2$ , 裂纹位于

0.4 m 时, 设置不同的黑洞半径做对比研究, 如表 4 所示. 从表中可以看出在  $r_{\text{ABH}}$  固定时, 最小寿命随截断厚度的减小呈下降趋势;  $h_0$  固定时, 最小寿命随黑洞半径呈波动性变化. 值得一提的是, 最小寿命随截断厚度减小呈下降趋势可能只是  $h_0$  取值稀疏, 若  $h_0$  取值密集, 也会呈波动下降(图 5).

表 4 不同黑洞半径下随截断厚度变化的最小寿命  
Tab. 4 Minimum lifetime varying with truncation thickness at different black hole radii

$h_0/h_{\text{uni}}$	最小循环次数/ $10^3$		
	$r_{\text{ABH}}=0.1$	$r_{\text{ABH}}=0.2$	$r_{\text{ABH}}=0.45$
1/3	442	786	336
1/5	219	404	126
1/7	104	36	105
1/9	63	30	65
1/11	21	27	36

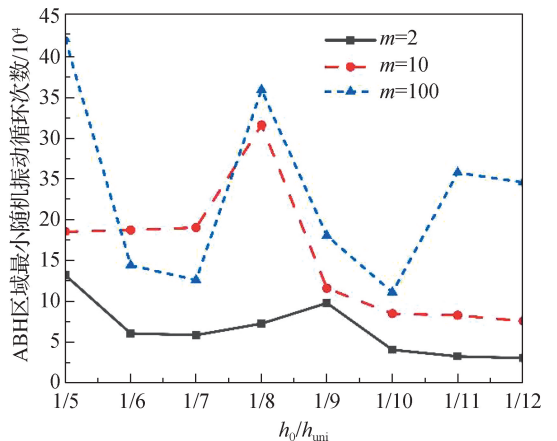


图 5 不同黑洞阶次下最小寿命随截断厚度的变化  
Fig. 5 The variation of minimum lifetime varying with truncation thickness at different black hole orders

理想情况下 ABH 梁尖端厚度为零, 但现实中总会在某个厚度产生截断, 因此对 ABH 梁的截断厚度进行研究. 图 5 显示了  $r_{\text{ABH}}=0.25$  m, 裂纹位于 0.4 m 时, 不同黑洞阶次随截断厚度变化的疲劳寿命. 可以看出, 当黑洞阶次一定时, 疲劳寿命随截断厚度减小, 呈波动式下降, 且阶次越大, 波动越明显. 当截断厚度一定时, 寿命随黑洞阶次的变化也呈现出明显的波动性. 这可能与振动本身具有波动性有关.

ABH 的效果主要取决于截断频率, 由式(39)可知截断频率与黑洞半径  $r_{\text{ABH}}$  相关. 通常情况下, 黑洞半径越大, ABH 的效果越好, 但其寿命会相应缩短.

为了延长疲劳寿命,引入阻尼模块.在截断厚度  $h_0$  为  $h_{uni}/10$  和  $r_{ABH} = 0.25$  的条件下,对比了无阻尼和有阻尼的 ABH 梁在裂纹位置  $c = 0.4$  处的疲劳寿命和应力范围均方根值.结果显示,增加阻尼模块可显著降低应力范围均方根值,并提高疲劳寿命(表 5).所以,实际工程中,也需要把阻尼因素考虑进去实现减振和结构疲劳强度之间的平衡.

表 5 有无阻尼时的应力范围均方根值和疲劳寿命  
Tab. 5 RMS of stress range values and fatigue life with/without damping

阻尼情况	应力范围均方根值/Mpa	最小循环次数/ $10^3$
无阻尼	39.44	2 060
阻尼层厚 $h_{uni}/10$	17.05	61 486
阻尼层厚 $h_{uni}/5$	8.29	113 966.6

### 3 结 论

本文对含裂纹的 ABH 梁进行了随机振动裂纹疲劳扩展分析,从解析角度研究了随机振动应力集中的位置,绘制了应力范围均方根值分布图,并得出以下结论:

- 1) 对随机载荷作用下 ABH 梁裂纹扩展进行分析,为随机载荷条件下存在裂纹扩展的 ABH 梁的疲劳寿命预测提供了一种有效的方法.
- 2) 研究表明含裂纹的 ABH 梁的寿命受黑洞的半径、阶次和截断厚度的影响,且呈明显的非线性关系.当 ABH 梁内出现裂纹时,有必要根据裂纹的位置和相对深度以及 ABH 梁的参数对裂纹扩展进行分析,根据裂纹疲劳寿命的预测情况进行妥善处理,以达到既保证降低成本又保证消除安全隐患的目的.
- 3) 通过引入阻尼模块,应力范围均方根值显著降低,疲劳寿命也得到了有效提高.

### 参考文献:

[1] KRYLOV V V, TILMAN F J B S. Acoustic 'black holes' for flexural waves as effective vibration dampers [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2004, 274 (3/4/5): 605-619.

[2] MIRONOV M A. Propagation of a flexural wave in a plate whose thickness decreases smoothly to zero in a finite interval[J]. *Soviet Physics Acoustics-USSR*, 1988,

34(3):318-319.

[3] KRYLOV V V. Acoustic black holes: recent developments in the theory and applications [J]. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, 2014, 61(8):1296-1306.

[4] JI H L, LIANG Y K, QIU J H, et al. Enhancement of vibration based energy harvesting using compound acoustic black holes [J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2019, 132: 441-456.

[5] PELAT A, GAUTIER F, CONLON S C, et al. The acoustic black hole: a review of theory and applications [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2020, 476: 115316.

[6] DU W Q, LI S X, LUO Y X. A frequency domain method for vibration fatigue analysis of acoustic black hole structure [J]. *International Journal of Fatigue*, 2023, 172: 107605.

[7] 魏彩凤, 杜伟奇, 邱小彪. 随机激励下声学黑洞梁疲劳寿命预测 [J]. *振动与冲击*, 2024, 43(10): 37-43, 63.

[8] PETRUCCI G, ZUCCARELLO B. Fatigue life prediction under wide band random loading [J]. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, 2004, 27 (12): 1183-1195.

[9] WU Q, ZHAO Y X, LIU X T. Fatigue life prediction of metal materials under random loads based on load spectrum extrapolation [J]. *International Journal of Fatigue*, 2024, 187(1): 108473.

[10] WANG S C, LIU X T, JIANG C J, et al. Prediction and evaluation of fatigue life for mechanical components considering anelasticity-based load spectrum [J]. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, 2021, 44(1): 129-140.

[11] GE J, SUN Y, ZHOU S, et al. A hybrid frequency-time domain method for predicting multi-axial fatigue life of 7075-T6 aluminium alloy under random loading [J]. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, 2015, 38(3): 247-256.

[12] 刘文光, 陈国平. 含裂纹悬臂梁的振动与疲劳耦合分析 [J]. *振动与冲击*, 2011, 30(5): 140-144.

[13] 顾超林. 加筋板连接件的振动疲劳研究 [D]. 南京: 南京航空航天大学, 2009.

[14] 刘梦. 结构振动疲劳裂纹扩展寿命分析的频域法 [D]. 南京: 南京航空航天大学, 2018.

[15] 刘延柱, 陈立群, 陈文良. 振动力学 [M]. 3 版. 北京: 高等教育出版社, 2019.

[16] SWAMIDAS A S J, YANG X, SESHADRI R. Identification of cracking in beam structures using Timoshenko and Euler formulations [J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 2004, 130(11): 1297-1308.

(责任编辑:任滢滢)