第 64 卷 第 2 期 厦门大学学报(自然科学版) Vol. 64 No. 2
2025 年 3 月 Journal of Xiamen University (Natural Science) Mar. 2025
doi:10.6043/j.issn.0438-0479.202410005

路和圈的极大分离集的数目

张明瑜[1],张君霞[2*]
(1.山西大同大学数学与统计学院,山西 大同 037009;2.厦门大学数学科学学院,福建 厦门 361005)

摘要:[**目的**] 对路和圈这两类特殊图的极大分离集的数目进行研究.[**方法**] 记 $MD(G)$ 为图 G 的所有极大分离集构成的集合,$\phi(G)$ 为这个集合的基数.根据极大分离集的定义,对任意的点 $v \in V(G)$,有 $\phi(G) = \phi(G,v) + \phi(G,\bar{v}) = \phi(G,v^1) + \phi(G,v^0) + \phi(G,\bar{v})$.通过运用这个公式,分别求出路和圈的极大分离集数目的表达式;对阶数 n 用归纳法,比较路和圈的极大分离集数目的大小关系.[**结果**] 对 $n \geqslant 6$ 的路 P_n,其极大分离集的数目满足关系 $\phi(P_n) = \phi(P_{n-2}) + \phi(P_{n-3}) + \phi(P_{n-4}) - \phi(P_{n-6})$;对 $n \geqslant 11$ 的圈 C_n,其极大分离集的数目满足关系 $\phi(C_n) = \phi(C_{n-2}) + \phi(C_{n-3}) + \phi(C_{n-4}) - \phi(C_{n-6})$;当 $n \geqslant 4$ 且 $n \neq 6$ 时,路和圈的极大分离集的数目满足关系 $\phi(C_n) \geqslant \phi(P_{n-1}) + 1$.[**结论**] 分别给出了路和圈的极大分离集数目的表达式,比较了二者的大小关系,这丰富了图的极大分离集的计数问题的结果.

关键词:路;圈;分离集;极大分离集
中图分类号:O 157.5 **文献标志码**:A **文章编号**:0438-0479(2025)02-0353-03

The number of maximal dissociation sets of paths and cycles

ZHANG Mingyu[1],ZHANG Junxia[2*]
(1. School of Mathematics and Statistics,Shanxi Datong University,Datong 037009,China;2. School of Mathematical Sciences,Xiamen University,Xiamen 361005,China)

Abstract:[**Objective**] The concept of dissociation set generalizes that of independent set. In graph theory and combinatorics, the problem of finding the number of maximum or maximal independent sets with given properties is well established. Here we turn the study of this problem to finding the number of maximal dissociation sets for two special graphs, i.e., paths and cycles, and we present the relationship between them. [**Methods**] Let $MD(G)$ be the set of all maximal dissociation sets of graph G and $\phi(G)$ be its cardinality. Let $S \in MD(G)$. For any $v \in V((G)$, we can readily write $\phi(G) = \phi(G,v) + \phi(G,\bar{v}) = \phi(G,v^1) + \phi(G,v^0) + \phi(G,\bar{v})$ according to the degree of the v in the induced graph $G[S]$ and whether v is in S or not. For paths, we consider the second vertex from the endpoint and obtain the representation for $\phi(P_n)$. The case of cycles abides by the same argument. Then we compare the number of maximal dissociation sets of paths and cycles by induction on n. Due to the validity of the theorem for any paths and cycles with at most $n-1$ vertices, here we consider the order of n. [**Results**] From calculations, we find that $\phi(P_n)$ is related to items $\phi(P_{n-2})$, $\phi(P_{n-3})$, $\phi(P_{n-4})$ and $\phi(P_{n-6})$ for $n \geqslant 6$, and $\phi(C_n)$ is related to items $\phi(C_{n-2})$, $\phi(C_{n-3})$, $\phi(C_{n-4})$ and $\phi(C_{n-6})$ for $n \geqslant 11$. According to the induction hypothesis, we introduce the relation between $\phi(P_n)$ and $\phi(C_n)$, i.e., when $n \geqslant 4$ and $n \neq 6$, we can validate that $\phi(C_n) \geqslant \phi(P_{n-1}) + 1$. [**Conclusion**] In this paper, we introduce the number of maximal dissociation sets of trees and cycles, and describe the relation between them by using the method of induction hypothesis. This presentation enriches results of counting the number of maximal dissociation sets of graphs.

Keywords: path; cycle; dissociation set; maximal dissociation set

收稿日期:2024-10-08 **录用日期**:2024-12-24
* **通信作者**:jxzhangmath@163.com
引文格式:张明瑜,张君霞.路和圈的极大分离集的数目[J].厦门大学学报(自然科学版),2025,64(2):353-355.
Citation: ZHANG M Y, ZHANG J X. The number of maximal dissociation sets of paths and cycles[J]. J Xiamen Univ Nat Sci, 2025, 64(2): 353-355. (in Chinese)

http://jxmu.xmu.edu.cn

本文中所指的图均为无向简单图,符号和术语同文献[1-2].

一个点子集 S 是图 G 的一个分离集,当且仅当其导出子图的最大度为 1. 1981 年,Yannakakis[3] 首次提出分离集的概念,这推广了图论里的另外两个重要的概念:独立集和导出匹配. 一个分离集是极大分离集,当且仅当其不被其他任何的分离集所包含. 若图中的一个分离集包含的点数最多,则该分离集叫做最大分离集,对应的点数叫做分离数. 对分离集的研究大致可分为两类:一类是求图的分离数或分离数的范围,可参考文献[4-5];一类是计算图的极大分离集或最大分离集的数目. 近年来,确定一个图的极大或最大分离集的数目吸引了越来越多学者的注意,一些好的结果可参考文献[6-9]. 本文研究了两类图路和圈的极大分离集数目的递归关系,并比较了二者极大分离集数目的大小.

1 基本概念

设 $G=(V,E)$ 是一个图,点子集 S 是图 G 的一个分离集,当且仅当其导出子图的最大度为 1. 记 $G[S]$ 为图 G 的导出子图. 对任意的 $v\in V(G)$,$N(v)$ 表示 v 点的邻域,$d(v)=|N(v)|$ 表示点 v 的度. 图 G 的所有极大分离集构成的集合记为 $MD(G)$,其数目记作 $\phi(G)$,于是有 $\phi(G)=|MD(G)|$. 可以根据一个点是否在集合 $MD(G)$ 里,对其进行如下的划分:

$$MD(G,v)=\{S:S\in MD(G),v\in S\},$$

$$MD(G,\bar{v})=\{S:S\in MD(G),v\notin S\}.$$

因为图的一个分离集的导出子图的最大度是 1,所以有

$$MD(G,v)=MD(G,v^1)\cup MD(G,v^0),$$

其中:

$$MD(G,v^1)=\{S:S\in MD(G),v\in S,d_{G[S]}(v)=1\},$$

$$MD(G,v^0)=\{S:S\in MD(G),v\in S,d_{G[S]}(v)=0\}.$$

设 $\phi(G,v^1)$、$\phi(G,v^0)$ 和 $\phi(G,\bar{v})$ 分别为集合 $MD(G,v^1)$、$MD(G,v^0)$ 和 $MD(G,\bar{v})$ 的基数,则有

$$\phi(G)=\phi(G,v)+\phi(G,\bar{v})=\phi(G,v^1)+\phi(G,v^0)+\phi(G,\bar{v}).$$

显然,$\phi(G)\geqslant 1$. 此外,$MD(G,v^0)$ 有可能是空集,可见下面的引理 1.

引理 1[7] 如果图 G 有一个叶子点,其邻点记作 v,则有 $\phi(G,v^0)=0$.

下面分别给出 n 阶的路和圈的极大分离集数目的递归关系.

2 主要结论及其证明

定理 1 对于 n 阶的路和圈,有

$$\phi(P_n)=\phi(P_{n-2})+\phi(P_{n-3})+\phi(P_{n-4})-\phi(P_{n-6}),(n\geqslant 6);$$

$$\phi(C_n)=\phi(C_{n-2})+\phi(C_{n-3})+\phi(C_{n-4})-\phi(C_{n-6}),(n\geqslant 11).$$

证明 记 P_n 和 C_n 的顶点为 $v_1,v_2,\cdots,v_n$,S 是一个分离集. 下面首先讨论 $\phi(P_n)$.

注意到 v_1 是 P_n 的叶子点,v_2 是其邻点,如图 1 所示,则有:

$$\phi(P_n)=\phi(P_n,v_2^1)+\phi(P_n,\bar{v}_2). \tag{1}$$

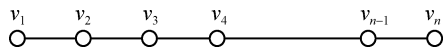

图 1 P_n 的顶点

Fig. 1 Vertice of P_n

可以分别计算式(1)等号右边的两项. 首先,

$$\phi(P_n,v_2^1)=\phi(P_n,v_1^1v_2^1)+\phi(P_n,v_2^1v_3^1).$$

对任意的 $S\in MD(P_n,v_1^1v_2^1)$,有 $\{v_1,v_2\}\in S$ 和 $v_3\notin S$,这意味着

$$\phi(P_n,v_1^1v_2^1)=\phi(P_{n-3}).$$

对任意的 $S\in MD(P_n,v_2^1v_3^1)$,有 $\{v_2,v_3\}\in S$ 和 $\{v_1,v_4\}\notin S$,这意味着

$$\phi(P_n,v_2^1v_3^1)=\phi(P_{n-4}).$$

所以有

$$\phi(P_n,v_2^1)=\phi((P_{n-3})+\phi(P_{n-4}). \tag{2}$$

其次,对任意的 $S\in MD(P_n,\bar{v}_2)$,有 $\{v_1,v_3\}\in S$ 和 $v_2\notin S$. 这是因为 $v_2\notin S$,所以 v_1 一定在集合 S 里. 若 v_3 也不在集合 S 里,这会与 S 的极大性矛盾,因此 $v_3\in S$. 记 $P_n-v_1-v_2=P_{n-2}$,有

$$\phi(P_n,\bar{v}_2)=\phi((P_{n-2})-\phi(P_{n-2},\bar{v}_3).$$

记 P_{n-2} 里的极大分离集为 S'. 对任意的 $S'\in MD(P_{n-2},\bar{v}_3)$,我们知道当 $v_3\notin S'$ 时,根据 S' 的极大性,一定有 $\{v_4,v_5\}\in S'$,此时,$\{v_3,v_6\}\notin S'$. 因此,

$$\phi(P_{n-2},\bar{v}_3)=\phi(P_{n-2}-\{v_3,v_4,v_5,v_6\})=\phi(P_{n-6}).$$

于是对 $n\geqslant 6$,有

$$\phi(P_n,\bar{v}_2)=\phi(P_{n-2})-\phi(P_{n-6}). \tag{3}$$

结合式(2)和(3)得到

$$\phi(P_n)=\phi(P_{n-2})+\phi(P_{n-3})+\phi(P_{n-4})-\phi(P_{n-6}).$$

圈 C_n 的证明与 P_n 类似,这里省略. 定理 1 证毕.

事实上,可以给出 $\phi(P_n)$ 的一个下界. 在文献[7]里,作者给出了任意的 $n\geqslant 3$ 阶树的极大分离集的数

http://jxmu.xmu.edu.cn

目的下界:

引理 2[7]　对任意的 $n \geqslant 3$ 阶树 T,有 $\phi(T) \geqslant \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1$.

由于 P_n 是特殊的树,不难验证,对任意的 $n \geqslant 3$ 阶路 P_n,有 $\phi(P_n) \geqslant \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1$,当且仅当 $n = 3,4,5$ 时等号成立.

定理 2　设 $n \geqslant 4$ 且 $n \neq 6$,有 $\phi(C_n) \geqslant \phi(P_{n-1}) + 1$.

证明　当 $4 \leqslant n \leqslant 10$ 且 $n \neq 6$ 时,容易验证结果是成立的,且当 $n = 5$ 时,有 $\phi(C_5) = \phi(P_4) + 1$. 下面假设 $n \geqslant 11$ 且定理对 $n-1$ 阶的路和圈成立. 由定理 1 有

$$\phi(P_{n-1}) = \phi(P_{n-3}) + \phi(P_{n-4}) + \phi(P_{n-5}) - \phi(P_{n-7}), \tag{4}$$

$$\phi(C_{n-1}) = \phi(C_{n-3}) + \phi(C_{n-4}) + \phi(C_{n-5}) - \phi(C_{n-7}). \tag{5}$$

另外,根据归纳假设,定理对 $n-1$ 阶的路和圈成立,所以

$$\phi(C_{n-2}) \geqslant \phi(P_{n-3}) + 1,\ \phi(C_{n-3}) \geqslant \phi(P_{n-4}) + 1,\ \phi(C_{n-4}) \geqslant \phi(P_{n-5}) + 1,\ \varphi(C_{n-6}) \geqslant \phi(P_{n-7}) + 1. \tag{6}$$

首先,对 n 用归纳法来证明以下结果成立:

$$\phi(C_n) - \phi(C_{n-4}) > \phi(P_{n-1}) - \phi(P_{n-5}). \tag{7}$$

根据归纳假设,式(7)对至多 $n-1(n \geqslant 11)$ 个点都成立,所以有

$$\phi(C_{n-2}) - \phi(C_{n-6}) > \phi(P_{n-3}) - \phi(P_{n-7}).$$

式(4)可变形得

$$\phi(P_{n-1}) - \phi(P_{n-5}) = \phi(P_{n-3}) + \phi(P_{n-4}) - \phi(P_{n-7}),$$

结合定理 1、式(5)和(6),有

$$\phi(C_n) - \phi(C_{n-4}) = \phi(C_{n-2}) + \phi(C_{n-3}) - \phi(C_{n-6}) = \phi(C_{n-2}) - \phi(C_{n-6}) + \phi(C_{n-3}) > \phi(P_{n-3}) - \phi(P_{n-7}) + \phi(P_{n-4}) + 1 = \phi(P_{n-1}) - \phi(P_{n-5}) + 1 > \phi(P_{n-1}) - \phi(P_{n-5}),$$

即证得

$$\phi(C_n) - \phi(C_{n-4}) > \phi(P_{n-1}) - \phi(P_{n-5}).$$

再次回到定理的证明中. 由式(6)还可得到

$$\phi(C_{n-3}) + \phi(C_{n-4}) \geqslant \phi(P_{n-4}) + \phi(P_{n-5}) + 2.$$

结合定理 1 和式(7),得

$$\phi(C_n) = \phi(C_{n-2}) + \phi(C_{n-3}) + \phi(C_{n-4}) - \phi(C_{n-6}) = \phi(C_{n-2}) - \phi(C_{n-6}) + \phi(C_{n-3}) + \phi(C_{n-4}) > \phi(P_{n-3}) - \phi(P_{n-7}) + \phi(P_{n-4}) + \phi(P_{n-5}) + 2 = \phi(P_{n-1}) + 2 > \phi(P_{n-1}) + 1,$$

定理 2 证毕.

参考文献:

[1] BONDY J A, MURTY U S R. Graph theory with application[M]. Amsterdam: Elsevier, 1976.

[2] 徐保根. 图的控制与染色理论[M]. 武汉:华中科技大学出版社,2013.

[3] YANNAKAKIS M. Node-deletion problems on bipartite graphs[J]. SIAM Journal on Computing, 1981, 10: 310-327.

[4] TU J H, XIAO J Y, LIANG R L. Counting the number of dissociation sets in cubic graphs[J]. AIMS Mathematics, 2023, 8(5): 10021-10032.

[5] BOCK F, PARDEY J, PENSO L D, et, al. Relating dissociation, independence, and matchings[J]. Discrete Applied Mathematics, 2022, 322: 160-165.

[6] TU J H, LI Y X, DU J F. Maximal and maximum dissociation sets in general and triangle-free graphs[J]. Applied Mathematics Computation, 2022, 426: 127107.

[7] ZHANG J X, QIAN J G, HUANG S M. Minimum number of maximal dissociation sets of trees[J]. Discrete Applied Mathematics, 2024, 346: 272-278.

[8] 李雨欣,苏贵福. 最大度至多为 3 的图上极大分离集的最大数目[J]. 北京化工大学学报(自然科学版),2022,49(3):102-107.

[9] TU J H, ZHANG Z P, SHI Y T. The maximum number of maximum dissociation sets in trees[J]. Journal of Graph Theory, 2021, 96: 472-489.

(责任编辑:汪　军)

http://jxmu.xmu.edu.cn