第 64 卷 第 2 期 厦门大学学报(自然科学版) Vol. 64 No. 2
2025 年 3 月 Journal of Xiamen University (Natural Science) Mar. 2025
doi:10.6043/j.issn.0438-0479.202401019

最大度为 3 的毛毛虫树的 $L(3,2,1)$-标号

张小玲
(集美大学师范学院,福建 厦门 361021)

摘要:[**目的**] 对最大度为 3 的毛毛虫树的 $L(3,2,1)$-标号问题进行研究.[**方法**] 根据对毛毛虫树的最大度为 3 的点间距离进行分类,得到其可能的标号类型.利用这些可能的标号类型,通过拼接技术对最大度为 3 的毛毛虫树的 $L(3,2,1)$ 标号数进行完全刻画.[**结果**] 完全确定了最大度为 3 的毛毛虫树的 $L(3,2,1)$ 标号数.[**结论**] 本文的研究工作是先前文章《毛毛虫树的 $L(3,2,1)$-标号问题》的一个延续.前文纠正了 Clipperton 在 2008 年发表的关于毛毛虫树的一个错误结果,并完全确定了最大度不小于 4 的毛毛虫树的 $L(3,2,1)$ 标号数.本文则完全确定了最大度为 3 的毛毛虫树的 $L(3,2,1)$ 标号数.这样对于毛毛虫树的 $L(3,2,1)$-标号就得到了完全的刻画.

关键词:频率分配;$L(3,2,1)$-标号;毛毛虫树

中图分类号:O 157.5 **文献标志码:**A **文章编号:**0438-0479(2025)02-0356-06

$L(3,2,1)$-labeling of caterpillars with the maximum degree 3

ZHANG Xiaoling
(Teachers College, Jimei University, Xiamen 361021, China)

Abstract: [**Objective**] As a generalization of distance two labeling, multilevel distance labeling is motivated by the channel assignment problem. More recently, researchers began to investigate the $L(3,2,1)$-labeling problem. For example, Clipperton et al. proved that the $L(3,2,1)$-labeling number of a caterpillar with maximum degree Δ can secure one of two values: $2\Delta+1$ and $2\Delta+2$. Furthermore, we provide a complete characterization of the $L(3,2,1)$-labeling of caterpillars with $\Delta\geqslant 4$. As a continuation of previous research, we determine the $L(3,2,1)$-labeling number of caterpillars with the maximum degree 3. [**Methods**] Let f be a 7-$L(3,2,1)$-labeling of a caterpillar T with the maximum degree 3. Based on the distance of two 3-vertex in T, we obtain their possible types, i.e. XX-type and XY-type, where $X,Y\in\{A,B,C\}$. Using these possible types, the $L(3,2,1)$-labeling number of caterpillars with the maximum degree 3 is obtained through concatenation. [**Results**] In this article, we obtain that the $L(3,2,1)$-labeling number of caterpillars with the maximum degree 3 depends on the type of T. The result is presented below. Let T be a caterpillar with the maximum degree 3 and $a_1a_2\cdots a_{k-1}$ be the type of T. Then the $L(3,2,1)$-labeling number of T is 8 if and only if T contains one of following configurations given below. (C1) There is $a_i=2$ for some $i\in[1,k-1]$. (C2) There is $a_i=a_j=1$ such that $a_l\in\{4,5,6,7,10\}$ (if exists) for all $l\in[i+1,j-1]$ and the number of consecutive 5 and the number of consecutive 7 in the set $\{a_l\mid l\in[i+1,j-1]\}$ are always even. (C3) There is $a_i=a_j=3$ such that $a_l\in\{4,7,8\}$ (if exists) for all $l\in[i+1,j-1]$ and the number of consecutive 7 in the set $\{a_l\mid l\in[i+1,j-1]\}$ is always even. (C4) There is $a_i=1, a_j=3$ or $a_i=3, a_j=1$ such that $a_l\in\{4,7\}$ for all $l\in[i+1,j-1]$ and the number of 7 in the set $\{a_l\mid l\in[i+1,j-1]\}$ is odd. [**Conclusion**] The result in the present article constitutes a continuation of the previous article entitled "The $L(3,2,1)$-labeling problem on caterpillars". The previous article corrected an erroneous result about $L(3,2,1)$-labeling of caterpillars published by Clipperton in 2006 and provided a complete characterization of the $L(3,2,1)$-labeling of caterpillars with $\Delta\geqslant 4$. In this article, we completely determine the $L(3,2,1)$-labeling

收稿日期:2024-01-16 **录用日期:**2024-12-30
基金项目:国家自然科学基金(12271210,11601265);集美大学科研启动基金(Q202201)
Email:xml000999@163.com
引文格式:张小玲.最大度为 3 的毛毛虫树的 $L(3,2,1)$-标号[J].厦门大学学报(自然科学版),2025,64(2):356-360.
Citation: ZHANG X L. $L(3,2,1)$-labeling of caterpillars with the maximum degree 3[J]. J Xiamen Univ Nat Sci, 2025, 64(2): 356-360. (in Chinese)

number of caterpillars with the maximum degree 3. Thus, the $L(3,2,1)$-labeling of caterpillars is fully characterized.

Keywords: channel assignment; $L(3,2,1)$-labeling; caterpillar

图的距离标号问题源于无线电网络中的频率分配问题,即给每个无线电发射台分配一个频率,使得相互干扰的无线电发射台所分配的频率间隔落在允许的范围之内.关于频率分配问题的研究已有数十年的历史,Hale[1]于 1980 年首次将此问题归结成图的 T-着色问题. 1992 年,Griggs 和 Yeh[2]将该问题抽象为图的距离 2 标号问题,并把它推广到更一般的距离 $p(p\geqslant 3)$标号问题.对于给定的正整数 $k_1,k_2,\cdots,k_p$,图 G 的 $L(k_1,k_2,\cdots,k_p)$-标号是指从顶点集 $V(G)$到非负整数集的一个映射 f,满足:对于任意两个不同顶点 u 和 v,若 $d(u,v)=i(i=1,2,\cdots,p)$,则 $|f(u)-f(v)|\geqslant k_i$.若图 G 的一个 $L(k_1,k_2,\cdots,k_p)$-标号中的所有像元素都不超过整数 k,则称 f 为图 G 的 k-$L(k_1,k_2,\cdots,k_p)$-标号.图 G 的 $L(k_1,k_2,\cdots,k_p)$标号数,记作 $\lambda_{k_1,k_2,\cdots,k_p}(G)$,是使得图 G 存在 k-$L(k_1,k_2,\cdots,k_p)$-标号的最小整数 k.

对于 $p=3$ 及$(k_1,k_2,k_3)=(3,2,1)$,邵振东等[3]研究了 Kneser、Halin 等图的 $L(3,2,1)$-标号,并给出这些图类的 $L(3,2,1)$标号数的上下界. Wang 等[4]完全确定了顶点数不超过 10 的 $L(3,2,1)$标号数. Clipperton 等[5]得到了路、圈、n-元树、完全图及完全二部图的 $L(3,2,1)$标号数.同时也证明了对任意最大度至少为 3 的毛毛虫树 T,有 $2\Delta+1\leqslant\lambda_{3,2,1}(T)\leqslant 2\Delta+2$.且若 T 中任意 4 个连续的脊椎点至多包含两个 Δ-点,则 $\lambda_{3,2,1}(T)=2\Delta+1$.但这个关于下界的刻画性结果是错误的.我们纠正了这个错误,并完全确定了最大度至少为 4 的毛毛虫树的 $L(3,2,1)$标号数[6].对于最大度为 3 的毛毛虫树,情况则更为复杂.本文在已有研究的基础上,对最大度为 3 的毛毛虫树的 $L(3,2,1)$-标号进行了完全刻画.

1　已知结果

在下文中假设 T 是一棵直径至少为 3 的树或毛毛虫树.对于任意非负整数 $i,j(i<j)$,用$[i,j]$表示集合$\{i,i+1,\cdots,j-1,j\}$. $O_{[i,j]}$和 $E_{[i,j]}$分别表示$[i,j]$中所有奇数和所有偶数构成的集合.若 $d(v)=k$,则称 v 为 k-点,其中 $d(v)$表示点 v 的度.

引理 1　若 f 是G 的一个 k-$L(3,2,1)$-标号,则映射 f':$V(G)\to[0,k]$也是 G 的 k-$L(3,2,1)$-标号,其中 $f'(v)=k-f(v)$.

设 f 是 T 的一个 $L(3,2,1)$-标号且 $S\subseteq V(T)$,定义 $\tilde{f}(S)=\{f(v)\,|\,v\in S\}$.

引理 2[4]　设 T 是一棵树,则 $2\Delta+1\leqslant\lambda_{3,2,1}(T)\leqslant 2\Delta+3$.进一步地,若 $\lambda_{3,2,1}(T)=2\Delta+1$ 且 f 是 T 的一个$(2\Delta+1)$-$L(3,2,1)$-标号,则对于 T 的每个 Δ-点 v,均有 $f(v)\in\{0,2\Delta+1\}$.当 $f(v)=0$ 时,有 $\tilde{f}(N(v))=O_{[3,2\Delta+1]}$.当 $f(v)=2\Delta+1$ 时,有 $\tilde{f}(N(v))=E_{[0,2\Delta-2]}$.

根据引理 2,不难得到下面的定理 1.

定理 1[6]　设 T 是一棵树.若 T 中存在两个距离为 2 的 Δ-点,则 $\lambda_{3,2,1}(T)\geqslant 2\Delta+2$.

毛毛虫树是指去掉悬挂点和与其关联的悬挂边后只剩下一条路(记为 $P=v_1v_2\cdots v_n$)的树,其中 P 称为毛毛虫树的脊椎,v_i 称为毛毛虫树的脊椎点. Clipperton 等[5]研究了毛毛虫树的 $L(3,2,1)$-标号,并给出如下结果.

定理 2[5]　设 T 是一棵毛毛虫树且 $\Delta\geqslant 3$,则 $2\Delta+1\leqslant\lambda_{3,2,1}(T)\leqslant 2\Delta+2$.若 T 中任意四个连续的脊椎点至多包含两个 Δ-点,则 $\lambda_{3,2,1}(T)=2\Delta+1$.

注 1　定理 2 的后半部分是错误的.事实上,如果 T 只包含两个距离为 2 的 Δ-点,显然满足 T 中任意 4 个连续的脊椎点至多包含两个 Δ-点,但由定理 1 可得 $\lambda_{3,2,1}(T)\geqslant 2\Delta+2$.

基于定理 1 和定理 2,我们完全确定了最大度至少为 4 的毛毛虫树的 $L(3,2,1)$标号数.

定理 3[6]　设 T 是一棵毛毛虫树且 $\Delta\geqslant 4$.那么 $\lambda_{3,2,1}(T)=2\Delta+1$,当且仅当 T 中不存在两个距离为 2 的 Δ-点.

2　预备知识

引理 3　设 T 是一棵毛毛虫树且 $\Delta=3$,$v_1v_2\cdots v_n$ 是 T 的脊椎.设 f 是 T 的一个 7-$L(3,2,1)$-标号,那么

i) 若 $f(v_i)=0,i\in[3,n-2]$,则 $\tilde{f}(N(v_i))\subseteq\{3,5,7\}$.

ii) 若 $f(v_i)=1,i\in[2,n-1]$,则 $\tilde{f}(N(v_i))=\{4,6\}$.

iii) 若 $f(v_i)=2,i\in[1,n]$,则 $\tilde{f}(N(v_i))=\{5,7\}$.

iv) 若 $f(v_i)=3,i\in[4,n-3]$,则 $\tilde{f}(N(v_i))=\{0,6\}$.

证明　为方便起见,分别用 v_0 和 v_{n+1} 表示 v_1 和 v_n 的叶子邻点.

i) 如果 $f(v_i)=0$,那么$\tilde{f}(N(v_i))\subseteq\{3,4,5,6,7\}$. 首先,若 v_i 为 3-点,则由引理 2 可得$\tilde{f}(N(v_i))=\{3,5,7\}$,结论成立.下面假设 v_i 为 2-点,若 $f(v_{i+1})=4$,则 $f(v_{i+2})=7$.这也就意味着 $f(v_{i-1})=6$,$f(v_{i-2})\in\{2,3\}$.但此时点 v_{i-3}没有可行的标号.因此,$f(v_{i+1})\neq 4$.同理可证 $f(v_{i-1})\neq 4$.综上,$4\notin\tilde{f}(N(v_i))$.当 $f(v_{i+1})=6$ 时,可知 $f(v_{i+2})\in\{2,3\}$.但此时点 v_{i+3}没有可行的标号.故 $f(v_{i+1})\neq 6$.同理可证 $f(v_{i-1})\neq 6$.综上,$6\notin\tilde{f}(N(v_i))$.

ii) 当 $f(v_i)=1$ 时,我们有$\tilde{f}(N(v_i))\subseteq\{4,5,6,7\}$.首先,$5\notin\tilde{f}(N(v_i))$.否则点 v_{i-2}或点 v_{i+2}没有可行的标号.其次,若 $7\in\tilde{f}(N(v_i))$,则$\tilde{f}(N(v_i))=\{4,7\}$.不失一般性,假设 $f(v_{i+1})=4$.但此时点 v_{i+2}没有可行的标号,故 $7\notin\tilde{f}(N(v_i))$.因而,$\tilde{f}(N(v_i))=\{4,6\}$.

iii) 不难验证,当 $f(v_i)=2$ 时,$\tilde{f}(N(v_i))=\{5,7\}$.

iv) 如果 $f(v_i)=3$,那么$\tilde{f}(N(v_i))\subseteq\{0,6,7\}$.进一步地,若 $f(v_{i+1})=7$,则 $f(v_{i-1})=0$,$f(v_{i+2})=1$,$f(v_{i+3})\in\{4,5\}$.但此时点 v_{i+4}没有可行的标号.故$\tilde{f}(N(v_i))=\{0,6\}$.

注 2 根据引理 1,不难得到引理 3 的对称情形:

i) 若 $f(v_i)=7$,$i\in[3,n-2]$,则$\tilde{f}(N(v_i))\subseteq\{0,2,4\}$.

ii) 若 $f(v_i)=6$,$i\in[2,n-1]$,则$\tilde{f}(N(v_i))=\{1,3\}$.

iii) 若 $f(v_i)=5$,$i\in[1,n]$,则$\tilde{f}(N(v_i))=\{0,2\}$.

iv) 若 $f(v_i)=4$,$i\in[4,n-3]$,则$\tilde{f}(N(v_i))=\{1,7\}$.

推论 1 设 T 是一棵毛毛虫树且$\Delta=3$,$v_1v_2\cdots v_n$是 T 的脊椎.设 f 是 T 的一个 7-$L(3,2,1)$-标号,v_i是一个 3-点且 $f(v_i)=0$,那么

i) 若 $f(v_{i+1})=3$,则 $f(v_i)f(v_{i+1})\cdots f(v_{i+5})=036147$.

ii) 若 $f(v_{i+1})=5$,则 $f(v_i)f(v_{i+1})\cdots f(v_{i+3})=0527$.

iii) 若$(f(v_{i+1}),f(v_{i+2}))=(7,2)$,则 $f(v_i)f(v_{i+1})\cdots f(v_{i+4})=07250$.

iv) 若$(f(v_{i+1}),f(v_{i+2}))=(7,4)$,则 $f(v_i)f(v_{i+1})\cdots f(v_{i+6})=0741630$.

证明 根据引理 3 及注 2 可直接验证结论成立.

注 3 设 v_i 是一个 3-点且 $f(v_i)=7$,根据引理 1,不难得到推论 1 的对称情形:

i) 若 $f(v_{i+1})=4$,则 $f(v_i)f(v_{i+1})\cdots f(v_{i+5})=741630$.

ii) 若 $f(v_{i+1})=2$,则 $f(v_i)f(v_{i+1})\cdots f(v_{i+3})=7250$.

iii) 若$(f(v_{i+1}),f(v_{i+2}))=(0,5)$,则 $f(v_i)f(v_{i+1})\cdots f(v_{i+4})=70527$.

iv) 若$(f(v_{i+1}),f(v_{i+2}))=(0,3)$,则 $f(v_i)f(v_{i+1})\cdots f(v_{i+6})=7036147$.

设 T 是一棵毛毛虫树且$\Delta=3$,$v_1v_2\cdots v_n$ 是 T 的脊椎.按自然顺序,称 v_{i-1}和 v_{i+1}分别为 v_i 的左邻点和右邻点,并分别记为 v_i^{l} 和 v_i^{r}.设 $v_{i_1},v_{i_2},\cdots,v_{i_k}$($i_1<i_2<\cdots<i_k$)为脊椎上的所有 3-点,$a_j=d(v_{i_j},v_{i_{j+1}})$($j=1,2,\cdots,k-1$)表示相邻两个 3-点 v_{i_j}和 $v_{i_{j+1}}$的距离,则称 $a_1a_2\cdots a_{k-1}$为 T 的类型.

设 f 是 T 的一个 7-$L(3,2,1)$-标号,若$(f(v_{i_j}),f(v_{i_j}^{\mathrm{r}}))=(0,7)$或$(7,0)$,则称 v_{i_j}的右侧在 f 下为 A-型;同理,若$(f(v_{i_j}^{\mathrm{l}}),f(v_{i_j}))=(0,7)$或$(7,0)$,则称 v_{i_j}的左侧在 f 下为 A-型.类似地,若$(f(v_{i_j}),f(v_{i_j}^{\mathrm{r}}))=(0,5)$或$(7,2)$,则称 v_{i_j} 的右侧在 f 下为 B-型;若$(f(v_{i_j}^{\mathrm{l}}),f(v_{i_j}))=(5,0)$或$(2,7)$,则称 v_{i_j} 的左侧在 f 下为 B-型.若$(f(v_{i_j}),f(v_{i_j}^{\mathrm{r}}))=(0,3)$或$(7,4)$,则称 v_{i_j}的右侧在 f 下为 C-型;若$(f(v_{i_j}^{\mathrm{l}}),f(v_{i_j}))=(3,0)$或$(4,7)$,则称 v_{i_j}的左侧在 f 下为 C-型.

对于给定的 3-点 v_{i_j},记 $V_j=\{v_l\mid l\in[i_j,i_{j+1}]\}$,$f(V_j)=f(v_{i_j})\cdots f(v_{i_{j+1}})$.设 f 是 $T[V_j]$(这里 $T[V_j]$表示 V_j 的导出子图)的一个 7-$L(3,2,1)$-标号,满足:v_{i_j}的右侧在 f 下为 X-型,$v_{i_{j+1}}$的左侧在 f 下为 Y-型,则称 $T[V_j]$在 f 下为 XY-型,其中 $X,Y\in\{A,B,C\}$.显然,若 $T[V_j]$在 f 下为 XY-型,则 $T[V_j]$在 f^{-1}下为 YX-型,其中 $f^{-1}(v_{i_{j+1}-t})=f(v_{i_j+t})$,$t=0,1,\cdots,\frac{i_{j+1}-i_j}{2}$.设 f_1,f_2 分别为 $T[V_j]$和 $T[V_{j+1}]$的 7-$L(3,2,1)$-标号,满足:$T[V_j]$在 f_1 下为 X_1X_2-型,$T[V_{j+1}]$在 f_2 下为 X_3X_4-型,其中 $X_i\in\{A,B,C\}$.不难验证,当 $X_2\neq X_3$ 时,$f_1\cup f_2$ 是 $T[V_j\cup V_{j+1}]$的一个 7-$L(3,2,1)$-标号,其中当 $v\in V_j$ 时,$(f_1\cup f_2)(v)=f_1(v)$,当 $v\in V_{j+1}$时,$(f_1\cup f_2)(v)=f_2(v)$.此时我们称 $T[V_j]$与 $T[V_{j+1}]$可以恰当衔接,且 $T[V_j\cup V_{j+1}]$在 $f_1\cup f_2$下为 $X_1X_2X_3X_4$-型,简记为 X_1X_4-型.

设 f 是 T 的一个 7-$L(3,2,1)$-标号,根据推论 1 和注 3,不难验证下面的事实 1~4 成立.

事实 1. 若 $a_j=1$,则 $f(V_j)=07$,即 $T[V_j]$在 f 下为 AA-型.

若 $a_j=3$,则 $f(V_j)=0527$,即 $T[V_j]$在 f 下为 BB-型.

事实2. 若$a_j=4$，则$f(V_j)=05270$，即$T[V_j]$在f下为AB-型.

若$a_j=6$，则$f(V_j)=0361470$，即$T[V_j]$在f下为AC-型.

事实3. 若$a_j=5$，则$f(V_j)=036147$或072507，即$T[V_j]$在f下为AA-型或CC-型.

若$a_j=7$，则$f(V_j)=05270527$或07416307，即$T[V_j]$在f下为AA-型或BB-型.

事实4. 若$a_j=8$，则$f(V_j)=052705270$或036147250，即$T[V_j]$在f下为AB-型或BC-型.

若$a_j=9$，则9可以分成$\{1,8\}$或$\{3,6\}$或$\{4,5\}$. 根据事实1～4，这意味着$T[V_j]$在f下为$AABA$-型或$AABC$-型或$AACB$-型或$BBAC$-型或$BBCA$-型或$CCAB$-型或$CCBA$-型，简记为AB-型或AC-型或BC-型或AA-型.

当$a_j\geqslant 10$时，可以做类似的讨论. 因而，可以验证下面的事实5～9成立.

事实5. 若$a_j=9$，则$T[V_j]$在f下为AB-型或AC-型或BC-型或AA-型.

若$a_j=12$，则$T[V_j]$在f下为AB-型或AC-型或BC-型或BB-型.

事实6. 若$a_j=10$，则$T[V_j]$在f下为AA-型或AB-型或AC-型.

事实7. 若$a_j=11$，则$T[V_j]$在f下为AA-型或BB-型或CC-型.

事实8. 若$a_j=14$，则$T[V_j]$在f下为AB-型或AC-型或BC-型或AA-型或CC-型.

若$a_j=16$，则$T[V_j]$在f下为AB-型或AC-型或BC-型或AA-型或BB-型.

事实9. 若$a_j=\{13,15,17,18,19,\cdots\}$，则$T[V_j]$在$f$下为$AB$-型或$AC$-型或$BC$-型或$XX$-型，其中$X\in\{A,B,C\}$.

3　主要结果

本节我们将完全确定最大度为3的毛毛虫树的$L(3,2,1)$标号数.

定理4　设T是一棵毛毛虫树且$\Delta=3$，$a_1a_2\cdots a_{k-1}$为T的类型. 那么$\lambda_{3,2,1}(T)=8$，当且仅当T包含(C1)～(C4)的构型之一.

(C1) 存在某个$i\in[1,k-1]$，使得$a_i=2$.

(C2) 存在$a_i=a_j=1$，使得对所有的$l\in[i+1,j-1]$，均有$a_l\in\{4,5,6,7,10\}$且序列$a_{i+1}a_{i+2}\cdots a_{j-1}$中出现的连续5(若存在)和连续7(若存在)的数目均为偶数.

(C3) 存在$a_i=a_j=3$，使得对所有的$l\in[i+1,j-1]$，均有$a_l\in\{4,7,8\}$且序列$a_{i+1}a_{i+2}\cdots a_{j-1}$中出现的连续7(若存在)的数目均为偶数.

(C4) 存在“$a_i=1,a_j=3$”或“$a_i=3,a_j=1$”，使得对所有的$l\in[i+1,j-1]$，均有$a_l\in\{4,7\}$且序列$a_{i+1}a_{i+2}\cdots a_{j-1}$中出现的7的总数为奇数.

证明(充分性)　反证法，设T包含(C1)～(C4)的构型之一且T存在一个7-$L(3,2,1)$-标号f.

(C1) 由定理1和定理2，可知$\lambda_{3,2,1}(T)=2\Delta+2=8$，矛盾.

(C2) 首先，由于$a_i=a_j=1$，故$T[V_i]$和$T[V_j]$在f下均为AA-型. 其次，偶数个连续5(若存在)在f下一定为$\underline{AACC}\cdots\underline{AACC}$-型(简记为$AC$-型). 类似地，偶数个连续7(若存在)在$f$下一定为$\underline{AABB}\cdots\underline{AABB}$-型(简记为$AB$-型). 除此之外，若$a_l\in\{4,6,10\}$，则根据事实2和6，可知$T[V_l]$在$f$下为$AA$-型或$AB$-型或$AC$-型. 故$T[V_{i+1}\cup\cdots\cup V_{j-1}]$在$f$下一定为$AX$-型或$XA$-型，其中$X\in\{A,B,C\}$. 但此时$T[V_{i+1}\cup\cdots\cup V_{j-1}]$就不能与$T[V_i]$和$T[V_j]$恰当衔接，矛盾.

(C3) 首先，由于$a_i=a_j=3$，故$T[V_i]$和$T[V_j]$在f下均为BB-型. 其次，偶数个连续7(若存在)在f下一定为$\underline{AABB}\cdots\underline{AABB}$-型(简记为$AB$-型). 此外，当$a_l\in\{4,8\}$时，根据事实2和4可知，$T[V_l]$在$f$下为$AB$-型或$BC$-型. 因而，$T[V_{i+1}\cup\cdots\cup V_{j-1}]$在$f$下一定为$BX$-型或$XB$-型，其中$X\in\{A,B,C\}$. 但此时$T[V_{i+1}\cup\cdots\cup V_{j-1}]$就不能与$T[V_i]$和$T[V_j]$恰当衔接，矛盾.

(C4) 当$a_i=1,a_j=3$时，$T[V_i]$在f下为AA-型，而$T[V_j]$在f下为BB-型. 若$a_l\in\{4,7\}$，则根据事实2和3可知，$T[V_l]$在f下为AA-型或AB-型或BB-型. 另一方面，由于序列$a_{i+1}a_{i+2}\cdots a_{j-1}$中出现的7的总数为奇数，故$T[V_{i+1}\cup\cdots\cup V_{j-1}]$在$f$下一定为$AA$-型或$BB$-型. 但此时$T[V_{i+1}\cup\cdots\cup V_{j-1}]$不能与$T[V_i]$和$T[V_j]$恰当衔接，矛盾. 当$a_i=3,a_j=1$时，可做类似的讨论.

(必要性)　反证法，设T不包含(C1)～(C4)的构型. 下面将通过给所有$T[V_l]$，$l\in[1,k-1]$分配一个恰当的标号，以此来构造T的一个7-$L(3,2,1)$-标号. 在不引起混淆的情况下，将用片段的类型来表示片段的标号.

令$S=\{l|a_l=1\text{或}3,l\in[1,k-1]\}$. 由事实1～9，不难发现，若$a_l\notin\{1,3\}$，则$T[V_l]$至少有两种类型(此时$XY$-型和$YX$-型被看成两种不同的类型，其中$X\neq Y$). 因此，若对任意$l\in[1,k-1]$，均有$a_l\notin\{1,

3}，则我们总可以给出恰当的分配使得对所有的 $l\in[1,k-1]$，$T[V_l]$和 $T[V_{l+1}]$均可以恰当衔接，即可得到 T 的一个 7-$L(3,2,1)$-标号. 接下来只需说明下面三种情形也存在合适的分配. 设 $i,j\in S$ 且$[i+1,j-1]\cap S=\varnothing$.

情形 1. $a_i=a_j=1$.

因为 T 不包含(C2)，故总存在 $l_0\in[i+1,j-1]$，使得 $a_{l_0}\in\{8,9,11,12,\cdots\}$或者序列 $a_{i+1}a_{i+2}\cdots a_{j-1}$中出现奇数个连续 5 或奇数个连续 7. 首先，如果 $a_{l_0}\in\{8,9,11,12,\cdots\}$，则分配 BB-型或 BC-型或 CC-型给 $T[V_{l_0}]$. 其次，分别分配$\underline{AACC}\cdots\underline{AACC}$-型(简记为 AC-型)和 $CC\underline{AACC}\cdots\underline{AACC}$-型(简记为 CC-型)给偶数个连续 5(若存在)和奇数个连续 5(若存在)；分别分配$\underline{AABB}\cdots\underline{AABB}$-型(简记为 AB-型)和 $BB\underline{AABB}\cdots\underline{AABB}$-型(简记为 BB-型)给偶数个连续 7(若存在)和奇数个连续 7(若存在). 最后，若 $a_{l_0}\in\{4,6,10\}$，则分配 AB-型或 AC-型给 $T[V_{l_0}]$. 接下来，我们将通过恰当的替换使得 $T[V_{i+1}\cup\cdots\cup V_{j-1}]$为 BB-型或 BC-型或 CC-型.

首先，我们将连续 5 和连续 7 看成一个整体. 其次，设 $T[V_{i+1}\cup\cdots\cup V_{i+s}]$为 $AX_1AX_2\cdots AX_t$-型且 $T[V_{i+s+1}]$为 BX-型或 CX-型，其中 $X_1,\cdots,X_t\in\{B,C\}$，$X\in\{A,B,C\}$. 因为连续 5 和连续 7 被看成一个整体，故 $t\leqslant s$. 根据上述分配，注意到 $T[V_{i+s+1}]$一定存在. 现对所有的 $l\in[1,t]$，用 X_lA-型替换 AX_l-型，即把 $T[V_{i+1}\cup\cdots\cup V_{i+s}]$的类型替换为 $X_1AX_2A\cdots X_tA$-型. 因而，可以得到 $T[V_{i+1}\cup\cdots\cup V_{j-1}]$的一个 7-$L(3,2,1)$-标号，使得 $T[V_{i+1}]$不为 AX-型. 在上述替换的基础上，若 $T[V_{j-1}]$为 XA-型，则可以做类似的替换使得 $T[V_{j-1}]$不为 XA-型. 根据上述分配，由于一定存在$T[V_{i+1}\cup\cdots\cup V_{j-1}]$的某个片段为 BB-型或 BC-型或 CC-型，故在做替换使得 $T[V_{j-1}]$不为 XA-型的同时可以保证 $T[V_{i+1}]$不为 AX-型. 综上，$T[V_{i+1}\cup\cdots\cup V_{j-1}]$为 BB-型或 BC-型或 CC-型，故可以与 $T[V_i]$和 $T[V_j]$恰当衔接.

情形 2. $a_i=a_j=3$.

因为 T 不包含(C3)，故总存在某个 $l_0\in[i+1,j-1]$，使得 $a_{l_0}\in\{5,6,9,10,11,12,\cdots\}$或者序列 $a_{i+1}a_{i+2}\cdots a_{j-1}$中出现奇数个连续 7. 当 $a_{l_0}\in\{5,6,9,10,11,12,\cdots\}$时，则分配 AA-型或 AC-型或 CC-型给 $T[V_{l_0}]$. 其次，分别分配$\underline{AABB}\cdots\underline{AABB}$-型(简记为 AB-型)和 $AA\underline{BBAA}\cdots\underline{BBAA}$-型(简记为 AA-型)给偶数个连续 7(若存在)和奇数个连续 7(若存在). 最后，若 $a_{l_0}\in\{4,8\}$，则分配 AB-型或 BC-型给 $T[V_{l_0}]$. 类似于情形 1，我们总可以做恰当的替换使得 $T[V_{i+1}]$不为 BX-型且 $T[V_{j-1}]$不为 XB-型，即 $T[V_{i+1}\cup\cdots\cup V_{j-1}]$为 AA-型或 AC-型或 CC-型. 因此，可以与 $T[V_i]$和$T[V_j]$恰当衔接.

情形 3. $a_i=1,a_j=3$ 或 $a_i=3,a_j=1$.

因为 T 不包含(C4)，故存在某个 $l_0\in[i+1,j-1]$，使得 $a_{l_0}\in\{5,6,8,9,10,11,12,\cdots\}$或者序列 $a_{i+1}a_{i+2}\cdots a_{j-1}$中出现偶数个 7. 现在只需说明我们可以做恰当的分配使得 $T[V_{i+1}\cup\cdots\cup V_{j-1}]$不为 AA-型或 BB-型，分下面两种情形考虑.

情形 3.1. 存在某个 $l_0\in[i+1,j-1]$，使得 $a_{l_0}\in\{5,6,8,9,10,11,12,\cdots\}$.

首先，若 $a_{l_0}\in\{5,6,8,9,10,11,12,\cdots\}$，则分配 AC-型或 BC-型或 CC-型给 $T[V_{l_0}]$. 其次，若 $a_{l_0}\in\{4,7\}$，则分配 AB-型或 AA-型或 BB-型给 $T[V_{l_0}]$.

反证，假设在上述分配下 $T[V_{i+1}\cup\cdots\cup V_{j-1}]$为 AA-型，其中 $T[V_{i+1}]$为 AX-型，而 $T[V_{j-1}]$为 YA-型. 若 $X=C(Y=C)$，则重新分配 CA-型(AC-型)给 $T[V_{i+1}]$($T[V_{j-1}]$). 对所有 $l\in[i+2,j-1]$($l\in[i+1,j-2]$)，由于 $T[V_l]$至少有两种类型，故可以重新分配(如果需要)$T[V_l]$的类型使得相邻两个片段可以恰当衔接. 此时，$T[V_{i+1}\cup\cdots\cup V_{j-1}]$不为 AA-型. 接下来考虑 $X,Y\in\{A,B\}$. 根据初始分配，一定存在某个 $T[V_{l_0}]$($l_0\in[i+1,j-1]$)的类型为 AC-型或 BC-型或 CC-型. 不失一般性，设对所有 $l\in[i+1,l_0-1]$，$T[V_l]$为 AA-型或 BB-型或 AB-型，而 $T[V_{l_0}]$为 CX-型，则此时将 $T[V_l]$($l\in[i+1,l_0-1]$)中的 AA-型与 BB-型互换，AB-型与 BA-型互换，这样可以得到 $T[V_{i+1}\cup\cdots\cup V_{j-1}]$的一个 7-$L(3,2,1)$-标号，使得 $T[V_{i+1}\cup\cdots\cup V_{j-1}]$不为 AA-型. 当 $T[V_{i+1}\cup\cdots\cup V_{j-1}]$为 BB-型时，可做类似的讨论.

情形 3.2. 对所有的 $l\in[i+1,j-1]$，$a_l\in\{4,7\}$且序列 $a_{i+1}a_{i+2}\cdots a_{j-1}$中 7 的数目为偶数.

对于所有的 $l\in[i+1,j-1]$，分配 AB-型或 AA-型或 BB-型给 $T[V_l]$. 因为序列 $a_{i+1}a_{i+2}\cdots a_{j-1}$中 7 的数目为偶数，故当 $a_i=3,a_j=1$ 时，$T[V_{i+1}\cup\cdots\cup V_{j-1}]$一定为 AB-型；当 $a_i=1,a_j=3$ 时，$T[V_{i+1}\cup\cdots\cup V_{j-1}]$一定为 BA-型. 因此，$T[V_{i+1}\cup\cdots\cup V_{j-1}]$可以与 $T[V_i]$和 $T[V_j]$恰当衔接.

综上，构造了 T 的一个 7-$L(3,2,1)$-标号. 故 $\lambda_{3,2,1}(T)=7$，矛盾.

[下转第 366 页]

参考文献:

[1] CHENG X Y, YAN X L. A multiplicity result of positive solutions for a class of multi-parameter ordinary differential systems[J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica, English Series, 2012, 28(4): 653-662.

[2] LEE Y H. Multiplicity of positive radial solutions for multiparameter semilinear elliptic systems on an annulus[J]. Journal of Differential Equations, 2001, 174(2): 420-441.

[3] XU S M, ZHANG G W. Positive solutions for a second-order nonlinear coupled system with derivative dependence subject to coupled Stieltjes integral boundary conditions[J]. Mediterranean Journal of Mathematics, 2022, 19(2): 1-23.

[4] MINHÓS F, DE SOUSA R. On the solvability of third-order three point systems of differential equations with dependence on the first derivative[J]. Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, New Series, Boletim da Sociedade Brasileira de Matemática, 2017, 48(3): 485-503.

[5] CIANCIARUSO F, PIETRAMALA P. Semilinear elliptic systems with dependence on the gradient[J]. Mediterranean Journal of Mathematics, 2018, 15(4): 1-13.

[6] DO Ó J M, LORCA S, UBILLA P. Local superlinearity for elliptic systems involving parameters[J]. Journal of Differential Equations, 2005, 211(1): 1-19.

[7] DO Ó J M, LORCA S, SÁNCHEZ J, et al. Positive solutions for a class of multiparameter ordinary elliptic systems[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2007, 332(2): 1249-1266.

[8] WANG K, YANG Z L. Positive solutions for a system of second-order boundary-value problems involving first-order derivatives[J]. Electronic Journal of Differential Equations, 2012, 135(1): 1-17.

[9] DE FEIREDO D G, UBILLA P. Superlinear systems of second-order ODE's[J]. Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications, 2008, 68(6): 1765-1773.

[10] DE FEIREDO D G, SÁNCHEZ J, UBILLA P. Quasilinear equations with dependence on the gradient[J]. Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications, 2009, 71(10): 4862-4868.

[11] WANG D, LI Y X, SU Y. Positive solutions for boundary value problems of a class of second-order differential equation system[J]. Open Mathematics, 2023, 21(1): 1-9.

[12] WEI M, LI Y X. Solvability for a fully elastic beam equation with left-end fixed and right-end simply supported[J]. Mathematical Problems in Engineering, 2021, 7(1): 1-9.

[13] LI Y X. Positive solutions for second order boundary value problems with derivative terms[J]. Mathematische Nachrichten, 2016, 289(16): 2058-2068.

[14] CONSTANTIN A. On a two-point boundary value problem[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1995, 193(1): 318-328.

[15] DUNNINGER D R, WANG H Y. Existence and multiplicity of positive solutions for elliptic systems[J]. Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications. An International Multidisciplinary Journal, 1997, 29(9): 1051-1060.

(责任编辑:汪　军)

[上接第 360 页]

4 结　语

Clipperton 等[5]证明了对任意最大度至少为 3 的毛毛虫树 T,有 $2\Delta+1\leqslant\lambda_{3,2,1}(T)\leqslant 2\Delta+2$. 且当 T 中任意 4 个连续的脊椎点至多包含两个 Δ-点时,有 $\lambda_{3,2,1}(T)=2\Delta+1$. 我们发现这个结果后半部分的刻画是错误的. 本文纠正了这一错误,并完全确定了最大度为 3 的毛毛虫树的 $L(3,2,1)$标号数.

参考文献:

[1] HALE W K. Frequency assignment: theory and applications[J]. Proc IEEE, 1980, 68: 1497-1514.

[2] GRIGGS J R, YEH R K. Labeling graph with a condition at distance two[J]. SIAM J Discrete Math, 1992, 5: 586-595.

[3] 邵振东. 关于几类图的 $L(3,2,1)$标号问题[J]. 曲阜师范大学报(自然科学版), 2004, 30: 24-28.

[4] WANG B, MA Z, WANG J, et al. $L(3,2,1)$-labeling of trees[J]. Journal of Computational and Theoretical Nanoscience, 2015, 12: 1006-1009.

[5] CLIPPERTON J. $L(d,2,1)$-labeling of simple graphs[J]. Rose-Hulman Undergraduate Mathematics Journal, 2008, 9: Article 2.

[6] 张小玲. 毛毛虫树的 $L(3,2,1)$-标号问题[J]. 厦门大学学报(自然科学版), 2022, 61(4): 694-696.

(责任编辑:汪　军)