第 64 卷 第 4 期 厦门大学学报(自然科学版) Vol. 64 No. 4
2025 年 7 月 Journal of Xiamen University (Natural Science) Jul. 2025

doi:10.6043/j.issn.0438-0479.202411010

两类几乎完全二部图的完美匹配数及其近似公式

储理才*,陈海燕
(集美大学理学院,福建 厦门 361021)

摘要:[**目的**]研究两类几乎完全二部图的完美匹配数.[**方法**]利用这两类图二部补图的匹配多项式以及图的完美匹配数的积分公式研究其完美匹配数.[**结果**]得到两类几乎完全二部图的完美匹配数的解析表达式及其近似计算公式.[**结论**]本文的方法适用于其他更多图类完美匹配数的研究,首先求其补图的匹配多项式,然后由积分公式得到其完美匹配数的解析表达式或近似计算公式.

关键词:完美匹配;几乎完全二部图;车多项式

中图分类号:O 157.5 **文献标志码**:A **文章编号**:0438-0479(2025)04-0699-04

Number of perfect matchings of two families of almost complete bipartite graphs and its approximated expressions

CHU Licai*, CHEN Haiyan
(School of Sciences, Jimei University, Xiamen 361021, China)

Abstract:[**Objective**] Herein we study the number of perfect matchings (NPM) for two families of almost complete bipartite graphs.[**Methods**] Using the matching polynomial of the bipartite complement of a graph and the integral formula of NPM, we carry out our study.[**Results**] For two families of almost complete bipartite graphs, both exact and approximated expressions of NPM are obtained, respectively.[**Conclusions**] The method used in this paper can be applied to study NPM of other families of graphs. Researchers can first obtain the matching polynomial of its complement, and then derive the exact expression or approximated expression of NPM from its integral formula.

Keywords: perfect matching; almost complete bipartite graph; rook polynomial

1 预备知识

图的完美匹配计数是匹配理论的一个重要组成部分,它与组合数学中棋盘的完美覆盖问题有关,同时在量子化学和统计物理学中都有非常重要的应用.在统计物理中,完美匹配被称为 dimer 构型[1],在量子化学中,完美匹配被称为 Kekulé 结构[2-3],所以图的完美匹配计数问题引起了众多数学家、物理学家和化学家的广泛关注[4-7].遗憾的是,Valiant[8]证明了对一般图而言,即使是二部图的完美匹配计数问题也是 NP-难的.目前关于完美匹配的计数主要集中在对一些特殊的图类给出其完美匹配数的解析表达式[9-10].本文主要讨论几乎完全二部图完美匹配数的解析表达式及其近似计算公式.下面首先给出本文所需的定义、符号以及已知结论.

本文中考虑的图都是有限的、无向简单图.令 $G=(V,E)$ 是顶点集为 V 边集为 E 的图.边集 $M\subseteq E$ 称为

收稿日期:2024-11-12 **录用日期**:2025-03-26
基金项目:国家自然科学基金(12271210,12071180)
*通信作者:chulc@jmu.edu.cn
引文格式:储理才,陈海燕.两类几乎完全二部图的完美匹配数及其近似公式[J].厦门大学学报(自然科学版),2025,64(4):699-702.
Citation: CHU L C, CHEN H Y. Number of perfect matchings of two families of almost complete bipartite graphs and its approximated expressions[J]. J Xiamen Univ Nat Sci, 2025, 64(4): 699-702. (in Chinese)

G 的一个匹配,如果 M 中没有两条边关联同一个顶点.若$|M|=k$,则称 M 是 G 的一个 k-匹配,G 中所有的 k-匹配的数目记做 $m(G,k)$.一个匹配 M 称为 G 的一个完美匹配,如果 G 的每个顶点都与 M 中的一条边相关联.G 的完美匹配数用 $M(G)$表示.如果图 G 的顶点集 V 可以划分成两个非空集合 V_1 和 V_2,使得同一集合中任意两个顶点都不相邻,则称 G 是二部图;进一步的,若位于不同集合的任意两个顶点都相邻,则称 G 是完全二部图,记做 K_{n_1,n_2},这里 $n_1=|V_1|$,$n_2=|V_2|$.设 H 是完全二部图 K_{n_1,n_2} 的一个生成子图,即 $V(H)=V(K_{n_1,n_2})$,$E(H)\subseteq E(K_{n_1,n_2})$,则顶点集为 $V(K_{n_1,n_2})$,边集为 $E(K_{n_1,n_2})-E(H)$的图称为 H 的二部补图,记做 H^*.完全二部图 K_{n_1,n_2} 的一个生成子图 H 称为几乎完全二部图,如果它的二部补图 H^* 的每个连通分支是树或者单圈图.本文主要讨论两类几乎完全二部图的完美匹配数的解析表达式及其近似计算方法.我们的讨论是基于下面优美的已知结论.

设 G 是完全二部图 $K_{n,n}$ 的一个生成子图,则 G 的车多项式定义为[6]

$$\rho(G,x)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k m(G,k)x^{n-k},$$

这里约定 $m(G,0)=1$.

引理 1[6] 设 G 是完全二部图 $K_{n,n}$ 的一个生成子图,则其二部补图 G^* 的完美匹配数 $M(G^*)$有如下的积分表示:

$$M(G^*)=\int_0^{\infty}\rho(G,x)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x.$$

2 两类几乎完全二部图的完美匹配数

设 G 是一个二部图,V_1 和 V_2 是它的二部顶点划分,若 $|V_1|\neq|V_2|$,则显然 $M(G)=0$.因此从这一部分开始,总是假定 $|V_1|=|V_2|=n$.给定一个图 G,t 个 G 的不交并图记做 tG.设 G 是完全二部图 $K_{n,n}$ 的一个生成子图,若其二部补图 G^* 有 t 个连通分支同构于 H,其他顶点都是孤立点,则记 $G=K_{n,n}-tH$.用 P_s,C_s 分别表示 s 个顶点的路和圈.这一部分,将利用引理 1 分别给出几乎完全二部图 $G_1(s)=K_{n,n}-sP_2(0\leqslant s\leqslant n)$,$G_2(t)=K_{n,n}-tC_4(0\leqslant 2t\leqslant n)$ 和 $G(s,t)=K_{n,n}-sP_2-tC_4(0\leqslant s+2t\leqslant n)$ 完美匹配数的解析表达式.首先需要下面的结论.

引理 2[6] 设 G 和 H 是两个顶点集不相交的二部图,则它们并图 $G\cup H$ 的车多项式

$$\rho(G\cup H,x)=\rho(G,x)\rho(H,x).$$

由引理 2,马上可以得到引理 3:

引理 3 对任意的非负整数 s,t 满足 $0\leqslant s+2t\leqslant n$,几乎完全二部图 $G(s,t)=K_{n,n}-sP_2-tC_4$ 二部补图 $G(s,t)^*$ 的车多项式为

$$\rho(G(s,t)^*,x)=x^{n-s-2t}(x-1)^s(x^2-4x+2)^t.$$

证明 由 $G(s,t)$ 的定义知,它的二部补图 $G(s,t)^*$ 有 s 个连通分支为 P_2,t 个连通分支为 C_4,剩下 $n-s-2t$ 对孤立点.很容易看出一对孤立点对应的车多项式为 x,并且 $\rho(P_2,x)=x-1$,$\rho(C_4,x)=x^2-4x+2$,所以由引理 2,结论得证.

由上面的引理和 $\int_0^{\infty}x^n\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=n!$,马上可以得到定理 1.

定理 1 对任意的整数 s 满足 $0\leqslant s\leqslant n$,几乎完全二部图 $G_1(s)=K_{n,n}-sP_2$ 的完美匹配数

$$M(G_1(s))=n!\sum\nolimits_{k=0}^{s}(-1)^k\frac{C_s^k}{\prod\nolimits_{j=0}^{k-1}(n-j)}.\quad(1)$$

证明 由引理 3,$\rho(G_1(s)^*,x)=x^{n-s}(x-1)^s$,再由引理 1,

$$\begin{aligned}M(G_1(s))&=\int_0^{\infty}x^{n-s}(x-1)^s\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=\\&\sum_{k=0}^{s}(-1)^kC_s^k\int_0^{\infty}x^{n-s+s-k}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=\\&\sum_{k=0}^{s}(-1)^kC_s^k(n-k)!=\\&n!\sum_{k=0}^{s}(-1)^k\frac{C_s^k}{\prod_{j=0}^{k-1}(n-j)}.\end{aligned}$$

证毕.

定理 2 对任意的整数 t 满足 $0\leqslant 2t\leqslant n$,几乎完全二部图 $G_2(t)=K_{n,n}-tC_4$ 的完美匹配数

$$M(G_2(t))=n!\sum\nolimits_{k=0}^{2t}(-1)^k\frac{\sum\nolimits_{l=0}^{t}C_t^lC_t^{k-l}\alpha^l\beta^{k-l}}{\prod\nolimits_{j=0}^{k-1}(n-j)},\quad(2)$$

这里 $\alpha=2+\sqrt{2}$,$\beta=2-\sqrt{2}$.

证明 由引理 3,$\rho(G_2(t)^*,x)=x^{n-2t}(x^2-4x+2)^t$,再由引理 1,

$$\begin{aligned}M(G_2(t))&=\int_0^{\infty}x^{n-2t}(x-\alpha)^t(x-\beta)^t\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=\\&\sum_{l_1=0}^{t}\sum_{l_2=0}^{t}(-1)^{l_1+l_2}C_t^{l_1}C_t^{l_2}\alpha^{l_1}\beta^{l_2}\int_0^{\infty}x^{n-l_1-l_2}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=\\&\sum_{l_1=0}^{t}\sum_{l_2=0}^{t}(-1)^{l_1+l_2}C_t^{l_1}C_t^{l_2}(n-l_1-l_2)!\alpha^{l_1}\beta^{l_2}=\\&\sum_{k=0}^{2t}(-1)^k(n-k)!\sum_{l=0}^{t}C_t^lC_t^{k-l}\alpha^l\beta^{k-l}=\end{aligned}$$

$$n!\sum_{k=0}^{2t}(-1)^k\frac{\sum_{l=0}^{t}C_t^lC_t^{k-l}\alpha^l\beta^{k-l}}{\prod_{j=0}^{k-1}(n-j)}.$$

证毕.

注 1　由定理 1 和定理 2 马上可得，

$M(G_1(0))=M(G_2(0))=M(K_{n,n})=n!$,

$M(G_1(1))=n!\left(1-\frac{1}{n}\right)=(n-1)\cdot(n-1)!$,

$M(G_1(2))=n!\left(1-\frac{2}{n}+\frac{1}{n(n-1)}\right)$,

$M(G_2(1))=n!\left(1-\frac{4}{n}+\frac{2}{n(n-1)}\right)$,

显然，当 s 和 t 很大时，由上面的公式计算精确值就变得非常困难，所以下面将讨论它们完美匹配数的近似计算公式，并给出对应的误差估计.

3　两类几乎完全二部图的完美匹配数的近似表达式

定理 3　对任意的整数 s 满足 $0\leqslant s\leqslant n$，

$$M(G_1(s))\approx\frac{\sum_{k=0}^{n-s}C_{n-s}^k(k+s)!}{\mathrm{e}},\tag{3}$$

绝对误差为

$$R_s\leqslant\frac{2^{n-s}}{s+1}.\tag{4}$$

证明　由引理 3 和引理 1，

$$M(G_1(s))=\int_0^\infty x^{n-s}(x-1)^s\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=\sum_{k=0}^{n-s}C_{n-s}^k\int_0^\infty(x-1)^{k+s}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=\sum_{k=0}^{n-s}C_{n-s}^k\left(\int_1^\infty(x-1)^{k+s}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x+\int_0^1(x-1)^{k+s}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x\right)=\frac{\sum_{k=0}^{n-s}C_{n-s}^k(k+s)!}{\mathrm{e}}+\sum_{k=0}^{n-s}C_{n-s}^k\int_0^1(x-1)^{k+s}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x.$$

又因为

$$\left|\int_0^1(x-1)^{k+s}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_0^1|(x-1)^{k+s}|\mathrm{d}x=\frac{1}{k+s+1},$$

所以

$$R_s=\left|\sum_{k=0}^{n-s}C_{n-s}^k\int_0^1(x-1)^{k+s}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x\right|\leqslant\sum_{k=0}^{n-s}C_{n-s}^k\frac{1}{k+s+1}\leqslant\frac{2^{n-s}}{s+1}.$$

结论得证.

以 $n=10$ 为例，$s=0,1,\cdots,10$，用式(1)计算 $M(G_1(s))$ 的精确值，用式(3)计算 $M(G_1(s))$ 的近似值，如表 1 所示.

表 1　$n=10$ 时 $M(G_1(s))$ 的近似计算及其误差

Tab. 1　Approximate calculation and its error of $M(G_1(s))$ when $n=10$

s	精确值	近似值	绝对误差	绝对误差限
0	3 628 800	9 864 101/e	0.036 461 3	1 024.00
1	3 265 920	8 877 691/e	0.003 972 74	256.000
2	2 943 360	8 000 882/e	0.000 961 348	85.333 3
3	2 656 080	7 219 974/e	0.000 392 343	32.000 0
4	2 399 760	6 523 224/e	0.000 243 859	12.800 0
5	2 170 680	5 900 520/e	0.000 220 919	5.333 33
6	1 965 624	5 343 120/e	0.000 288 043	2.285 71
7	1 781 802	4 843 440/e	0.000 547 411	1.000 00
8	1 616 786	4 394 880/e	0.001 584 45	0.444 444
9	1 468 457	3 991 680/e	0.007 735 22	0.200 000
10	1 334 961	3 628 800/e	0.083 877 1	0.090 909 1

注 2　注意到当 $s=n$ 时 $M(G_1(n))$ 就是 n 个元素排列的所有错排(即满足 $\pi(i)\neq i, i=1,2,\cdots,n$)的数目. 由定理 3，马上可得到错排的数目计数的近似公式：$M(G_1(n))\approx\frac{n!}{\mathrm{e}}$，绝度误差 $R_n\leqslant\frac{1}{n+1}<1$，这是已知的结论. 所以定理 3 推广了错排数目的近似表达式，如令 $k=n-1$，可得

$$M(G_1(n-1))\approx\frac{n!+(n-1)!}{\mathrm{e}},$$

绝对误差 $R_{n-1}\leqslant\frac{2}{n}<1$，如果 $n>2$；如令 $k=n-2$，可得

$$M(G_1(n-2))\approx\frac{n!+2(n-1)!+(n-2)!}{\mathrm{e}},$$

绝对误差 $R_{n-2}\leqslant\frac{4}{n-1}<1$，如果 $n>5$.

定理 4　设 $n=2m$ 是一个偶数，$\alpha=2+\sqrt{2}$，$\beta=2-\sqrt{2}$ 是二次多项式 x^2-4x+2 的两个根. 则

$$M(G_2(m))\approx\frac{\sum_{k=0}^{m}C_m^k(2\sqrt{2})^{m-k}(m+k)!}{\mathrm{e}^\alpha},\tag{5}$$

其中绝对误差

$$R_m\leqslant\frac{(2\sqrt{2}+1)^m}{m+1}.\tag{6}$$

证明　同样由引理 3 和引理 1，

$$M(G_2(m))=\int_0^\infty(x-\alpha)^m(x-\beta)^m\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=\sum_{k=0}^{m}C_m^k(\alpha-\beta)^{m-k}\int_0^\infty(x-\alpha)^{m+k}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=$$

$$\sum_{k=0}^{m} C_m^k (2\sqrt{2})^{m-k} \left(\int_{\alpha}^{\infty} (x-\alpha)^{m+k} \mathrm{e}^{-x} \mathrm{d}x + \int_{0}^{\alpha} (x-\alpha)^{m+k} \mathrm{e}^{-x} \mathrm{d}x \right) = \frac{\sum_{k=0}^{m} C_m^k (2\sqrt{2})^{m-k} (m+k)!}{\mathrm{e}^{\alpha}} + \sum_{k=0}^{m} C_m^k (2\sqrt{2})^{m-k} \int_{0}^{\alpha} (x-\alpha)^{m+k} \mathrm{e}^{-x} \mathrm{d}x.$$

同样

$$\left| \int_{0}^{\alpha} (x-\alpha)^{m+k} \mathrm{e}^{-x} \mathrm{d}x \right| \leqslant \frac{1}{m+k+1}.$$

所以

$$R_m = \left| \sum_{k=0}^{m} C_m^k (2\sqrt{2})^{m-k} \int_{0}^{\alpha} (x-\alpha)^{m+k} \mathrm{e}^{-x} \mathrm{d}x) \right| \leqslant \sum_{k=0}^{m} C_m^k (2\sqrt{2})^{m-k} \frac{1}{m+k+1} \leqslant \frac{(2\sqrt{2}+1)^m}{m+1}.$$

结论得证.

以 $n=2m, m=1,2,\cdots,10$ 为例,用式(2)计算 $M(G_2(m))$ 的精确值,用式(5)计算 $M(G_2(m))$ 的近似值,并取其整数部分,用式(6)计算误差限的理论估计值(取整),结果如表 2 所示:

表 2 $M(G_2(m)), m=1,2,\cdots,10$ 的近似计算及其误差

Tab. 2 Approximate calculation and its error of $M(G_2(m))$ when $m=1,2,\cdots,10$

m	$M(G_2(m))$精确值	$M(G_2(m))$近似值(取整后)	绝对误差	绝对误差限(取整)
1	0	0	0	2
2	4	2	2	5
3	80	81	1	14
4	4 752	4 748	4	43
5	440 192	440 194	2	137
6	59 245 120	59 245 107	13	450
7	10 930 514 688	10 930 514 697	9	1 507
8	2 649 865 335 040	2 649 865 334 995	45	5 128
9	817 154 768 973 824	817 154 768 973 857	33	17 668
10	312 426 715 251 262 464	312 426 715 251 262 308	156	61 491

注 3 定理 4 中绝对误差 R_t 的上界估计非常粗糙,当 $m \to \infty$ 时,$\frac{(2\sqrt{2}+1)^m}{m+1} \to \infty$. 尽管如此,因为 $\frac{(2\sqrt{2}+1)^m}{m+1}$ 与 $\frac{\sum_{k=0}^{m} C_m^k (2\sqrt{2})^{m-k} (m+k)!}{\mathrm{e}^{\alpha}}$ 的比值不超过 $\frac{(m+1)\mathrm{e}^{\alpha}}{m!}$,即 $m \to \infty$ 时,相对误差限是一个无穷小量.

参考文献:

[1] JERRUM M. Two-dimensional monomer-dimer systems are computationally intractable[J]. Journal of Statistical Physics, 1990, 59(3): 1087-1088.

[2] HALL G G. A graphic model of a class of molecules[J]. Int Math Educ Sci Technol, 1973, 4: 233-240.

[3] SWINBORNE-SHELDRAKE R, HERNDON W C, GUTMAN I. Kekulé structures and resonance energies of benzennoid hydrocarbons[J]. Tetrahedron Lett, 1975, 16(10): 755-758.

[4] PAULING L. The nature of chemical bond[M]. New York: Cornell Univ Press, 1939.

[5] LOVÁSZ L, PLUMMER M. Matching theory[M]. New York: North-Holland, 1986.

[6] GODSIL C D. Algebraic combinatorics[M]. New York: Chapman and Hall, 1993.

[7] PROPP J. Enumerations of matchings: problems and progress[J]. New Perspectives in Geometric Combinatorics, 1999, 38: 255-291.

[8] VALIANT L G. The complexity of computing the permanent[J]. Theoret Comput Sci, 1979, 8: 410-421.

[9] 唐保祥,任韩. 4 类图完美匹配的计数[J]. 武汉大学学报(理学版),2012,58(5):441-446.

[10] 杨瑞,刘成立,武楠楠. n 棱柱的完美匹配计数及其 k-共振性[J]. 山东大学学报(理学版),2022,57(11):37-41,49.

(责任编辑:汪 军)