doi:10.6043/j.issn.0438-0479.202412005

星型 k-树的(度)基尔霍夫指标和生成树的数目

曹月芬[1],杨维玲[2*]
(1.集美大学理学院,福建 厦门 361021;2.厦门大学数学科学学院,福建 厦门 361005)

摘要:[**目的**]近年来,图的电阻距离得到了国内外研究学者的广泛关注和深入研究,但是对 k-树的电阻距离研究较少,本文主要研究星型 k-树的电阻距离、(度)基尔霍夫指标和生成树的数目.[**方法**]本文用串并联法则和星-三角变换以及推广的星-网格变换等方法来计算星型 k-树的电阻距离和生成树的数目.[**结果**]设 G 是连通图,G 中任意两点之间的电阻距离定义为将 G 中的每条边用电阻(通常用单位电阻)代替后所得到的电网络中这两个节点之间的等效电阻.连通图 G 的基尔霍夫指标 $Kf(G)$ 定义为图 G 中所有点对之间的电阻距离之和.本文得出了星型 k-树的(度)基尔霍夫指标和生成树的数目.[**结论**]生成树的数目经常用谱的方法来计算,本文用推广的星-网格变换的方法得出生成树的数目,这给出了一个新的思路.

关键词:电阻距离;基尔霍夫指标;度基尔霍夫指标;星型 k-树

中图分类号:O 157.5 **文献标志码:**A **文章编号:**0438-0479(2025)04-0703-06

The (degree) Kirchhoff index and the number of spanning trees of a star-type k-tree

CAO Yuefen[1], YANG Weiling[2*]
(1. School of Sciences, Jimei University, Xiamen 361021, China; 2. School of Mathematical Sciences, Xiamen University, Xiamen 361005, China)

Abstract:[**Objective**] In recent years, the resistance distance of graphs has attracted widespread research attention regarding in-depth resistance distance of k-trees. In this paper, we mainly study the resistance distance and the (degree) Kirchhoff index and the number of spanning trees of a star-type k-tree. [**Methods**] Herein, we use the series-parallel law and the star-delta transformation as well as the generalized star-mesh transformation to calculate the resistance distance and the number of spanning trees of a star-type k-tree. [**Results**] Let G be a connected graph. The resistance distance between any two points in G is defined as the equivalent resistance between these two nodes in the electrical obtained by replacing each edge in G with a resistor (usually a unit resistor). The Kirchhoff index $Kf(G)$ of a connected graph G is defined as the sum of resistance distances between all pairs of vertices in G. Finally, the (degree) Kirchhoff index and the number of spanning trees of a star-type k-tree are obtained. [**Conclusion**] The number of spanning trees is traditionally calculated by spectrum. Herein, it is derived by the generalized star-mesh transformation. This proposed approach offers a new perspective.

Keywords: resistance distance; the Kirchhoff index; the degree Kirchhoff index; star-type k-tree

---

收稿日期:2024-11-26 **录用日期:**2025-03-31
基金项目:国家自然科学基金(12071180)
* **通信作者:**ywlxmu@xmu.edu.cn
引文格式:曹月芬,杨维玲.星型 k-树的(度)基尔霍夫指标和生成树的数目[J].厦门大学学报(自然科学版),2025,64(4):703-708.
Citation: CAO Y F, YANG W L. The (degree) Kirchhoff index and the number of spanning trees of a star-type k-tree[J]. J Xiamen Univ Nat Sci, 2025, 64(4): 703-708. (in Chinese)

1 预备知识

本文仅考虑有限连通图，若无特别说明，有关图论的符号和术语参见文献[1].

近年来，图的电阻距离[2]得到了国内外学者的广泛关注和深入研究. 图的电阻距离来源于电网络中的等效电阻. 给定一个 n 阶连通图 $G=(V(G),E(G))$，其顶点集 $\{1,2,\cdots,n\}$，如果将 G 中的每条边都看作是一个电阻(通常看作单位电阻)，则 G 就可以看作一个(纯电阻)电网络 N. 那么顶点 i 和 j 之间的电阻距离 r_{ij} 就等于电网中节点 i 和 j 之间的等效电阻，并且满足欧姆定律和基尔霍夫法则. 基尔霍夫指标 $Kf(G)$ 就定义为 G 中所有点对之间的电阻距离之和.

$$Kf(G)=\sum_{i<j}r_{ij}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}r_{ij}.$$

k-树[3]递归定义如下：固定一个整数 $k\geqslant 1$. (i) 完全图 K_k 是一个 k-树；(ii) 如果 T 是一个 k-树，那么通过在 T 中添加一个与 T 的某个 k-团的所有顶点相邻的新点所得到的图也是 k-树. 基本 k-团是 k-树递归定义中的初始 k-团. 图 1 是 k-树($k=2$ 和 3)的例子.

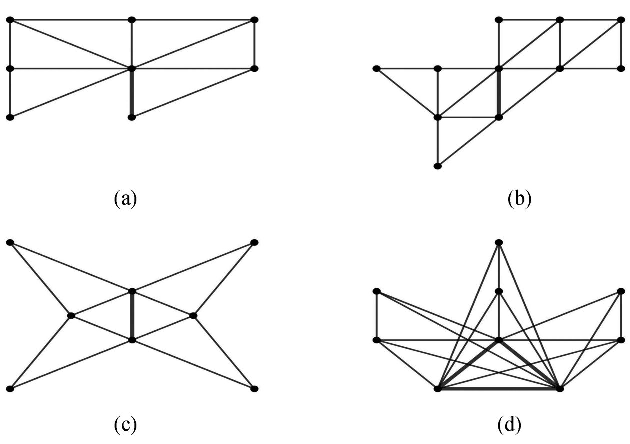

图 1 k-树的例子

Fig. 1 Examples of k-trees

从树的递归定义知当 $k=1$ 时是 k-树. k-树 T 是平凡的当且仅当 $T\cong K_k$，否则为非平凡. k-树 T 的子 k-树是 T 的一个子图，它本身就是一个 k-树.

星型 k-树的定义如下：固定一个整数 $k\geqslant 1$. (i) 完全图 K_k 是星型 k-树；(ii) 如果 S 是星型 k-树，那么在 S 中添加一个新的顶点，这个顶点连接到 S 的基本 k-团上得到的图也是星型 k-树. 图 2 是星型 k-树($k=3$)的例子.

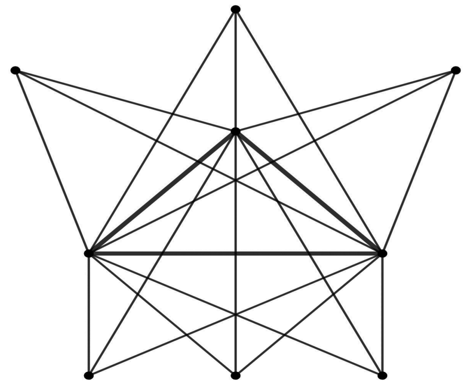

图 2 星形 k-树

Fig. 2 Star-type k-tree

为了计算和估计电阻距离，经常会用到对电网络进行简化或者做一些等效变换. 接下来介绍一些经常用到的简化法则和等效变换.

首先介绍最常用到的基本法则——串联法则和并联法则，这两个法则可以由基尔霍夫定律直接得到.

性质 1 (i)(串联法则)设 P 是一条路，a,b 是 P 的两个端点，那么 a,b 之间的电阻距离等于 P 中所有边上的电阻之和.

(ii)(并联法则)设 G 是由两个点 a,b 以及连接这两点的 s 条独立路所构成的图，假设这 s 条独立路上的边的电阻分别是 $r_1,r_2,\cdots,r_s$，则有

$$\frac{1}{r_G(a,b)}=\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\cdots+\frac{1}{r_s}.$$

除了串并联法则，在电路理论中，星形联结与三角形联结的等效变换(Y-Δ 变换)也是一个经常用到的基本变换.

性质 2[4] (Y-Δ 变换)设三角形联结的 3 个顶点是 u_1,u_2,u_3，3 条边 u_1u_2,u_1u_3 和 u_2u_3 上的电阻值分别是 R_{12},R_{13} 和 R_{23}；再设星形联结的中心点是 u，其余 3 个顶点是 u_1,u_2,u_3，3 条边 u_1u,u_2u 和 u_3u 上的电阻值分别是 r_1,r_2 和 r_3 图(3)，则有

(i) 星形联结可以通过如下公式转换为三角形联结：

$$R_{12}=\frac{r_1r_2+r_1r_3+r_2r_3}{r_3},$$

$$R_{13}=\frac{r_1r_2+r_1r_3+r_2r_3}{r_2},$$

$$R_{23}=\frac{r_1r_2+r_1r_3+r_2r_3}{r_1}.$$

(ii) 三角形联结可以通过如下公式转换为星形

联结：

$$r_1=\frac{R_{12}R_{13}}{R_{12}+R_{13}+R_{23}},$$

$$r_2=\frac{R_{12}R_{23}}{R_{12}+R_{13}+R_{23}},$$

$$r_3=\frac{R_{13}R_{23}}{R_{12}+R_{13}+R_{23}}.$$

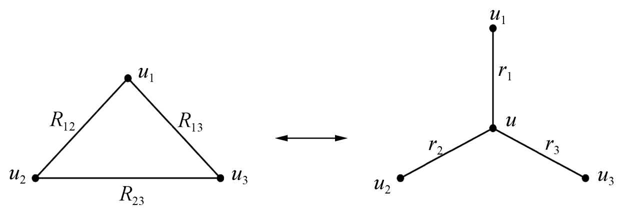

图 3　Y-Δ 变换

Fig. 3　Wye-delta transformation

电导是电阻的倒数，关于电导的 Y-Δ 变换也有下面的结论.

定理 1[4]　(电导 Y-Δ 变换)设星形联结的中心点是 O，其余 3 个顶点是 A,B,C，3 条边 OA,OB,OC 上的电导值分别是 a,b,c，三角形联结的 3 个顶点是 A,B,C，则 3 条边 AB,BC 和 CA 上的电导值分别是 $\frac{ab}{a+b+c}$，$\frac{bc}{a+b+c}$ 和 $\frac{ac}{a+b+c}$(图(4)).

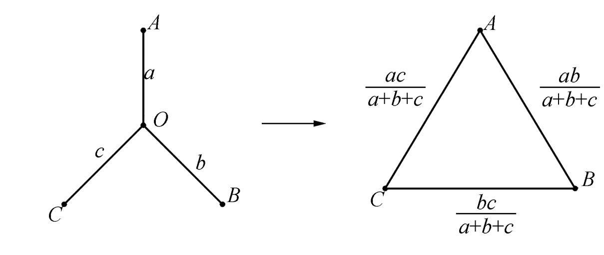

图 4　电导 Y-Δ 变换

Fig. 4　Conductance wye-delta transformation

这个结论可以推广到一般的星型变换(星-网格变换)(设有 n 条射线的星型)(图 5).

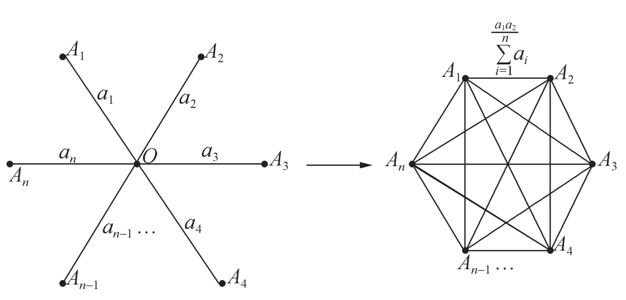

图 5　一般的星-网格变换

Fig. 5　General star-mesh transformation

定理 2[5]　设星形联结的中心点是 O，其余 n 个顶点是 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，n 条边 $OA_1,OA_2,\cdots,OA_n$ 上的电导值分别是 $a_1,a_2,\cdots,a_n$，则这个星形可以等效变换成一个具有 n 个顶点 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的完全图，这个完全图的 $\frac{1}{2}n(n-1)$ 条边分别是 $A_1A_2,\cdots,A_1A_n$，$A_2A_3,\cdots A_2A_n,\cdots,A_{n-1}A$，每条边 A_iA_j 的电导值分别是 $\frac{a_ia_j}{a_1+a_2+\cdots+a_n}$.

设 G 是一个边赋权图，边权函数为 W，$\tau(G)$ 表示 G 中生成树的集合，$t(G)$ 表示 G 的生成树的权和，这里生成树 T 的权表示 T 中边的权的乘积. 即

$$t(G)=\sum_{T\in\tau(G)}\prod_{e\in E(T)}w(e).\qquad(1)$$

若 G 是一个每条边权都为 1 的边赋权图，则称 G 为一个图. 显然，如果 G 是一个图，那么 $t(G)$ 就是 G 的生成树的数目. 图的生成树的计数不仅是组合数学也是电网络中的重要问题，它与数学、物理、计算科学等学科都有紧密的联系，多年来一直受数学家和物理学家的广泛关注和研究[6].

著名的凯莱公式表明，具有 k 个顶点的完全图 K_k 有 k^{k-2} 棵生成树，即

$$t(K_k)=k^{k-2}.\qquad(2)$$

定理 3[7]　完全图 K_k 中的顶点 i 和 j 之间的电阻距离 $r_{ij}=\frac{2}{k}$.

设 $K_{1,s}^{w}$ 是一个边赋权星图，其顶点集为 $\{v_1,v_2,\cdots,v_s\}\cup\{o\}$，边集为 $\{ov_1,ov_2,\cdots,ov_s\}$，边权函数满足：$w(ov_i)=a_i(i=1,2,\cdots,s)$. 设 G 是一个边赋权图，它有一个边赋权子图 H 同构于 $K_{1,s}^{w}$，设 G^* 是从 G 中获得的边赋权图，它是把 G 中子图 H 替换成顶点集为 $\{v_1,v_2,\cdots,v_s\}$ 的边赋权完全图 K_s^w，其中边权函数满足

$$w(v_i,v_j)=\frac{a_ia_j}{\sum_{i=1}^{s}a_i},1\leqslant i\neq j\leqslant s.$$

则由推广的 Y-Δ 变换[8]，边赋权图 G 与 G^* 的生成树有如下的关系：

$$t(G)=(a_1+a_2+\cdots+a_s)t(G^*).\qquad(3)$$

边权函数是电导的时候，计算生成树可以用等效电导来代替.

2　主要内容

本文主要讨论一般的星型 k-树的基尔霍夫指标、

度基尔霍夫指标和生成树的数目.

定理 4　设星型 k-树(图 6)中,初始 k-团中的顶点记为 $v_i(i=1,2,\cdots,k)$,新添加进来的点记为 $u_j(j=1,2,\cdots,n)$,则有下面的结论:

(i) $r(u_i,u_j)=\dfrac{2}{k},1\leqslant i\neq j\leqslant n$,

(ii) $r(v_i,v_j)=\dfrac{2}{n+k},1\leqslant i\neq j\leqslant k$,

(iii) $r(u_i,v_j)=\dfrac{n+2k-1}{k(n+k)},i=1,2,\cdots,n,j=1,2,\cdots,k$.

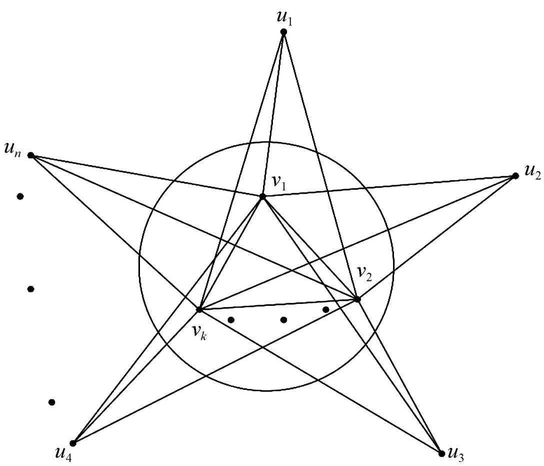

图 6　一般的星型 k-树

Fig. 6　General star-type k-tree

证明　(i) 初始 k 团完全图 K_k 中的每个点 $v_i(i=1,2,\cdots,k)$ 对于 $u_j(j=1,2,\cdots,n)$ 来说都是等势的,所以可以捏成一点 v(图 7),从而由性质 1,

$$r(u_i,v)=\frac{1}{k},r(v,u_j)=\frac{1}{k},$$

所以

$$r(u_i,u_j)=\frac{2}{k}.$$

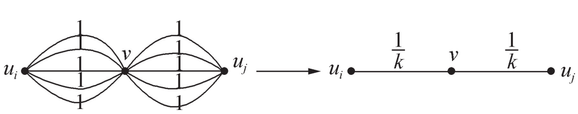

图 7　计算 u_i 和 u_j 之间的电阻

Fig. 7　Calculate the resistance between u_i and u_j

(ii) 要计算完全图 K_k 中的任意两点间的电阻距离,可以把外面新加进来的 n 个点 $u_j(j=1,2,\cdots,n)$ 都做一次一般的星-网格变换(图 5),这里原来每条边的电导 a_i 都等于 1,则 v_i 与 $v_j(i\neq j)$ 之间,除了原来初始 k 团中的那条边,会增加 n 条边(图 8),新加的每条边的电导变成 $\dfrac{1}{k}$,从而 v_i 与 $v_j(i\neq j)$ 之间的等效电导为

$$c(v_i,v_j)=\frac{1}{k}\times n+1=\frac{n+k}{k}. \tag{4}$$

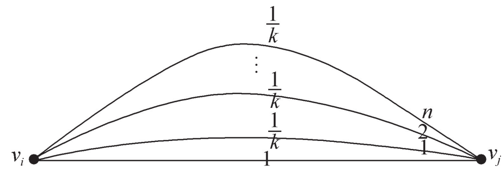

图 8　计算 v_i 和 v_j 之间的电导

Fig. 8　Calculate the conductance between v_i and v_j

再结合定理 3,有

$$r(v_i,v_j)=\frac{k}{n+k}\times\frac{2}{k}=\frac{2}{n+k}.$$

(iii) 要计算 u_i 与 v_j 两点间的电阻距离,可以把外面新加进来的点,除 u_i 外剩余的 $n-1$ 个点都做一次一般的星-网格变换(图 5),这里原来每条边的电导 a_i 都等于 1,则 v_i 与 $v_j(i\neq j)$之间,除了原来初始 k 团中的那条边,会增加 $n-1$ 条边(类似于图 8),新加的每条边的电导变成$\dfrac{1}{k}$,从而 v_i 与 $v_j(i\neq j)$之间的等效电导为

$$c(v_i,v_j)=\frac{1}{k}\times(n-1)+1=\frac{n+k-1}{k},$$

从而

$$r(v_i,v_j)=\frac{k}{n+k-1}.$$

完全图 K_k 中剩下的 $k-1$ 点对 v_j 来说都一样,可以把剩下的 $k-1$ 个点捏成一个点 v^*(图 9),则由并联公式可得

$$r_1(v_j,v^*)=\frac{k}{n+k-1}\times\frac{1}{k-1}=\frac{k}{(n+k-1)(k-1)},$$

及

$$r_1(u_i,v^*)=\frac{1}{k-1}.$$

再由串联公式计算出

$$r_1(u_i,v_j)=\frac{1}{k-1}+\frac{k}{(n+k-1)(k-1)}=\frac{n+2k-1}{(n+k-1)(k-1)},$$

最后再次利用并联公式计算出

$$r(u_i,v_j)=\frac{n+2k-1}{k(n+k)},$$

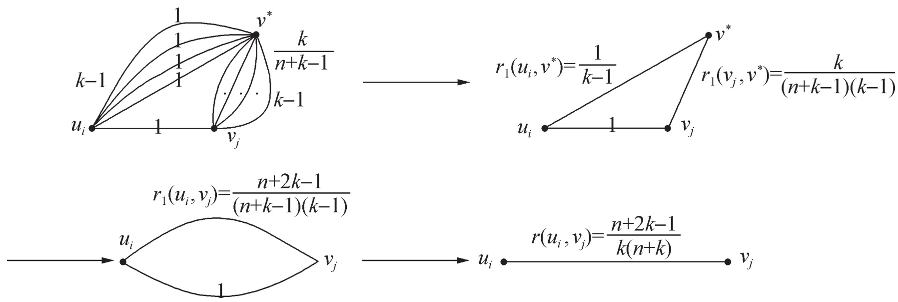

图 9　计算 u_i 和 v_j 之间的电阻

Fig. 9　Calculate the resistance between u_i and v_j

证毕.

定理 5　星型 k-树 G 的基尔霍夫指标为

$$Kf(G)=\sum_{i<j}r_{ij}=\frac{n(n-1)}{k}+(n+k-1).$$

证明　要计算任意两点间的电阻距离之和,可以分为 3 种情况:

(i) 在 u_i 与 u_j 之间任取两点,则

$$\sum_{i<j}r(u_i,u_j)=C_n^2\cdot\frac{2}{k}=\frac{n(n-1)}{k},$$

(ii) 在 v_i 与 v_j 之间任取两点,则

$$\sum_{i<j}r(v_i,v_j)=C_k^2\cdot\frac{2}{n+k}=\frac{k(k-1)}{n+k},$$

(iii) 在 u_i 与 v_j 之间任取两点,则

$$\sum r(u_i,v_j)=n\cdot k\cdot\frac{n+2k-1}{k(n+k)}=\frac{n(n+2k-1)}{n+k}.$$

从而

$$Kf(G)=\sum_{i<j}r_{ij}=\frac{n(n-1)}{k}+\frac{k(k-1)}{n+k}+\frac{n(n+2k-1)}{(n+k)}=\frac{n(n-1)}{k}+\frac{k^2-k+n^2+2nk-n}{n+k}=\frac{n(n-1)}{k}+(n+k-1),$$

证毕.

2007 年,Chen and Zhang[9]提出度基尔霍夫指标的定义:$K'f(G)=\sum_{i<j}d_id_jr_{ij}$,其中 d_i 和 d_j 是指顶点 i 和 j 的度.从而下面可以得到星型 k-树 G 的度基尔霍夫指标.

定理 6　星型 k-树 G 的度基尔霍夫指标为

$$K'f(G)=\sum_{i<j}d_id_jr_{ij}=kn(n-1)+\frac{k(n+k-1)[(n+k-1)^2+nk]}{n+k}.$$

证明　可以分为 3 种情况讨论:

(i) 在 u_i 与 u_j 之间任取两点,则

$$\sum_{i<j}d_id_jr_{ij}=C_n^2\cdot k\cdot k\,\frac{2}{k}=kn(n-1),$$

(ii) 在 v_i 与 v_j 之间任取两点,则

$$\sum_{i<j}d_id_jr_{ij}=C_k^2\cdot(n+k-1)\cdot(n+k-1)\cdot\frac{2}{n+k}=\frac{k(k-1)(n+k-1)^2}{n+k},$$

(iii) 在 u_i 与 v_j 之间任取两点,则

$$\sum_{i<j}d_id_jr_{ij}=n\cdot k\cdot k\cdot(n+k-1)\cdot\frac{n+2k-1}{k(n+k)}=\frac{nk(n+k-1)(n+2k-1)}{n+k}.$$

从而

$$K'f(G)=\sum_{i<j}d_id_jr_{ij}=kn(n-1)+\frac{k(k-1)(n+k-1)^2}{n+k}+\frac{nk(n+k-1)(n+2k-1)}{n+k}=kn(n-1)+\frac{k(n+k-1)[(k-1)(n+k-1)+n(n+2k-1)]}{n+k}=kn(n-1)+\frac{k(n+k-1)[(n+k-1)^2+nk]}{n+k},$$

证毕.

定理 7　星型 k-树 G 的边赋权(每条边权都是 1)生成树的数目为

$$t(G)=k^{n-1}(n+k)^{k-1}.$$

证明　星型 k-树 G 外面新添加的每个点 u_i($i=1,2,\cdots,n$)都可以做一次一般的星型变换(定理 2),总共可以做 n 次,由于刚开始星型 k-树 G 每条边的电导 a_i 都为 1,从而由式(3)可得

$$t(G)=(\underbrace{1+1+\cdots+1}_{k})t(G^{1*})=$$

$$(\underbrace{1+1+\cdots+1}_{k})^2 t(G^{2*}) = \cdots =$$

$$(\underbrace{1+1+\cdots+1}_{k})^n t(G^{n*}),$$

其中G^{i*}是变换外面的i个顶点后的结果图,所以G^{n*}就是完全图K^k(也就是星型k-树G中的初始k-团),G^{n*}边的权是等效电导$\frac{n+k}{k}$(即图8中v_i与v_j之间的电导),所以由式(2)和(4)有:

$$t(G) = (\underbrace{1+1+\cdots+1}_{k})^n t(G^{n*}) = k^n \cdot \left(\frac{n+k}{k}\right)^{k-1} \cdot k^{k-2} = k^{n-1}(n+k)^{k-1},$$

证毕.

注:生成树的数目也可以用其他方法来计算,比如谱.

参考文献:

[1] BONDY J A,MURTY U S R. Graph theory with applications[M]. London:McMillan,1976.

[2] KLEIN D J,DANDIC' M. Resistance distance[J]. J Math Chem,1993,12:81-95.

[3] BEINEKE L W,PIPPERT R E. The number of labeled k-dimensional trees[J]. J Comb Theory,1969,6:200-205.

[4] KENNELLY A E. Equivalence of triangles and stars in conducting networks[J]. Electrical World and Engineer,1899,34:413-414.

[5] ROSEN A. A new network theorem[J]. Journal of the Institution of Electrical Engineers, 1924, 62(335): 916-918.

[6] BIGGS N. Algebraic graph theory[M]. Cambridge: Cambridge University Press,1974.

[7] LUKOVITS I,NIKOLIC S. TRINAJSTI' C N. Resistance distance in regular graphs[J]. International Journal of Quantum Chemistry,1999,71(3):217-225.

[8] TEUFL E,WAGNER S. Determinant identities for Laplace matrices[J]. Linear Algebra Appl,2010,432:441-457.

[9] CHEN H Y,ZHANG F J. Resistance distance and the normalized Laplacian spectrum[J]. Discrete Applied Mathematics,2007,155(5):654-661.

(责任编辑:汪 军)