

# 补充三角图及叠加图的 $A_\alpha$ -谱

成泽宇, 马小玲\*, 朱浩, 卢张浩

(新疆大学数学与系统科学学院, 新疆 乌鲁木齐 830017)

**摘要:** [目的] 图的谱有着悠久的历史, 例如, 统计物理中的二聚体问题, 化学中的夸克理论等都用到图谱中的理论及方法. [方法] 设  $G$  和  $G'$  是两个简单图, 记  $CT(G)$  为图  $G$  的补充三角图, 记  $G \times G'$  为图  $G$  和  $G'$  的叠加图. 2017年 Nikiforov 给出了图的  $A_\alpha$ -矩阵的定义, 对任意的实数  $0 \leq \alpha \leq 1$ , 矩阵  $A_\alpha$  的定义为  $A_\alpha(G) = \alpha D(G) + (1-\alpha)A(G)$ , 其中  $D(G)$  和  $A(G)$  分别为图  $G$  的度对角矩阵和邻接矩阵. [结果] 首先确定了正则图的补充三角图的  $A_\alpha$ -特征多项式及其  $A_\alpha$ -谱; 接着, 考虑了两个可交换正则图的叠加图的  $A_\alpha$ -特征多项式. [结论] 本文的主要结论推广了已有的很多结果.

**关键词:**  $A_\alpha$ -谱; 补充三角图; 叠加图; 线图; 全图

中图分类号: O 157.5

文献标志码: A

文章编号: 0438-0479(2025)04-0709-08

## The $A_\alpha$ -spectra of complemented triangulation graph and overlap graph

CHENG Zeyu, MA Xiaoling\*, ZHU Hao, LU Zhanghao

(College of Mathematics and System Sciences, Xinjiang University, Urumqi 830046, China)

**Abstract:** [Objective] Graph spectra have secured a long history of applications in physics, through dimer problem, and in chemistry, through Hückel's theory. [Methods] Let  $G$  and  $G'$  be two simple graphs. We refer to  $CT(G)$  as the complemented triangulation graph of a graph  $G$ , and  $G \times G'$  as an overlay of  $G$  and  $G'$ . In 2017, Nikiforov proposed the  $A_\alpha$ -matrix of  $G$ , which is defined as  $A_\alpha(G) = \alpha D(G) + (1-\alpha)A(G)$ , for  $0 \leq \alpha \leq 1$ . [Results] In this paper, we determine the  $A_\alpha$ -characteristic polynomial and  $A_\alpha$ -spectrum of the complemented triangulation graph. Moreover, we also consider the  $A_\alpha$ -characteristic polynomial of overlap graph of two commuting regular graphs. [Conclusions] These main results have generalized many known results.

**Keywords:**  $A_\alpha$ -spectrum; complemented triangulation graph; overlap graph; line graph; total graph

## 1 预备知识

图谱理论主要是将图矩阵化, 利用图矩阵的特征值(又称图的谱)的代数性质来反映图的结构性质. 它在计算机科学、物理、化学等领域有着广泛的运用, 特别是应用在互联网建模和搜索、计算机视觉、数据挖掘、统计数据库等领域. 图谱理论还能解决在传感器

网络中的组合优化等问题, 例如, 解决分区, 分配, 路由和调度问题等<sup>[1]</sup>.

本文考虑的所有图均为有限且无向的简单图. 设  $G=(V(G), E(G))$  是一个图, 其顶点集  $V(G)=\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  和边集  $E(G)=\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ , 并且记图  $G$  的点数和边数分别为  $|V(G)|=n, |E(G)|=m$ . 图  $G$  的邻接矩阵, 记为  $A(G)=(a_{ij})_{n \times n}$ , 其中  $a_{ij}=1$ , 如果  $v_i$  和  $v_j$  是邻接的, 否则  $a_{ij}=0$ . 图  $G$  的点边关联矩阵,

收稿日期: 2024-09-09 录用日期: 2024-11-28

基金项目: 国家自然科学基金(12161085); 新疆维吾尔自治区自然科学基金(2021D01C069); 新疆大学 2023 年自治区级大学生创新训练计划项目(S202310755102)

\* 通信作者: mxling2018@163.com.

引文格式: 成泽宇, 马小玲, 朱浩, 等. 补充三角图及叠加图的  $A_\alpha$ -谱[J]. 厦门大学学报(自然科学版), 2025, 64(4): 709-716.

Citation: CHENG Z Y, MA X L, ZHU H, et al. The  $A_\alpha$ -spectra of complemented triangulation graph and overlap graph[J]. J Xiamen Univ Nat Sci, 2025, 64(4): 709-716. (in Chinese)



记为  $\mathbf{R}(G) = (r_{ij})_{n \times m}$ , 其中  $r_{ij} = 1$ , 如果顶点  $v_i$  与边  $e_j$  相关联, 否则  $r_{ij} = 0$ . 设  $d_i = d_G(v_i)$  是  $G$  中点  $v_i$  的度,  $\mathbf{D}(G) = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$  为图  $G$  的度对角矩阵. 关于图  $G$  的拉普拉斯矩阵  $\mathbf{L}(G)$  和无符号拉普拉斯矩阵  $\mathbf{Q}(G)$  定义如下:

$$\mathbf{L}(G) = \mathbf{D}(G) - \mathbf{A}(G), \mathbf{Q}(G) = \mathbf{D}(G) + \mathbf{A}(G).$$

2017 年 Nikiforov<sup>[2]</sup> 给出了图的  $\mathbf{A}_\alpha$ -矩阵的定义, 对任意的实数  $\alpha \in [0, 1]$ , 矩阵  $\mathbf{A}_\alpha(G)$  的定义为

$$\mathbf{A}_\alpha(G) = \alpha \mathbf{D}(G) + (1 - \alpha) \mathbf{A}(G), \quad (1)$$

其中  $\mathbf{A}(G)$  是图  $G$  的邻接矩阵,  $\mathbf{D}(G)$  是图  $G$  的度对角矩阵. 对于  $n$  阶方阵  $\mathbf{M}$ , 我们用  $\Phi(\mathbf{M}; x)$  表示  $\mathbf{M}$  的特征多项式, 即  $\Phi(\mathbf{M}; x) = \det(x\mathbf{I}_n - \mathbf{M})$ , 其中  $\mathbf{I}_n$  表示  $n$  阶单位阵. 矩阵  $\mathbf{M}$  的特征值及其重数构成的集合称为  $\mathbf{M}$ -谱, 记为  $\text{Spec}_M$ . 矩阵  $\mathbf{M}$  的所有特征值中模最大的值称为矩阵  $\mathbf{M}$  的谱半径. 因此,  $\Phi(\mathbf{A}_\alpha(G); x)$  称为图  $G$  的  $\mathbf{A}_\alpha$ -特征多项式,  $\mathbf{A}_\alpha(G)$  的特征值及其重数构成的集合称为图  $G$  的  $\mathbf{A}_\alpha$ -谱, 记为  $\text{Spec}_{\mathbf{A}_\alpha}(G)$ . 最大的  $\mathbf{A}_\alpha(G)$  的特征值称为图  $G$  的  $\mathbf{A}_\alpha$ -谱半径. 设  $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_k$  是  $\mathbf{A}_\alpha(G)$  的  $k$  个不同的特征值, 它们的重数分别为  $m_1, m_2, \dots, m_k$ , 那么图  $G$  的  $\mathbf{A}_\alpha$ -谱可表示为如下形式:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_k \\ m_1 & m_2 & \dots & m_k \end{pmatrix}.$$

根据以上图矩阵的定义, 显然有  $\mathbf{A}_0(G) = \mathbf{A}(G)$ ,

$\mathbf{A}_{\frac{1}{2}}(G) = \frac{1}{2} \mathbf{Q}(G)$ ,  $\mathbf{A}_\alpha(G) - \mathbf{A}_\beta(G) = (\alpha - \beta) \mathbf{L}(G)$ . 因此, 可以将  $\mathbf{A}_\alpha$ -矩阵视为邻接矩阵和无符号拉普拉斯矩阵的一般化. 同时,  $\mathbf{A}_\alpha$ -矩阵与拉普拉斯矩阵又有一定的联系. 因为随着参数  $\alpha$  的改变,  $\mathbf{A}_\alpha$ -矩阵的性质也随之而改变, 所以  $\mathbf{A}_\alpha$ -矩阵具有许多邻接矩阵和无符号拉普拉斯矩阵所不具有的特点. 因此,  $\mathbf{A}_\alpha$ -矩阵一经提出, 迅速引起了国内外众多学者的关注并取得了一系列的研究成果. 2017 年, Nikiforov<sup>[3]</sup> 首先研究了树图的  $\mathbf{A}_\alpha$ -谱半径问题; 2019 年, Chen 等<sup>[4]</sup> 考虑了二次幂图的  $\mathbf{A}_\alpha$ -谱半径问题; 2020 年, Tahir 等<sup>[5]</sup> 研究了两个图的冠图的  $\mathbf{A}_\alpha$ -特征值问题. 除此之外, 关于图的  $\mathbf{A}_\alpha$ -谱及其相关问题还可参考文献<sup>[6-9]</sup>.

图运算是图谱理论中一个重要的研究对象. 在图论中, 通过组合图对或对单个图进行一元操作, 可以构造出多个有趣的图. 设  $G$  是一个具有  $n$  个顶点  $m$  条边的简单图, 从图  $G$  出发, 可以构造出多种图变换, 例如: 图  $G$  的补充三角图  $CT(G)$ 、线图  $\mathcal{L}(G)$ 、Middle 图  $M(G)$ 、全图  $T(G)$ 、拟全图  $QT(G)$  等. 为了方便读者理解, 下面将分别给出这些变换图的定义及部分图的简单图例, 具体请参看图 1~4.

图  $G$  的补图<sup>[10]</sup>, 用  $\bar{G}$  表示, 其点集为  $V(G)$ ,  $\bar{G}$  中的两个不同的顶点相邻当且仅当它们在  $G$  中不相邻.

图  $G$  的补充三角图<sup>[11]</sup>, 记为  $CT(G)$ , 定义为在  $G$  中对应于  $G$  的每条边  $uv$  添加一个新顶点  $w$ , 并且使点  $w$  连接于  $V(G)$  中除了  $u$  和  $v$  以外的其他所有的顶点而得到的图. 特别地,  $|V(CT(G))| = n + m$ .

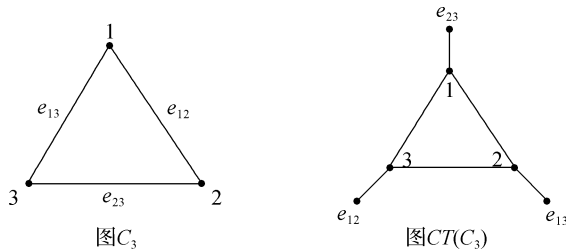


图 1 图  $C_3$  及其补充三角图  $CT(C_3)$

Fig. 1 Graph  $C_3$  and its complemented triangulation graph  $CT(C_3)$

图  $G$  的线图<sup>[10]</sup>, 记为  $\mathcal{L}(G)$ , 其点集  $V(\mathcal{L}(G)) = E(G)$ ,  $\mathcal{L}(G)$  的两个顶点相邻当且仅当其对应的边在图  $G$  中相邻. 值得注意的是,  $|V(\mathcal{L}(G))| = m$ .

图  $G$  的 Middle 图<sup>[12]</sup>, 记为  $M(G)$ , 其点集  $V(M(G)) = V(G) \cup E(G)$ , 边集  $E(M(G)) = E(\mathcal{L}(G)) \cup \{ve : \text{当点 } v \text{ 与边 } e \text{ 在 } G \text{ 中关联}\}$ .

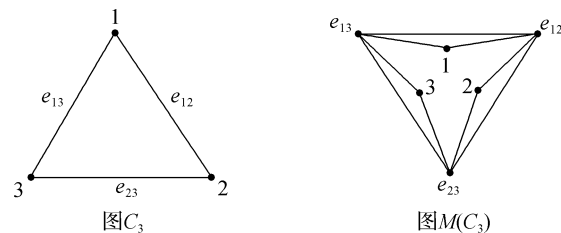


图 2 图  $C_3$  及其 Middle 图  $M(C_3)$

Fig. 2 Graph  $C_3$  and its Middle graph  $M(C_3)$

图  $G$  的全图<sup>[12]</sup>, 记为  $T(G)$ , 其点集  $V(T(G)) = V(G) \cup E(G)$ , 边集  $E(T(G)) = E(M(G)) \cup \{vu : \text{当点 } v, u \in V(G) \text{ 在 } G \text{ 中相邻}\}$ .

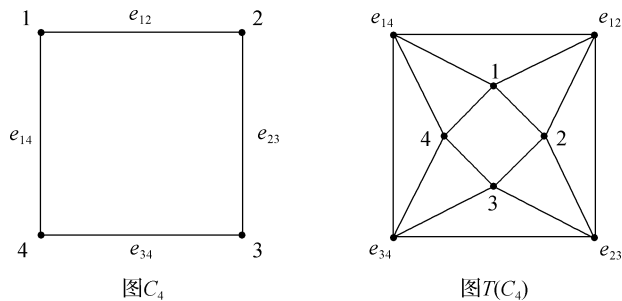


图 3 图  $C_4$  及其全图  $T(C_4)$

Fig. 3 Graph  $C_4$  and its total graph  $T(C_4)$

图  $G$  的拟全图<sup>[12]</sup>, 记为  $QT(G)$ , 其点集  $V(QT(G)) = V(G) \cup E(G)$ , 边集  $E(QT(G)) = E(M(G)) \cup \{vu: \text{当 } v, u \in V(G) \text{ 在 } G \text{ 中不相邻}\}$ .

2017 年, Somodi 等<sup>[13]</sup> 根据简单图  $G$  的 Middle 图、全图和拟全图的构造方法, 给出了更一般的构造情况: 设  $G$  和  $G'$  是两个具有相同阶数的简单图. 若按某种顺序标记  $G$  和  $G'$  中的顶点, 构造出的新图称为  $G$  和  $G'$  的叠加图, 记为  $G \times G'$ , 其点集  $V(G \times G') = V(G) \cup E(G)$ , 边集为  $E(G \times G') = E(M(G)) \cup \{uv: u, v \in V(G'), uv \in E(G')\}$ . 值得注意的是,  $G$  和  $G'$  的叠加图  $G \times G'$  既不满足结合律, 也不满足交换律. 另外, 根据叠加图的定义可以看出, 图  $G \times G'$  依赖图  $G$  和  $G'$  的顶

点的标号而得到一些不同构的图, 如图 5 所示.

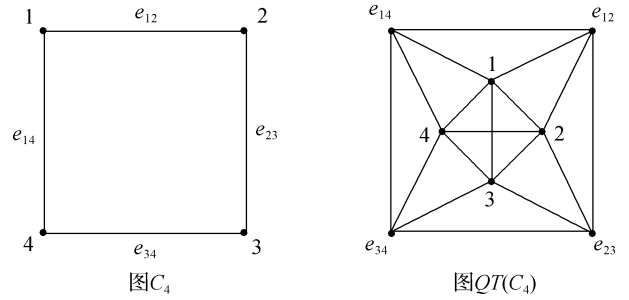


图 4 图  $C_4$  及其拟全图  $QT(C_4)$

Fig. 4 Graph  $C_4$  and its quasi-total graph  $QT(C_4)$

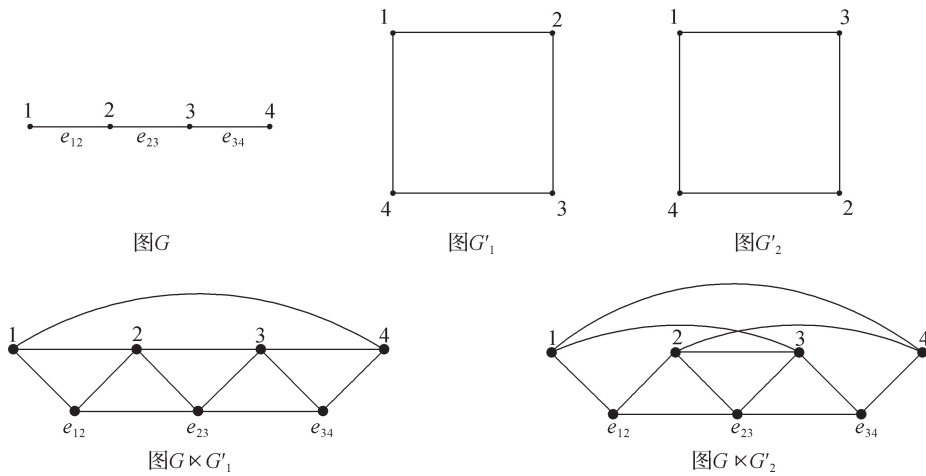


图 5 图  $G, G'_1, G'_2$  及其叠加图  $G \times G'_1$  和  $G \times G'_2$

Fig. 5 Graph  $G, G'_1, G'_2$  and its overlap graph  $G \times G'_1$  and  $G \times G'_2$

设图  $G$  和  $G'$  是两个简单图, 如果存在一种对图  $G$  和  $G'$  的顶点的标记方式, 使它们的邻接矩阵可交换, 即满足  $A(G)A(G') = A(G')A(G)$ , 则称图  $G$  和  $G'$  是可交换的<sup>[14]</sup>. 特别地, 根据交换图和叠加图的定义可知, 如果  $G$  和  $G'$  是两个可交换的正则图, 则它们的叠加图是唯一的. 因此, 根据 Middle 图、全图、拟全图和叠加图的定义, 很容易可知  $M(G) = G \times nK_1, T(G) = G \times G, QT(G) = G \times \bar{G}$ .

2017 年, Somodi 等<sup>[13]</sup> 给出了两个可交换正则图的叠加图的邻接矩阵和拉普拉斯矩阵的特征多项式的公式. 2022 年, Wei 等<sup>[11]</sup> 首先定义了一个图的补充三角图, 接着考虑了正则图的补充三角图的邻接、拉普拉斯和无符号拉普拉斯谱; 并且利用这些结果, 构造了无穷多对邻接同谱图、拉普拉斯同谱图和无符号拉普拉斯同谱图.

受到上述研究工作的启发, 本文主要考虑了正则图的补充三角图的  $A_\alpha$ -特征多项式及其  $A_\alpha$ -谱; 接着研

究了两个可交换正则图的叠加图的  $A_\alpha$ -特征多项式, 由此得到了  $M(G), T(G), QT(G)$  等图的  $A_\alpha$ -特征多项式.

## 2 准备工作

在给出本文主要结论之前, 先列举一些有用的结果. 整篇文章中, 对于任意整数  $k, n_1$  和  $n_2$ , 记  $I_k$  为  $k$  阶单位矩阵, 记  $\mathbf{1}_k$  为  $k$  阶全 1 列向量, 记  $J_{n_1 \times n_2}$  为所有元素均为 1 的  $n_1 \times n_2$  阶矩阵.

引理 1<sup>[10]</sup> 如果图  $G$  是一个  $r$ -正则图, 则

$$R(G)R(G)^T = A(G) + rI_n,$$

$$A(L(G)) = R(G)^T R(G) - 2I_m,$$

其中  $R(G)^T$  表示  $R(G)$  的转置矩阵.

引理 2<sup>[15]</sup> 设  $M$  是一个  $n \times n$  阶矩阵, 矩阵  $M$  的冠  $\Gamma_M(x)$  定义为矩阵  $(xI_n - M)^{-1}$  中所有元素之和, 即

$$\Gamma_M(x) = \mathbf{1}_n^T (xI_n - M)^{-1} \mathbf{1}_n.$$

**引理 3**<sup>[16]</sup> 设  $M$  是一个  $n \times n$  阶矩阵, 如果  $M$  的每行的行和都相等并且等于一个常数  $t$ , 则

$$\Gamma_M(x) = \frac{n}{x-t}.$$

**引理 4**<sup>[16]</sup> 设  $A$  为  $n \times n$  阶矩阵,  $\alpha \in [0, 1]$ , 则  $\det(xI_n - A - \alpha J_{n \times n}) = (1 - \alpha \Gamma_A(x)) \det(xI_n - A)$ .

**引理 5**<sup>[17]</sup> 设  $M_1, M_2, M_3$  和  $M_4$  分别为  $p \times p, p \times q, q \times p$  和  $q \times q$  阶矩阵, 其中  $M_1$  和  $M_4$  是可逆的, 则

$$\det \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ M_3 & M_4 \end{pmatrix} = \det(M_4) \cdot \det(M_1 - M_2 M_4^{-1} M_3) = \det(M_1) \cdot \det(M_4 - M_3 M_1^{-1} M_2),$$

其中  $M_1 - M_2 M_4^{-1} M_3$  和  $M_4 - M_3 M_1^{-1} M_2$  分别称为  $M_1$  和  $M_4$  的 Schur 补.

整篇文章中, 设  $G$  和  $G'$  表示简单的、可交换的、具有  $n$  个点的正则图. 假设  $G$  是连通图且其正则度  $r \geq 2$  ( $G'$  没有必要连通), 则  $G$  的边数为  $m = \frac{nr}{2}$ . 设图  $G'$  中

$$\begin{pmatrix} \alpha(n-2) & \frac{r+(n+m-2)\alpha+\sqrt{\Delta}}{2} & \frac{r+(n+m-2)\alpha-\sqrt{\Delta}}{2} & \frac{\alpha(m+n-2)+q_i+\sqrt{\Delta_i}}{2} & \frac{\alpha(m+n-2)+q_i-\sqrt{\Delta_i}}{2} \\ m-n & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

其中

$$\Delta = r^2 + ((8\alpha^2 - 18\alpha + 8)n + 2am + 8\alpha^2 - 12\alpha + 8)r + \alpha^2 n^2 + ((-6\alpha^2 + 8\alpha - 4)m - 4\alpha^2)n + \alpha^2 m^2 + 4\alpha^2 m + 4\alpha^2,$$

$$\Delta_i = (4\alpha^2 - 8\alpha^2 + 4)r + \alpha^2 n^2 + (-2\alpha^2 m - 2\alpha q_i - 4\alpha^2)n + \alpha^2 m^2 + (2\alpha q_i + 4\alpha^2)m + (4\alpha^2 - 4\alpha + 4)q_i + 4\alpha^2, i = 2, 3, \dots, n.$$

$$A_\alpha(CT(G)) = \begin{pmatrix} \alpha n I_n + (1-\alpha)A(G) & (1-\alpha)(J_{n \times m} - R(G)) \\ (1-\alpha)(J_{n \times m} - R(G))^T & \alpha(n-2)I_m \end{pmatrix}.$$

因此, 利用引理 5, 可知图  $CT(G)$  的  $A_\alpha$ -特征多项式为

$$\Phi(A_\alpha(CT(G)); x) = \det \begin{pmatrix} (x - \alpha n)I_n - (1-\alpha)A(G) & -(1-\alpha)(J_{n \times m} - R(G)) \\ -(1-\alpha)(J_{n \times m} - R(G))^T & (x - \alpha(n-2))I_m \end{pmatrix} = (x - \alpha(n-2))^m \det(S),$$

其中

$$S = (x - \alpha n)I_n - (1-\alpha)A(G) - \frac{1}{x - \alpha(n-2)}(1 - \alpha)^2 (J_{n \times m} - R(G))(J_{n \times m} - R(G))^T.$$

根据引理 1, 可以得到

$$(1-\alpha)^2 (J_{n \times m} - R(G))(J_{n \times m} - R(G))^T = (1 - \alpha)^2 (m - 2r)J_{n \times n} + (1-\alpha)^2 r I_n + (1-\alpha)^2 A(G).$$

再通过引理 2 和 4, 可以得到

$$\det(S) = \det((x - \alpha n)I_n - (1-\alpha)A(G) -$$

每个点的度为  $r' \geq 0$ . 标记  $G$  和  $G'$  的顶点, 使它们的邻接矩阵  $A(G)$  和  $A(G')$  可交换, 即满足  $A(G)A(G') = A(G')A(G)$ . 因此, 邻接矩阵  $A(G)$  和  $A(G')$  可以用相同的矩阵对角化, 所以在  $\mathbb{R}^n$  中有一组标准正交基  $\{u_1 = \frac{1}{\sqrt{n}}\mathbf{1}_n, u_2, \dots, u_n\}$ , 它们是  $A(G)$  和  $A(G')$  的特征向量.

### 3 补充三角图的 $A_\alpha$ -谱

在这一部分中, 主要考虑了正则连通图的补充三角图  $CT(G)$  的  $A_\alpha$ -特征多项式及其  $A_\alpha$ -谱, 并由此推出一些已有的结论.

**定理 1** 设图  $G$  是有  $n$  个点  $m$  条边的  $r$ -正则连通图, 且  $r \geq 2$ . 如果  $r = q_1 \geq q_2 \geq \dots \geq q_n$  是图  $G$  的邻接谱, 则图  $G$  的补充三角图  $CT(G)$  的  $A_\alpha$ -谱表示如下:

**证明** 根据补充三角图的定义可知  $CT(G)$  的邻接矩阵与度矩阵如下所示:

$$A(CT(G)) = \begin{pmatrix} A(G) & J_{n \times m} - R(G) \\ (J_{n \times m} - R(G))^T & 0 \end{pmatrix},$$

$$D(CT(G)) = \begin{pmatrix} m I_n & 0 \\ 0 & (n-2)I_m \end{pmatrix}.$$

由此可以得到图  $CT(G)$  的  $A_\alpha$ -矩阵为

$$\frac{1}{x - \alpha(n-2)}((1-\alpha)^2(m-2r)J_{n \times n} + (1 - \alpha)^2 r I_n + (1-\alpha)^2 A(G)) = (x - \alpha(n-2))^{-n} \det(\omega_1 I_n - \omega_2 A(G) - \omega_3 J_n) = (x - \alpha(n-2))^{-n} (1 - \omega_3 \Gamma_G(x)) \det(\omega_1 I_n - \omega_2 A(G)). \quad (2)$$

由引理 3 可知

$$\Gamma_G(x) = \frac{n}{\omega_1 - \omega_2 r}.$$

将上式带入式(2), 很容易得到

$$\det(S) = (x - \alpha(n - 2))^{-n} \left( 1 - \omega_3 \frac{n}{\omega_1 - \omega_2 r} \right)$$

$$\det(\omega_1 I_n - \omega_2 A(G)) = (x - \alpha(n - 2))^{-n} (\omega_1 - \omega_2 r - \omega_3 n) \prod_{i=2}^n (\omega_1 - \omega_2 q_i),$$

其中

$$\omega_1 = (x - \alpha m)(x - \alpha(n - 2)) - (1 - \alpha)^2 r,$$

$$\omega_2 = x - \alpha(n - 2) + (1 - \alpha)^2,$$

$$\omega_3 = (1 - \alpha)^2 (2r - m).$$

因此

$$\begin{pmatrix} \alpha(n-2) & \frac{r+(n+m-2)\alpha+\sqrt{\Delta}}{2} & \frac{r+(n+m-2)\alpha-\sqrt{\Delta}}{2} & \frac{\alpha(m+n-2)+q_i+\sqrt{\Delta_i}}{2} & \frac{\alpha(m+n-2)+q_i-\sqrt{\Delta_i}}{2} \\ m-n & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

其中

$$\Delta = r^2 + ((8\alpha^2 - 18\alpha + 8)n + 2\alpha m + 8\alpha^2 - 12\alpha + 8)r + \alpha^2 n^2 + ((-6\alpha^2 + 8\alpha - 4)m - 4\alpha^2)n + \alpha^2 m^2 + 4\alpha^2 m + 4\alpha^2,$$

$$\Delta_i = (4\alpha^2 - 8\alpha^2 + 4)r + \alpha^2 n^2 + (-2\alpha^2 m - 2\alpha q_i - 4\alpha^2)n + \alpha^2 m^2 + (2\alpha q_i + 4\alpha^2)m + (4\alpha^2 - 4\alpha + 4)q_i + 4\alpha^2, i = 2, 3, \dots, n.$$

**例子 1** 设图  $G \cong C_3$ , 根据图 1, 可知图  $CT(C_3)$  共有 6 个顶点. 如果  $C_3$  的邻接特征值为  $q_1 = 2, q_2 = -1, q_3 = -1$ , 那么根据定理 1, 可以很容易得到图  $CT(C_3)$

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{r+\sqrt{r^2+4(2r+mn-2rn)}}{2} & \frac{r-\sqrt{r^2+4(2r+mn-2rn)}}{2} & \frac{q_i+\sqrt{q_i^2+4q_i+4r}}{2} & \frac{q_i-\sqrt{q_i^2+4q_i+4r}}{2} \\ m-n & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

其中  $i = 2, 3, \dots, n$ .

**推论 2**<sup>[11]</sup> 设  $G$  是一个  $r$ -正则连通图, 有  $n$  个点,  $m$  条边. 假设  $2r = v_1 \geq v_2 \geq \dots \geq v_n$  是图  $G$  的无符

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{r+m+n-2+\sqrt{\sigma}}{4} & \frac{r+m+n-2-\sqrt{\sigma}}{4} & \frac{m+n-r-2+v_i+\sqrt{\sigma_i}}{4} & \frac{m+n-r-2+v_i-\sqrt{\sigma_i}}{4} \\ m-n & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

其中

$$\sigma = (r + m + n - 2)^2 - 8r(n - 3),$$

$$\sigma_i = ((m - r) + (n - 2) + v_i)^2 - 4((m - r)(n - 2) + (n - 3)v_i - 2r), i = 2, 3, \dots, n.$$

### 4 叠加图的 $A_\alpha$ -特征多项式

在这节中, 主要考虑两个可交换正则图的叠加图的  $A_\alpha$ -特征多项式问题. 同时, 作为主要结论的应用, 还得到了正则图 Middle 图、全图、拟全图等  $A_\alpha$ -特征多项式.

**定理 2** 设  $G$  和  $G'$  是具有  $n$  个顶点的可交换正

$$\Phi(A_\alpha(CT(G)); x) = (x - \alpha(n - 2))^m \det(S) = (x - \alpha(n - 2))^{m-n} (x^2 + (-r - \alpha n - \alpha m + 2\alpha)x + ((-2\alpha^2 + 5\alpha - 2)n - 2\alpha^2 + 2\alpha - 2)r + (2\alpha^2 - 2\alpha + 1)nm - 2\alpha^2 m) \prod_{i=2}^n (x^2 + (-\alpha n - \alpha m - q_i + 2\alpha)x + (-\alpha^2 + 2\alpha - 1)r + (\alpha^2 m + \alpha q_i)n - 2\alpha^2 m + (-\alpha - 1)q_i).$$

从而可以得到图  $G$  的补充三角图  $CT(G)$  的  $A_\alpha$ -谱如下所示:

的  $A_\alpha$ -特征值为  $2\alpha + 1 \pm 2\sqrt{2\alpha^2 - 3\alpha + 2}$ ,  $\frac{4\alpha - 1 \pm \sqrt{21\alpha^2 - 30\alpha + 13}}{2}$ ,  $\frac{4\alpha - 1 \pm \sqrt{21\alpha^2 - 30\alpha + 13}}{2}$ .

根据式(1)可知, 对于图  $G$ , 当  $\alpha = 0$  时,  $A_\alpha(G) = A(G)$ . 当  $\alpha = \frac{1}{2}$  时,  $A_\alpha(G) = \frac{1}{2}Q(G)$ . 因此, 利用定理 1, 可以推导出如下已知结果.

**推论 1**<sup>[11]</sup> 设  $G$  是一个  $r$ -正则连通图, 有  $n$  个点,  $m$  条边. 假设  $r = q_1 \geq q_2 \geq \dots \geq q_n$  是图  $G$  的邻接谱, 那么图  $G$  的补充三角图  $CT(G)$  的邻接谱表示如下:

号拉普拉斯谱, 那么图  $G$  的补充三角图  $CT(G)$  的无符号拉普拉斯谱表示如下:

则图, 若它们的正则度分别为  $r$  和  $r'$ , 假设  $r = q_1 \geq q_2 \geq \dots \geq q_n$  是图  $G$  的邻接谱,  $r' = q'_1 \geq q'_2 \geq \dots \geq q'_n$  是图  $G'$  的邻接谱. 如果图  $G$  有  $m$  条边, 那么图  $G \times G'$  的  $A_\alpha$ -特征多项式为

$$\Phi(A_\alpha(G \times G'); x) = (x + 2(1 - \alpha) - 2\alpha r)^{m-n} \prod_{i=1}^n [x^2 - ((1 - \alpha)(q'_i + q_i) + \alpha r' + (2\alpha + 1)r + 2\alpha - 2)x + ((q_i - r - 2)q'_i + (-r' - r - 1)q_i + (r + 2)r' + r^2 + r)\alpha^2 + ((4 - 2q_i)q'_i + (r' + r + 2)q_i + (r - 2)r' + r^2)\alpha + (q_i + r - 2)q'_i - q_i - r].$$

**证明** 首先根据两个可交换正则图的叠加图的定义, 可知叠加图  $G \times G'$  的邻接矩阵  $A(G \times G')$  和度对

角矩阵  $D(G \times G')$  如下所示:

$$A(G \times G') = \begin{pmatrix} A(\mathcal{L}(G)) & R(G)^T \\ R(G) & A(G') \end{pmatrix},$$

$$D(G \times G') = \begin{pmatrix} 2rI_m & 0 \\ 0 & (r+r')I_n \end{pmatrix}.$$

接着由式(1),可以得到叠加图  $G \times G'$  的  $A_\alpha$ -矩阵如下:

$$A_\alpha(G \times G') = \begin{pmatrix} 2\alpha rI_m + (1-\alpha)A(\mathcal{L}(G)) & (1-\alpha)R(G)^T \\ (1-\alpha)R(G) & \alpha(r+r')I_n + (1-\alpha)A(G') \end{pmatrix}.$$

因此,图  $G \times G'$  的  $A_\alpha$ -特征多项式为

$$\begin{aligned} \Phi(A_\alpha(G \times G'); x) &= \det(xI_m - A_\alpha(G \times G')) = \\ &= \begin{vmatrix} (x-2\alpha r)I_m - (1-\alpha)A(\mathcal{L}(G)) & -(1-\alpha)R(G)^T \\ -(1-\alpha)R(G) & (x-\alpha(r+r'))I_n - (1-\alpha)A(G') \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} \alpha I_m - (1-\alpha)R(G)^T R(G) & -(1-\alpha)R(G)^T \\ -(1-\alpha)R(G) & (x-\alpha(r+r'))I_n - (1-\alpha)A(G') \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} I_m & -R(G)^T \\ 0 & I_n \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha I_m - (1-\alpha)R(G)^T R(G) & -(1-\alpha)R(G)^T \\ -(1-\alpha)R(G) & (x-\alpha(r+r'))I_n - (1-\alpha)A(G') \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} \alpha I_m & -(x-\alpha(r+r'+1)+1)R(G)^T + (1-\alpha)R(G)^T A(G') \\ -(1-\alpha)R(G) & (x-\alpha(r+r'))I_n - (1-\alpha)A(G') \end{vmatrix} = \\ &= \sigma^m \det \left[ (x-\alpha(r+r'))I_n - (1-\alpha)A(G') - \frac{(1-\alpha)(x-\alpha(r+r'+1)+1)R(G)R(G)^T}{\sigma} + \right. \\ & \left. \frac{(1-\alpha)^2 R(G)R(G)^T A(G')}{\sigma} \right] \text{ (引理 5 矩阵的 Schur 补) } = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \sigma^{m-n} \left| (x-\alpha(r+r'))\sigma I_n - (1-\alpha)\sigma A(G') - (1-\alpha)\sigma(A(G) + rI_n) + (1-\alpha)^2(A(G) + rI_n)A(G') \right| = \\ &= \sigma^{m-n} \det \left[ ((x-\alpha(r+r'))\sigma - (1-\alpha)(x-\alpha(r+r'+1)+1)r)I_n - ((1-\alpha)\sigma - (1-\alpha)^2 r)A(G') - \right. \\ & \left. (1-\alpha)(x-\alpha(r+r'+1)+1)A(G) + (1-\alpha)^2 A(G)A(G') \right], \end{aligned}$$

其中  $\sigma = x + 2(1-\alpha) - 2\alpha r$ .

因为  $G$  和  $G'$  是可交换的图,即满足  $A(G)A(G') = A(G')A(G)$ , 所以存在一个正交特征矩阵  $P = (\frac{1}{\sqrt{n}}\mathbf{1}_n, u_2, \dots, u_n)$ , 使得  $A(G)$  和  $A(G')$  可同时对角化,其中  $\frac{1}{\sqrt{n}}\mathbf{1}_n, u_2, \dots, u_n$  是  $A(G)$  和  $A(G')$  的正交特征向量组. 因此,上式中的行列式等于

$$\begin{aligned} &|P^T| \left| ((x-\alpha(r+r'))\sigma - (1-\alpha)(x-\alpha(r+r'+1)+1)r)I_n - ((1-\alpha)\sigma - (1-\alpha)^2 r)A(G') - \right. \\ & \left. (1-\alpha)(x-\alpha(r+r'+1)+1)A(G) + (1-\alpha)^2 A(G)A(G') \right| |P| = \left| ((x-\alpha(r+r'))\sigma - \right. \\ & \left. (1-\alpha)(x-\alpha(r+r'+1)+1)r)I_n - ((1-\alpha)\sigma - (1-\alpha)^2 r) \right. \\ & \left. P^T A(G') P - (1-\alpha)(x-\alpha(r+r'+1)+1)P^T A(G) P + (1-\alpha)^2 P^T A(G) A(G') P \right| = \\ & \left| ((x-\alpha(r+r'))\sigma - (1-\alpha)(x-\alpha(r+r'+1)+1)r)I_n - ((1-\alpha)\sigma - (1-\alpha)^2 r) \right. \\ & \left. P^T A(G') P - (1-\alpha)(x-\alpha(r+r'+1)+1)P^T A(G) P + \right. \\ & \left. (1-\alpha)^2 P^T A(G) P P^T A(G') P \right|. \end{aligned} \tag{3}$$

值得注意的是,

$$P^T A(G) P = \text{diag}(r = q_1, q_2, \dots, q_n),$$

$$P^T A(G') P = \text{diag}(r' = q'_1, q'_2, \dots, q'_n). \tag{4}$$

所以将式(4)代入式(3),可以得到

$$\begin{aligned} &\prod_{i=1}^n [x^2 - ((1-\alpha)(q'_i + q_i) + \alpha r' + (2\alpha + 1)r + \\ & 2\alpha - 2)x + ((q_i - r - 2)q'_i + (-r' - r - 1)q_i + \\ & (r + 2)r' + r^2 + r)\alpha^2 + ((4 - 2q_i)q'_i + (r' + \\ & r + 2)q_i + (r - 2)r' + r^2)\alpha + (q_i + r - 2)q'_i - \\ & q_i - r]. \end{aligned} \tag{5}$$

最后将式(5)代入多项式  $\Phi(A_\alpha(G \times G'); x)$  中,可以得到

$$\begin{aligned} \Phi(A_\alpha(G \times G'); x) &= (x + 2(1-\alpha) - 2\alpha r)^{m-n} \\ &\prod_{i=1}^n [x^2 - ((1-\alpha)(q'_i + q_i) + \alpha r' + (2\alpha + 1)r + \\ & 2\alpha - 2)x + ((q_i - r - 2)q'_i + (-r' - r - 1)q_i + \\ & (r + 2)r' + r^2 + r)\alpha^2 + ((4 - 2q_i)q'_i + (r' + \\ & r + 2)q_i + (r - 2)r' + r^2)\alpha + (q_i + r - 2)q'_i - \\ & q_i - r]. \end{aligned}$$

**例子 2** 设图  $G, G'$  如图 6 所示,图  $G$  的邻接矩阵的特征值为  $q_1 = 1, q_2 = 1, q_3 = -1, q_4 = -1$ .  $G'$  的邻接矩阵的特征值为  $q_1 = \sqrt{2}, q_2 = 0, q_3 = 0, q_4 = -\sqrt{2}$ . 由定理 2 可得图  $G \times G'$  和  $G' \times G$  的  $A_\alpha$ -特征多项式分别为:

$$\Phi(\mathbf{A}_\alpha(G \times G'; x)) = (x^2 - 5\alpha x + 8\alpha^2 + 4\alpha - 2)^2 (x^2 - (\sqrt{2}\alpha - 7\alpha - \sqrt{2} + 2)x - 4\sqrt{2}\alpha^2 + 12\alpha^2 + 6\sqrt{2}\alpha - 6\alpha - 2)(x^2 - (-\sqrt{2}\alpha - 7\alpha + \sqrt{2} + 2)x + 4\sqrt{2}\alpha^2 + 12\alpha^2 - 6\sqrt{2}\alpha - 6\alpha - 2).$$

$$\Phi(\mathbf{A}_\alpha(G' \times G; x)) = (x^2 - 6\alpha x + 6\alpha^2 + 8\alpha - 2)^2 (x^2 - (\sqrt{2}\alpha - 8\alpha - \sqrt{2} + 1)x - 5\sqrt{2}\alpha^2 + 17\alpha^2 + 2\sqrt{2}\alpha - 5\alpha - 2\sqrt{2} - 2)(x^2 - (-\sqrt{2}\alpha - 8\alpha + \sqrt{2} + 1)x + 5\sqrt{2}\alpha^2 + 17\alpha^2 - 2\sqrt{2}\alpha - 5\alpha + 2\sqrt{2} - 2).$$

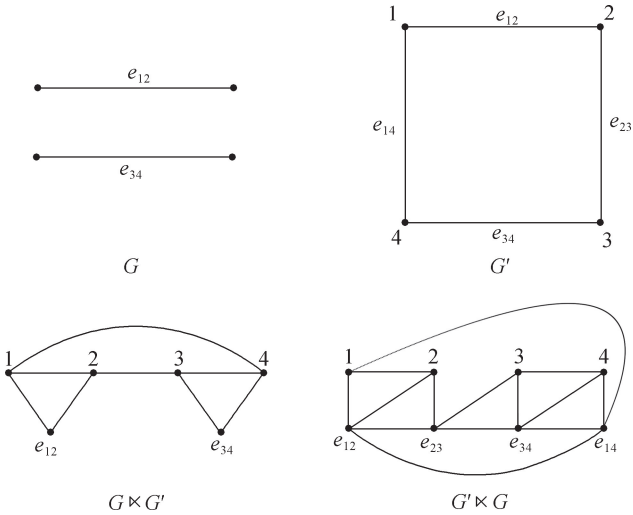


图 6 图  $G, G'$  及其叠加图  $G \times G'$  和  $G' \times G$

Fig. 6 Graph  $G, G'$  and its overlap graph  $G \times G'$  and  $G' \times G$

根据 Middle 图、全图、拟全图和叠加图的定义, 我们可知  $M(G) = G \times nK_1, T(G) = G \times G, QT(G) = G \times \bar{G}$ . 因此, 利用定理 2 不难得出以下重要推论, 这些推论是对正则图的 Middle 图、全图、拟全图等邻接、无符号拉普拉斯谱特征多项式结果的推广.

**推论 3** 设  $G$  是一个具有  $n$  个顶点  $m$  条边的  $r$ -正则图, 若  $r = q_1 \geq q_2 \geq \dots \geq q_n$  是图  $G$  的邻接谱, 那么图  $M(G)$  的  $A_\alpha$ -特征多项式为

$$\Phi(\mathbf{A}_\alpha(M(G)); x) = (x + 2(1 - \alpha) - 2\alpha r)^{m-n} \prod_{i=1}^n [x^2 - (3\alpha r + (1 - \alpha)(q_i + r - 2))x - (1 - \alpha r - \alpha)((1 - \alpha)(q_i + r - 2) + 2(\alpha r + 1 - \alpha))].$$

**推论 4** 设  $G$  是一个具有  $n$  个顶点  $m$  条边的  $r$ -正则图, 若  $r = q_1 \geq q_2 \geq \dots \geq q_n$  是图  $G$  的邻接谱, 那么图  $T(G)$  的  $A_\alpha$ -特征多项式为

$$\Phi(\mathbf{A}_\alpha(T(G)); x) = (x + 2(1 - \alpha) - 2\alpha r)^{m-n} \prod_{i=1}^n [x^2 - (\alpha(3r - 2q_i + 2) + 2q_i + r - 2)x -$$

$$2(1 - \alpha - \alpha r)(2\alpha r + (1 - \alpha)q_i) + (q_i + r)(1 - \alpha)(2\alpha r + \alpha - 1 + (1 - \alpha)q_i)].$$

在给出下面的一些推论之前, 先来回忆一下一些交换图的性质及相关结论. 正则图只跟连通的正则图可交换. 另外, 完全图  $K_n$  跟任意正则的  $n$  阶图可交换, 而完全二部图  $K_{p,p}$  跟任意正则的生成子图可交换<sup>[18]</sup>. 如果图  $G$  是  $n$  个点的  $r$ -正则图, 它的邻接谱为  $r = q_1 \geq q_2 \geq \dots \geq q_n$ , 那么图  $G$  的邻接谱为  $\{n-1-r, -1-q_2, -1-q_3, \dots, -1-q_n\}$ <sup>[4]</sup>. 根据定理 2 及  $QT(G) = G \times \bar{G}$ , 可以得到如下推论.

**推论 5** 如果  $G$  是一个具有  $n$  个顶点  $m$  条边的  $r$ -正则图, 设图  $G$  的邻接谱为  $r = q_1 \geq q_2 \geq \dots \geq q_n$ , 那么图  $QT(G)$  的  $A_\alpha$ -特征多项式为

$$\Phi(\mathbf{A}_\alpha(QT(G)); x) = (x + 2(1 - \alpha) - 2\alpha r)^{m-n} (x^2 - (\alpha(r + 2) + n + r - 3)x + (2\alpha - 2)(r^2 + n) + (2n - 2)r - 2\alpha + 2) \cdot \prod_{i=2}^n [x^2 - (\alpha(n + r + 2) + r - 3)x - ((1 - \alpha)(2\alpha r - \alpha n + \alpha) + (1 - \alpha)^2 r)q_i - (1 - \alpha)^2 q_i^2 - (2 - \alpha - \alpha n)(1 - \alpha)r + (2(1 - \alpha) - 2\alpha r)(1 - \alpha n)].$$

因为完全图  $K_n$  的邻接谱为  $\{n-1, -1, -1, \dots, -1\}$ , 所以根据定理 2, 有以下推论.

**推论 6** 若  $G$  是一个具有  $n$  个顶点  $m$  条边的  $r$ -正则图, 设图  $G$  的邻接谱为  $r = q_1 \geq q_2 \geq \dots \geq q_n$ , 则图  $G \times K_n$  的  $A_\alpha$ -矩阵的特征多项式为

$$\Phi(\mathbf{A}_\alpha(G \times K_n); x) = (x + 2(1 - \alpha) - 2\alpha r)^{m-n} (x^2 - (\alpha(r + 2) + n + 2r - 3)x + 2\alpha r^2 + (2n + 2\alpha - 4)r + (2\alpha - 2)n - 2\alpha + 2) \prod_{i=2}^n [x^2 + ((-2\alpha - 1)r + (\alpha - 1)q_i - \alpha_n - 2\alpha + 3)x + (\alpha^2 + \alpha)r^2 + ((\alpha - \alpha^2)q_i + (\alpha^2 + \alpha)n + \alpha^2 - \alpha - 2)r - ((\alpha - \alpha^2)n - \alpha^2 + 3\alpha - 2)q_i + (2\alpha^2 - 2\alpha)n - 2\alpha + 2].$$

已知完全二部图  $K_{p,p}$  的邻接谱为  $\{p, 0, \dots, 0, -p\}$ , 那么根据定理 2, 有以下结论.

**推论 7** 设  $G$  是完全二部图  $K_{p,p}$  的  $r$ -正则生成子图, 若图  $G$  有  $m$  条边, 并且它的邻接谱为  $r = q_1 \geq q_2 \geq \dots \geq q_{2p} = -r$ , 那么图  $G \times K_{p,p}$  的  $A_\alpha$ -特征多项式为

$$\Phi(\mathbf{A}_\alpha(G \times K_{p,p}); x) = (x + 2(1 - \alpha) - 2\alpha r)^{p(r-2)} (x^2 - ((\alpha + 2)r + 2\alpha + p - 2)x + 2\alpha(r + p) + 2rp - 2r - 2p) \cdot (x^2 + (p + 2 - \alpha(2p + 3r - 2))x + 2p - 2\alpha(2p + r + (r + 1)(p - 2\alpha p - \alpha r))) \cdot \prod_{i=3}^{2p} [x^2 + ((-2\alpha - 1)r +$$

$$(\alpha - 1)q_i - \alpha p - 2\alpha + 2)x + (\alpha^2 + \alpha)r^2 + ((\alpha - \alpha^2)q_i + (\alpha^2 + \alpha)p + \alpha^2 - 1)r + ((\alpha - \alpha^2)p - \alpha^2 + 2\alpha - 1)q_i + (2\alpha^2 - 2\alpha)p].$$

### 参考文献:

- [1] CVETKOVIĆ D, SIMIĆ S. Graph spectra in computer science[J]. *Linear Algebra Appl*, 2011, 434: 1545-1562.
- [2] NIKIFOROV V. Merging the  $A$ - and  $Q$ -spectral theories [J]. *Appl Anal Discrete Math*, 2017, 11: 81-107.
- [3] NIKIFOROV V, PAST'EN G, ROJO O, et al. On the  $\alpha$ -spectra of trees [J]. *Linear Algebra Appl*, 2017, 520: 286-305.
- [4] CHEN Y Y, LI D, WANG Z W, et al.  $A_\alpha$ -spectral radius of the second power of a graph[J]. *Appl Math Comput*, 2019, 359: 418-425.
- [5] TAHIR M A, ZHANG X D. Coronae graphs and their  $\alpha$ -eigenvalues[J]. *Bull Malays Math Sci Soc*, 2020, 43 (4): 2911-2927.
- [6] ROJO O. The maximal  $\alpha$ -index of trees with  $\alpha$  pendent vertices and its computation [J]. *Electron J Linear Algebra*, 2020, 36: 38-46.
- [7] TIAN G X, CHEN Y X, CUI S Y. The extremal  $\alpha$ -index of graphs with no 4-cycle and 5-cycle[J]. *Linear Algebra Appl*, 2021, 619: 160-175.
- [8] WANG S, WONG D, TIAN F L. Bounds for the largest and the smallest  $A_\alpha$ -eigenvalues of a graph in terms of vertex degrees[J]. *Linear Algebra Appl*, 2020, 590: 210-223.
- [9] YU Z Q, KANG L Y, LIU L L, et al. The extremal  $\alpha$ -index of outerplanar and planar graphs[J]. *Appl Math Comput*, 2019, 343: 90-99.
- [10] CVETKOVIĆ D M, ROWLINSON P, SIMIĆ H. An introduction to the theory of graph spectra [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2010.
- [11] WEI J, WANG J. Spectra of complemented triangulation graphs[J]. *Mathematics*, 2022, 10 (17): 3168.
- [12] SASTRY D V S, RAJU B S P. Graph equations for line graphs, total graph, middle graphs, and quasi-total graphs[J]. *Discrete Math*, 1984, 48: 113-119.
- [13] SOMODI M, BURKE K, TODD J. On a construction using commuting regular graphs [J]. *Discrete Math*, 2017, 304: 532-540.
- [14] AKBARI S, MOAZAMI F, Mohammadian A. Commutativity of the adjacency matrices of graphs[J]. *Discrete Math*, 2009, 309: 595-600.
- [15] CUI S Y, TIAN G X. The spectrum and the signless laplacian spectrum of coronae[J]. *Linear Algebra Appl*, 2021, 437: 1692-1703.
- [16] LIU X, ZHANG Z. Spectra of subdivision-vertex join and subdivision-edge join of two graphs[J]. *Bull Malays Math Sci Soc*, 2019, 42: 15-31.
- [17] ZHANG F. The schur complement and its applications [M]. New York: Springer, 2005.
- [18] HEINZE A. Applications of Schur rings in algebraic combinatorics: graphs, partial difference sets and cyclotomic schemes[D]. Oldenburg: Universitat Oldenbu, 2001.

(责任编辑:汪 军)