

一类新的 λ -Bernstein 算子的逼近性质

周国荣¹, 陈淑妮^{2*}, 赵国平¹

(1. 厦门理工学院数学与统计学院, 福建 厦门 361024; 2. 厦门大学数学科学学院, 福建 厦门 361005)

摘要: [目的] 旨在构造一类新的带有形状参数的 λ -Bernstein 算子, 并研究其逼近性质, 以提升 Bernstein 型算子的逼近能力和适用范围. [方法] 通过引入改进的 Bézier 调配函数, 构造新的 λ -Bernstein 算子, 并对其矩量和中心矩量进行详细估计. 进一步推导该算子的局部逼近定理、Lipschitz 连续函数的收敛定理及 Voronovskaja 型渐近展开公式. 此外, 通过数值实验分析该算子的实际逼近效果和误差上界. [结果] 研究表明, 与 Cai 等提出的 λ -Bernstein 算子相比, 本文构造的算子在逼近速率和误差上界方面均表现出更优的性能. 特别地, 在不同参数设定下, 该算子的逼近误差上界低于已有方法. [结论] 本文提出的改进型 λ -Bernstein 算子在理论分析和数值实验中均展现出优越的逼近能力, 能够有效提高函数逼近的精度, 为 Bernstein 型逼近算子的研究和应用提供了新的思路和方法.

关键词: λ -Bernstein 算子; 矩量; 局部逼近定理; Lipschitz 类; Voronovskaja 渐近公式

中图分类号: O 174. 41

文献标志码: A

文章编号: 0438-0479(2025)04-0717-06

Approximation properties of a new type of λ -Bernstein operators

ZHOU Guorong¹, CHEN Shuni^{2*}, ZHAO Guoping¹

(1. School of Mathematics and Statistics, Xiamen University of Technology, Xiamen 361024, China;

2. School of Mathematical Sciences, Xiamen University, Xiamen 361005, China)

Abstract: [Objective] In this study, we aim to construct a new type of λ -Bernstein operators with shape parameters and analyze their approximation properties to enhance the approximation capability and applicability of Bernstein-type operators. [Methods] Introducing an improved Bézier blending function, we construct a new λ -Bernstein operator and conduct a detailed estimation of its moments and central counterparts. Furthermore, we derive the local approximation theorem, the convergence theorem for Lipschitz continuous functions, and the Voronovskaja-type asymptotic expansion formula for the proposed operator. Finally, numerical experiments are conducted to analyze the practical approximation performance and error bounds of the operator. [Results] Results indicate that, compared with the λ -Bernstein operator proposed by Cai et al., the proposed operator demonstrates superior performances in terms of approximation rates and error bounds. Specifically, under different parameter settings, the approximation error bound of the proposed operator is lower than that of existing methods. [Conclusion] The improved λ -Bernstein operator proposed herein exhibits excellent approximation capability in both theoretical analyses and numerical experiments. It effectively enhances the accuracy of function approximation and provides new insights and methods for the research and application of Bernstein-type approximation operators.

Keywords: λ -Bernstein operators; moment; local approximation theorem; Lipschitz class; Voronovskaja asymptotic formula

对于定义在 $[0, 1]$ 上的连续函数 f , Cai 等^[1] 提出了一种新的 Bernstein 型算子, 被称为 λ -Bernstein 算子:

$$B_{n,\lambda}(f;x) = \sum_{k=0}^n \tilde{b}_{n,k}(\lambda;x) f\left(\frac{k}{n}\right), \quad (1)$$

其中 $\tilde{b}_{n,k}(\lambda;x)$ 是由 Ye 等^[2] 提出的一种带有形状参

收稿日期: 2024-03-07 录用日期: 2024-07-13

基金项目: 国家自然科学基金(12371100); 福建省自然科学基金(2021J01783)

* 通信作者: snchen@xmu.edu.cn

引文格式: 周国荣, 陈淑妮, 赵国平. 一类新的 λ -Bernstein 算子的逼近性质[J]. 厦门大学学报(自然科学版), 2025, 64(2): 717-722.

Citation: ZHOU G R, CHEN S N, ZHAO G P. Approximation properties of a new type of λ -Bernstein operators[J]. J Xiamen Univ Nat Sci, 2025, 64(2): 717-722. (in Chinese)



数 $\lambda \in [-1, 1]$ 的 Bézier 调配函数. 该调配函数的定义如下:

$$\begin{cases} \tilde{b}_{n,0}(\lambda; x) = b_{n,0}(x) - \frac{\lambda}{n+1}b_{n+1,1}(x), \\ \tilde{b}_{n,k}(\lambda; x) = b_{n,k}(x) + \lambda\left(\frac{n-2k+1}{n^2-1}b_{n+1,k}(x) - \frac{n-2k-1}{n^2-1}b_{n+1,k+1}(x)\right), (1 \leq k \leq n-1), \\ \tilde{b}_{n,n}(\lambda; x) = b_{n,n}(x) - \frac{\lambda}{n+1}b_{n+1,n}(x), \end{cases}$$

其中 $b_{n,k}(x) = \binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$ 是经典的 Bernstein

基函数, $\binom{n}{k}$ 是二项式系数, 即组合数. 近年来, 众多研究人员对 λ -Bernstein 算子的相关问题进行了研究^[3-6]. 本文的目的是构造一类新的 λ -Bernstein 算子, 并对其矩量、中心矩量、局部逼近定理、Lipschitz 连续函数的收敛定理和 Voronovskaja 型渐近展开式进行研究.

1 一类新的 λ -Bernstein 算子

首先, 提出一种新的带有形状参数 λ 的 Bézier 调配函数:

$$\begin{cases} \hat{b}_{n,0}(\lambda; x) = b_{n,0}(x) - \frac{\lambda}{n+1}b_{n+1,1}(x), \\ \hat{b}_{n,k}(\lambda; x) = b_{n,k}(x) + \frac{\lambda}{n+1}(b_{n+1,k}(x) - b_{n+1,k+1}(x)), (1 \leq k \leq n-1), \\ \hat{b}_{n,n}(\lambda; x) = b_{n,n}(x) + \frac{\lambda}{n+1}b_{n+1,n}(x), \end{cases} \quad (2)$$

其中 $x \in [0, 1], \lambda \in [-1, 1]$. 根据经典 Bernstein 基函数的性质和式 (2) 的定义, 可以得到下列关于 $\hat{b}_{n,k}(\lambda; x)$ 性质的定理.

定理 1 令 $x \in [0, 1], \lambda \in [-1, 1]$, 则 $\hat{b}_{n,k}(\lambda; x)$ 具有下列性质:

- i) 非负性: $\hat{b}_{n,k}(\lambda; x) \geq 0, k = 0, 1, \dots, n.$
- ii) 单位分解性: $\sum_{k=0}^n \hat{b}_{n,k}(\lambda; x) = 1.$
- iii) 端点性质:

$$\hat{b}_{n,k}(\lambda; 0) = \begin{cases} 1, & k = 0, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

$$\hat{b}_{n,k}(\lambda; 1) = \begin{cases} 1, & k = n, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

根据这个新的带有形状参数 λ 的 Bézier 调配函数 $\hat{b}_{n,k}(\lambda; x)$, 对于任意的 $f \in C[0, 1]$, 引入一类新的 λ -

Bernstein 算子, 如式 (3) 所示:

$$\hat{B}_{n,\lambda}(f; x) = \sum_{k=0}^n \hat{b}_{n,k}(\lambda; x)f\left(\frac{k}{n}\right). \quad (3)$$

注记 1 由 $\hat{b}_{n,k}(\lambda; x)$ 的非负性和单位分解性可得, $\hat{B}_{n,\lambda}(f; x)$ 是正线性算子.

2 一些引理

在这一节中, 将估计算子 $\hat{B}_{n,\lambda}(f; x)$ 的矩量和中心矩量. 根据式 (3) 的定义, 通过直接计算可得到下列引理.

引理 1 记 $e_i(t) = t^i (i = 0, 1, \dots, 4)$, 则对于算子 $\hat{B}_{n,\lambda}(f; x), x \in [0, 1]$, 以下等式成立:

$$\begin{aligned} \hat{B}_{n,\lambda}(e_0; x) &= 1; \\ \hat{B}_{n,\lambda}(e_1; x) &= x + \lambda \frac{1-x^{n+1} - (1-x)^{n+1}}{n(n+1)}; \\ \hat{B}_{n,\lambda}(e_2; x) &= x^2 + \frac{x(1-x)}{n} + \lambda \left[\frac{2x(1-x^n)}{n^2} - \frac{1-x^{n+1} - (1-x)^{n+1}}{n^2(n+1)} \right]; \\ \hat{B}_{n,\lambda}(e_3; x) &= x^3 + \frac{3x^2(1-x)}{n} + \frac{x-3x^2+2x^3}{n^2} + \lambda \left[\frac{3x^2(1-x^{n-1})}{n^2} + \frac{1-x^{n+1} - (1-x)^{n+1}}{n^3(n+1)} \right]; \\ \hat{B}_{n,\lambda}(e_4; x) &= x^4 + \frac{6x^3(1-x)}{n} + \frac{7x^2-18x^3+11x^4}{n^2} + \frac{x-7x^2+12x^3-6x^4}{n^3} + \lambda \left[\frac{4x^3(1-x^{n-2})}{n^2} + \frac{6x^2(1-x^{n-1}) - 4x^3(1-x^{n-2})}{n^3} + \frac{2x(1-x^n)}{n^4} - \frac{1-x^{n+1} - (1-x)^{n+1}}{n^4(n+1)} \right]. \end{aligned}$$

根据引理 1 的结论, 结合算子 $\hat{B}_{n,\lambda}(f; x)$ 的性质可得下列引理.

引理 2 记 $\Phi_x^k(t) = (t-x)^k (k = 1, 2, 4)$, 则对于算子 $\hat{B}_{n,\lambda}(f; x), x \in [0, 1]$, 以下等式成立:

$$\begin{aligned} \hat{B}_{n,\lambda}(\Phi_x^1; x) &= \lambda \frac{1-x^{n+1} - (1-x)^{n+1}}{n(n+1)}, \\ \hat{B}_{n,\lambda}(\Phi_x^2; x) &= \frac{x(1-x)}{n} + \lambda \left[\frac{2x(1-x^n)}{n^2} - \frac{2x(1-x^{n+1} - (1-x)^{n+1})}{n(n+1)} - \frac{1-x^{n+1} - (1-x)^{n+1}}{n^2(n+1)} \right], \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{B}_{n,\lambda}(\Phi_x^1; x) &= 0, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \hat{B}_{n,\lambda}(\Phi_x^2; x) = x(1-x), \quad (5)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \hat{B}_{n,\lambda}(\Phi_x^4; x) = 3x^2 - 6x^3 + 3x^4. \quad (6)$$

由于 $x \in [0, 1]$, 因而有 $1 - x^{n+1} - (1-x)^{n+1} \geq 0$.

又因为 $\lambda \in [-1, 1]$, 因此

$$\hat{B}_{n,\lambda}(\Phi_x^1; x) = \lambda \frac{1 - x^{n+1} - (1-x)^{n+1}}{n(n+1)} \leq \frac{1 - x^{n+1} - (1-x)^{n+1}}{n(n+1)} := \varphi_n(x); \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \hat{B}_{n,\lambda}(\Phi_x^2; x) &\leq \frac{x(1-x)}{n} + \frac{2x(1-x^n)}{n^2} + \\ &\frac{2x(1-x^{n+1} - (1-x)^{n+1})}{n(n+1)} + \\ &\frac{1 - x^{n+1} - (1-x)^{n+1}}{n^2(n+1)} := \psi_n(x). \end{aligned} \quad (8)$$

3 主要定理及其证明

为了介绍接下来的收敛定理, 回顾以下概念. 记 $C(I)$ 为定义在 $I = [0, 1]$ 上的实值连续函数空间. 对于 $f \in C(I)$,

i) 范数: $\|f\| = \sup_{x \in I} |f(x)|$.

ii) 连续模:

$$\omega(f; \delta) = \sup_{0 < h \leq \delta} \sup_{x, x+h \in I} |f(x+h) - f(x)|.$$

iii) 二阶光滑模:

$$\omega_2(f; \delta) = \sup_{0 < h \leq \delta} \sup_{x, x+h, x+2h \in I} |f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)|.$$

iv) Peetre K -泛函:

$$K_2(f; \delta) = \inf_{g \in C^2(I)} \{ \|f - g\| + \|g''\| \}.$$

其中 $\delta > 0, C^2(I) = \{g \in C(I) : g', g'' \in C(I)\}$. 由文献[7]可知, 存在常数 $C > 0$, 使得

$$K_2(f; \delta) \leq C\omega_2(f; \sqrt{\delta}). \quad (9)$$

首先, 给出算子 $\hat{B}_{n,\lambda}(f; x)$ 的局部逼近定理及其证明.

定理 2 设 f 是 I 上的绝对连续函数, 则有

$$\begin{aligned} |\hat{B}_{n,\lambda}(f; x) - f(x)| &\leq \\ C\omega_2\left(f; \frac{1}{2} \sqrt{\psi_n(x) + \varphi_n^2(x)}\right) &+ \omega(f; \varphi_n(x)). \end{aligned}$$

证明 记 $\eta_n^1 = x + \lambda \frac{1 - x^{n+1} - (1-x)^{n+1}}{n(n+1)}$. 对于

$f \in C(I)$, 构造辅助算子

$$\bar{\mathfrak{B}}_{n,\lambda}(f; x) = \hat{B}_{n,\lambda}(f; x) - f(\eta_n^1(x)) + f(x). \quad (10)$$

容易得到 $\bar{\mathfrak{B}}_{n,\lambda}(1; x) = 1, \bar{\mathfrak{B}}_{n,\lambda}(t; x) = x$. 令 $g \in C^2(I)$, 根据 Taylor 展开式, 得到

$$g(t) = g(x) + g'(x)(t-x) + \int_x^t (t-u)g''(u)du.$$

将算子 $\bar{\mathfrak{B}}_{n,\lambda}$ 作用在 $g(t)$, 得到

$$\begin{aligned} \bar{\mathfrak{B}}_{n,\lambda}(g; x) &= g(x) + \\ \bar{\mathfrak{B}}_{n,\lambda}\left(\int_x^t (t-u)g''(u)du; x\right). \end{aligned}$$

因而, 根据三角不等式、式(7)和(8)得

$$\begin{aligned} |\bar{\mathfrak{B}}_{n,\lambda}(g; x) - g(x)| &\leq \\ \left| \hat{B}_{n,\lambda}\left(\int_x^t (t-u)g''(u)du; x\right) \right| &+ \\ \left| \int_x^{\eta_n^1(x)} (\eta_n^1(x) - u)g''(u)du \right| &\leq \\ \hat{B}_{n,\lambda}\left(\left|\int_x^t (t-u)|g''(u)|du\right|; x\right) &+ \\ \int_x^{\eta_n^1(x)} |\eta_n^1(x) - u||g''(u)|du &\leq \\ [\hat{B}_{n,\lambda}((t-x)^2; x) + (\eta_n^1(x) - x)^2] \|g''\| &\leq \\ [\psi_n(x) + \varphi_n^2(x)] \|g''\|. \end{aligned} \quad (11)$$

同时, 由式(10)得

$$\begin{aligned} |\bar{\mathfrak{B}}_{n,\lambda}(f; x)| &\leq |\hat{B}_{n,\lambda}(f; x)| + 2\|f\| \leq \\ \hat{B}_{n,\lambda}(1; x) \|f\| + 2\|f\| &= 3\|f\|. \end{aligned} \quad (12)$$

故, 由式(10)、(11)和(12)得

$$\begin{aligned} |\hat{B}_{n,\lambda}(f; x) - f(x)| &\leq |\bar{\mathfrak{B}}_{n,\lambda}(f - g; x)| + \\ |f(x) - g(x)| &+ |\bar{\mathfrak{B}}_{n,\lambda}(g; x) - g(x)| + \\ |f(\eta_n^1(x)) - f(x)| &\leq 4\|f - g\| + [\psi_n(x) + \\ \varphi_n^2(x)] \|g''\| &+ \omega(f, \varphi_n(x)). \end{aligned} \quad (13)$$

对式(13)右端取所有 $g \in C^2(I)$ 的下确界, 得到

$$\begin{aligned} |\hat{B}_{n,\lambda}(f; x) - f(x)| &\leq \\ 4K_2\left(f; \frac{\psi_n(x) + \varphi_n^2(x)}{4}\right) &+ \omega(f; \varphi_n(x)). \end{aligned}$$

进一步, 由式(9)得到

$$\begin{aligned} |\hat{B}_{n,\lambda}(f; x) - f(x)| &\leq \\ C\omega_2\left(f; \frac{1}{2} \sqrt{\psi_n(x) + \varphi_n^2(x)}\right) &+ \omega(f; \varphi_n(x)). \end{aligned}$$

其中, C 是一个正常数. 定理 2 证毕.

推论 1 由于当 $x \in I$, 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = 0$,

$\lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n(x) = 0$, 所以对于在 I 上绝对连续的任意函数 f ,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \omega(f; \varphi_n(x)) &= 0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \omega_2\left(f; \frac{1}{2} \sqrt{\psi_n(x) + \varphi_n^2(x)}\right) &= 0. \end{aligned} \quad (14)$$

因此, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 算子 $\hat{B}_{n,\lambda}(f; x)$ 一致收敛于 f .

接下来, 利用 Lipschitz 类 $\text{Lip}_M(\alpha)$ 研究算子 $\hat{B}_{n,\lambda}(f; x)$ 的收敛阶, 其中 $M > 0$ 且 $0 < \alpha \leq 1$. 若函数 $f \in \text{Lip}_M(\alpha)$, 则满足不等式

$$|f(y) - f(x)| \leq M|y - x|^\alpha, x, y \in \mathbb{R}.$$

定理 3 令 $f \in \text{Lip}_M(\alpha), x \in [0, 1]$, 则有

$$| \hat{B}_{n,\lambda}(f;x) - f(x) | \leq M[\psi_n(x)]^{\frac{\alpha}{2}}.$$

证明 由于 $\hat{B}_{n,\lambda}(f;x)$ 是正线性算子, 所以

$$| \hat{B}_{n,\lambda}(f;x) - f(x) | \leq \hat{B}_{n,\lambda}(|f(t) - f(x)|; x) \leq M \sum_{k=0}^n \hat{b}_{n,k}(\lambda;x) \left| \frac{k}{n} - x \right|^{\alpha} = M \sum_{k=0}^n \left[\hat{b}_{n,k}(\lambda;x) \left(\frac{k}{n} - x \right)^2 \right]^{\frac{\alpha}{2}} [\hat{b}_{n,k}(\lambda;x)]^{\frac{2-\alpha}{2}}.$$

利用 Hölder 不等式和式(8), 得到

$$| \hat{B}_{n,\lambda}(f;x) - f(x) | \leq M \left[\sum_{k=0}^n \hat{b}_{n,k}(\lambda;x) \left(\frac{k}{n} - x \right)^2 \right]^{\frac{\alpha}{2}} \left[\sum_{k=0}^n \hat{b}_{n,k}(\lambda;x) \right]^{\frac{2-\alpha}{2}} = M [\hat{B}_{n,\lambda}((t-x)^2;x)]^{\frac{\alpha}{2}} \leq M[\psi_n(x)]^{\frac{\alpha}{2}}.$$

因此, 定理 3 证毕.

最后, 给出算子 $\hat{B}_{n,\lambda}(f;x)$ 的 Voronovskaja 型渐近展开式.

定理 4 设 $f \in C^2(I)$, 对于算子 $\hat{B}_{n,\lambda}(f;x)$ 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(\hat{B}_{n,\lambda}(f;x) - f(x)) = \frac{x(1-x)}{2} f''(x).$$

证明 对于任意给定的 $x \in [0, 1]$, 由 Taylor 公式得

$$f(t) = f(x) + f'(x)(t-x) + \frac{1}{2} f''(x)(t-x)^2 + r(t;x)(t-x)^2, \tag{15}$$

其中, $r(t;x) \in C(I)$ 是 Peano 余项, 而且满足 $\lim_{t \rightarrow x} r(t;x) = 0$. 将算子 $\hat{B}_{n,\lambda}$ 作用在式(15)两边, 得

$$n(\hat{B}_{n,\lambda}(f;x) - f(x)) = nf'(x)\hat{B}_{n,\lambda}(\Phi_x^1;x) + \frac{n}{2} f''(x)\hat{B}_{n,\lambda}(\Phi_x^2;x) + n\hat{B}_{n,\lambda}(r(t;x)\Phi_x^2;x).$$

由 Cauchy-Schwartz 不等式, 得到

$$n\hat{B}_{n,\lambda}(r(t;x)\Phi_x^2;x) \leq \sqrt{\hat{B}_{n,\lambda}(r^2(t;x);x)} \cdot \sqrt{n^2 \hat{B}_{n,\lambda}(\Phi_x^4;x)}.$$

由式(6)和 $\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{B}_{n,\lambda}(r^2(t;x);x) = r^2(x;x) = 0$, 可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n\hat{B}_{n,\lambda}(r(t;x)\Phi_x^2;x) = 0.$$

因而, 由式(4)和(5)得到

表 1 n 和 λ 取不同值时算子 $\hat{B}_{n,\lambda}(f;x)$ 逼近 $f(x) = (x-0.25)\sin(2\pi x)$ 的误差上界

Tab. 1 The approximation error upper bound of $\hat{B}_{n,\lambda}(f;x)$ on $f(x) = (x-0.25)\sin(2\pi x)$ with different values of n, λ

λ	$\ \hat{B}_{n,\lambda}(f;x) - f(x) \ _{\infty}$				
	$n = 100$	$n = 200$	$n = 300$	$n = 500$	$n = 1000$
-1.0	0.019 235 91	0.009 739 17	0.006 519 68	0.003 924 72	0.001 967 19
-0.5	0.019 236 40	0.009 738 46	0.006 519 24	0.003 924 52	0.001 967 13

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n(\hat{B}_{n,\lambda}(f;x) - f(x)) &= \\ \lim_{n \rightarrow \infty} nf'(x)\hat{B}_{n,\lambda}(\Phi_x^1;x) &+ \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2}\hat{B}_{n,\lambda}(\Phi_x^2;x)f''(x) &= \\ \frac{x(1-x)}{2}f''(x). \end{aligned}$$

定理 4 证毕.

4 数值实验

在本节中, 给出若干个图像和数值逼近误差上界的例子来展示算子 $\hat{B}_{n,\lambda}(f;x)$ 的收敛性.

例 1 取 $f(x) = (x-0.25)\sin(2\pi x)$, 图 1 给出了 $f(x)$ 和 $\lambda=1, n$ 分别为 10, 50, 100 的算子 $\hat{B}_{n,\lambda}(f;x)$ 对应曲线图像, 展示了不同 n 取值时, 算子 $\hat{B}_{n,\lambda}(f;x)$ 对目标函数 $f(x)$ 的逼近曲线. 当 $n=10$ 时, 逼近曲线偏离目标函数较明显, 而当 n 增加到 50 或 100 时, 曲线明显地逼近目标曲线, 表明算子 $\hat{B}_{n,\lambda}(f;x)$ 收敛性良好. 表 1 给出了不同 λ 和 n 的取值对应的逼近误差上界 $\| \hat{B}_{n,\lambda}(f;x) - f(x) \|_{\infty}$. 从表 1 中可以看出, 随着 n 由 100 增加到 1 000, 逼近误差界显著下降. 不同的 λ 取值下, 逼近误差界略有差异, 但整体趋势相似, 这表明 λ 参数的选择会影响逼近精度, 在实际应用中可以优化该参数以提高逼近效果.

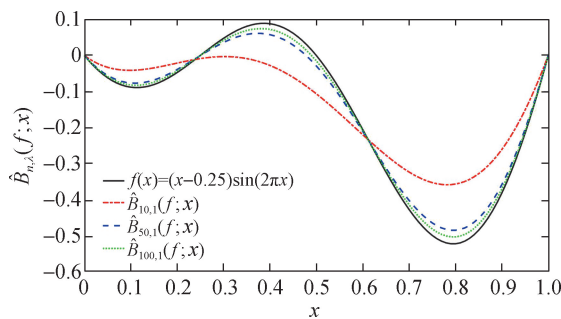


图 1 算子 $\hat{B}_{n,\lambda}(f;x)$ 在 $\lambda=1, f(x) = (x-0.25)\sin(2\pi x)$ 时的逼近趋势

Fig. 1 The approximation trend of operators $\hat{B}_{n,\lambda}(f;x)$ when $\lambda=1, f(x) = (x-0.25)\sin(2\pi x)$

续表

λ	$\ \hat{B}_{n,\lambda}(f;x) - f(x)\ _\infty$				
	$n = 100$	$n = 200$	$n = 300$	$n = 500$	$n = 1000$
0.0	0.019 236 90	0.009 737 75	0.006 518 80	0.003 924 33	0.001 967 08
0.5	0.019 237 39	0.009 737 04	0.006 518 36	0.003 924 13	0.001 967 02
1.0	0.019 237 88	0.009 736 33	0.006 517 92	0.003 923 93	0.001 966 97

注:粗体表示最优值.

例 2 取 $f(x) = 1 - \cos(4e^x)$, 图 2 给出了 $f(x)$ 和 $\lambda = -1, n$ 分别为 10, 50, 100 的算子 $\hat{B}_{n,\lambda}(f;x)$ 对应曲线图像. 表 2 给出了不同 λ 和 n 的取值对应的逼近误差上界 $\|\hat{B}_{n,\lambda}(f;x) - f(x)\|_\infty$. 图 2 表明随着 n 增加, 逼近效果逐步提升, 逼近于目标函数. 逼近误差界显著减小, 与例 1 结果一致, 验证了该算子良好的收敛性. 同时, λ 的选择对逼近误差界有一定影响, 适当调整 λ 可以进一步优化逼近精度. 表 3 给出了在相同目标函数下, 式(1)定义的传统 λ -Bernstein 算子 $B_{n,\lambda}(f;x)$ 的逼近误差界 $\|B_{n,\lambda}(f;x) - f(x)\|_\infty$. 通过比较表 2 与表 3 的数据, 改进型算子 $\hat{B}_{n,\lambda}(f;x)$ 在相同阶数 n 下, 通过优化 λ 取值, 其逼近误差界始终低于传统 λ -Bernstein 算子 $B_{n,\lambda}(f;x)$, 表明本文方法在逼近精度上具有优势.

综合例 1 和例 2, 本文构造的新型 λ -Bernstein 算子 $\hat{B}_{n,\lambda}(f;x)$ 在不同类型的连续函数上均表现出优秀

的逼近性能, 误差更小. 说明通过构造新的 Bézier 调配函数改进 λ -Bernstein 算子, 能够在保持 Bernstein 型算子优良性质的同时, 提高逼近精度, 使其在实际应用中更具优势.

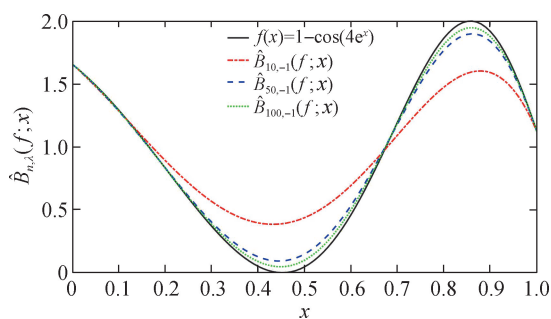


图 2 算子 $\hat{B}_{n,\lambda}(f;x)$ 在 $\lambda = -1, f(x) = 1 - \cos(4e^x)$ 时的逼近趋势

Fig. 2 The approximation trend of operators $\hat{B}_{n,\lambda}(f;x)$ when $\lambda = -1, f(x) = 1 - \cos(4e^x)$

表 2 n 和 λ 取不同值时算子 $\hat{B}_{n,\lambda}(f;x)$ 逼近 $f(x) = 1 - \cos(4e^x)$ 的误差上界

Tab. 2 The approximation error upper bound of $\hat{B}_{n,\lambda}(f;x)$ on $f(x) = 1 - \cos(4e^x)$ with different values of n, λ

λ	$\ \hat{B}_{n,\lambda}(f;x) - f(x)\ _\infty$				
	$n = 100$	$n = 200$	$n = 300$	$n = 500$	$n = 1\ 000$
-1.0	0.054 222 40	0.027 546 31	0.018 461 58	0.011 123 84	0.005 579 55
-0.5	0.054 175 45	0.027 531 32	0.018 454 42	0.011 121 12	0.005 578 84
0.0	0.054 128 51	0.027 516 33	0.018 447 27	0.011 118 40	0.005 578 13
0.5	0.054 081 57	0.027 501 35	0.018 440 12	0.011 115 68	0.005 577 43
1.0	0.054 034 62	0.027 486 36	0.018 432 96	0.011 112 96	0.005 576 72

注:粗体表示最优值.

表 3 n 和 λ 取不同值时算子 $B_{n,\lambda}(f;x)$ 逼近 $f(x) = 1 - \cos(4e^x)$ 的误差上界

Tab. 3 The approximation error upper bound of $B_{n,\lambda}(f;x)$ on $f(x) = 1 - \cos(4e^x)$ with different values of n, λ

λ	$\ B_{n,\lambda}(f;x) - f(x)\ _\infty$				
	$n = 100$	$n = 200$	$n = 300$	$n = 500$	$n = 1\ 000$
-1.0	0.054 084 93	0.027 498 49	0.018 438 29	0.011 114 86	0.005 577 19
-0.5	0.054 106 72	0.027 507 41	0.018 442 78	0.011 116 63	0.005 577 66
0.0	0.054 128 51	0.027 516 33	0.018 447 27	0.011 118 40	0.005 578 14

续表

λ	$\ B_{n,\lambda}(f;x) - f(x)\ _\infty$				
	$n = 100$	$n = 200$	$n = 300$	$n = 500$	$n = 1\ 000$
0.5	0.054 150 30	0.027 525 26	0.018 451 76	0.011 120 17	0.005 578 60
1.0	0.054 172 09	0.027 534 18	0.018 456 25	0.011 121 94	0.005 579 08

注:粗体表示最优值.

5 结 论

本文首先介绍了一种新的带形状参数的 Bézier 调配函数 $\hat{b}(\lambda;x)$, 以此引入了一类新的 λ -Bernstein 算子 $\hat{B}_{n,\lambda}(f;x)$. 然后,通过对算子 $\hat{B}_{n,\lambda}(f;x)$ 的矩量和中心矩量的估计,分别得到 $\hat{B}_{n,\lambda}(f;x)$ 的局部逼近定理、Lipschitz 连续函数的收敛定理和 Voronovskaja 型渐近展开公式. 最后,通过若干数值例子给出算子 $\hat{B}_{n,\lambda}(f;x)$ 对不同函数的收敛效果和数值逼近误差上界,得到在逼近某些函数时,算子 $\hat{B}_{n,\lambda}(f;x)$ 的逼近误差上界比算子 $B_{n,\lambda}(f;x)$ 的逼近误差上界小.

参考文献:

[1] CAI Q B, LIAN B Y, ZHOU G R. Approximation properties of λ -Bernstein operators[J]. Journal of Inequalities and Applications, 2018, 2018(1): 61.
 [2] YE Z X, LONG X, ZENG X M. Adjustment algorithms

for Bézier curve and surface[C]// International Conference on Computer Science and Education. Piscataway: IEEE, 2010: 1712-1716.
 [3] ACU A M, MANAV N, SOFONEA D F. Approximation properties of λ -Kantorovich operators [J]. Journal of Inequalities and Applications, 2018, 2018: 202.
 [4] CAI Q B. The Bézier variant of Kantorovich type λ -Bernstein operators[J]. Journal of Inequalities and Applications, 2018, 2018(1): 90.
 [5] RAHMAN S, MURSALEEN M, ACU A M. Approximation properties of λ -Bernstein-Kantorovich operators with shifted knots[J]. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 2019, 42(11): 4042-4053.
 [6] KUMAR A. Approximation properties of generalized λ -Bernstein-Kantorovich type operators[J]. Rendiconti Del Circolo Matematico Palermo Di Series 2, 2021, 70(1): 505-520.
 [7] DEVORE R A, LORENTZ G G. Constructive approximation[M]. Berlin: Springer, 1993.

(责任编辑:汪 军)