

Pontrjagin 空间上 Putnam-Fuglede 定理成立的条件

李克华*, 叶洪波, 王剑苹

(厦门理工学院数学与统计学院, 福建 厦门 361024)

摘要: [目的] 本文主要考虑 Pontrjagin 空间上 Putnam-Fuglede 定理成立的条件问题. [方法] 利用 Π_k 空间的正则分解和正规分解下算子的运算规则, 以及算子值解析函数的 Liouville 定理来研究算子的交换性. [结果] 事实上, 设 A 与 B 是 Π_k 空间中的有界线性算子, A 是正规算子, B 与 A 可交换且有公共零性不变子空间, \mathcal{A} 表示算子 A, B 和单位 I 生成的 JC^* -代数, 则有: 1) 如果 \mathcal{A} 是非退化的, 则 Putnam-Fuglede 定理成立, 即 $A^{\#}B = BA^{\#}$; 2) 如果 \mathcal{A} 是一般的, 则 Putnam-Fuglede 定理成立当且仅当 $B \in \mathcal{A}'$ (\mathcal{A} 的交换); 3) \mathcal{A} 是一般对称算子代数当且仅当 A 与 B 有公共零性不变子空间 Z , 使得 Z 是 $B^{\#}$ 的不变子空间; 4) 如果函数 $\|e^{zA}\|$ 在 $z=0$ 点处解析, 则必有 $A^{\#}B = BA^{\#}$. [结论] 因此, 本文全面解决了 Pontrjagin 空间上 Putnam-Fuglede 定理成立的条件问题.

关键词: Pontrjagin 空间; 正规算子; Putnam-Fuglede 定理

中图分类号: O 177

文献标志码: A

文章编号: 0438-0479(2025)04-0723-04

Conditions of Putnam-Fuglede theorem on the Pontrjagin spaces

LI Kehua*, YE Hongbo, WANG Jianping

(School of Mathematics and Statistics, Xiamen University of Technology, Xiamen 361024, China)

Abstract: [Objective] In this paper, we consider conditions of the Putnam-Fuglede theorem on the Pontrjagin space. [Methods] To perform our analysis, we study the commutativity of operators by utilizing the operation rules of an operator under the regular decomposition and the normal decomposition of a Π_k space, as well as the Liouville theorem for operator value analytic functions. Then we obtain the Putnam-fuglede theorem on the Pontrjagin space. [Results] Let A and B be two bounded linear operators on a Π_k space with $AB=BA$, where A denotes a normal operator, and A and B secure a communal neutral-invariant subspace. By \mathcal{A} denotes the JC^* -algebra spanned by operators A, B and unit I . (1) If \mathcal{A} is a nondegenerate algebra, then Putnam-Fuglede theorem holds, i. e. $A^{\#}B = BA^{\#}$. (2) If \mathcal{A} is general algebra, then Putnam-Fuglede theorem holds if and only if $B \in \mathcal{A}'$ (commutation of \mathcal{A}). (3) \mathcal{A} is general symmetric algebra if and only if there is a communal neutral invariant subspace Z of A and B such that $B^{\#}Z \subset Z$. (4) If the function $\|e^{zA}\|$ is analytic at $z=0$, then $A^{\#}B = BA^{\#}$. [Conclusions] We have established conditions in which the Putnam-Fuglede theorem continues to hold on the Pontrjagin space.

Keywords: Pontrjagin spaces; normal operators; Putnam-Fuglede theorem

对于 Hilbert 空间上的正规算子 A , 若有有界线性算子 B 满足 $AB=BA$, 则必有 $A^{\#}B = BA^{\#}$. 这是熟知的 Putnam-Fuglede 定理^[1] (以下简称 P-F 定理). 对 Pontrjagin 空间, Yang^[2] 证明了当算子 A 没有零性不

变子空间时, P-F 定理成立; 当 A 有零性不变子空间, 而 B 与 A 无公共零性不变子空间时, P-F 定理也成立; 当 A 与 B 有公共零性不变子空间时, 通过构造例子说明此时 P-F 定理一般不成立; 在 Π_1 空间上, 当 A

收稿日期: 2024-12-26 录用日期: 2025-03-25

基金项目: 国家自然科学基金(12101519); 福建省 2023 年本科高校教育教学研究项目(FBJY20230155)

通信作者: khli@xmut.edu.cn

引文格式: 李克华, 叶洪波, 王剑苹. Pontrjagin 空间上 Putnam-Fuglede 定理成立的条件[J]. 厦门大学学报(自然科学版), 2025, 64(4): 723-726.

Citation: LI K H, YE H B, WANG J P. Conditions of Putnam-Fuglede theorem on the Pontrjagin spaces[J]. J Xiamen Univ Nat Sci, 2025, 64(4): 723-726. (in Chinese)



与 B 及单位算子生成的一致闭对称算子代数 \mathcal{A} 属于第 0, II_a 和 III_a 类代数时, 算子 B 与 A^* 仍可交换^[3]; 而当 \mathcal{A} 属于第 I, II_b 和 III_b 类代数时, 存在 $B \in \mathcal{A}$, 使得 B 与 A 可交换, 但 B 与 A^* 不可交换^[3].

本文继续考虑 Pontrjagin 空间上 Putnam-Fuglede 定理成立的条件问题. 得到下列主要结果:

设 A 与 B 是 Π_k 空间上有界线性算子, A 是正规算子, B 与 A 可交换且有公共零性不变子空间. \mathcal{A} 表示 A, B 和单位 I 生成的 JC^* -代数.

1) 如果 \mathcal{A} 是非退化的, 则 Putnam-Fuglede 定理成立, 即 $A^\#B = BA^\#$;

2) 如果 \mathcal{A} 是一般的, 则 Putnam-Fuglede 定理成立当且仅当 $B \in \mathcal{A}'$ (\mathcal{A} 的交换);

3) \mathcal{A} 是一般对称算子代数当且仅当 A 与 B 有公共零性不变子空间 Z , 使得 Z 是 $B^\#$ 的不变子空间;

4) 如果函数 $\|e^{izA^\#}\|$ 在 $z=0$ 点处解析, 则必有 $A^\#B = BA^\#$.

至此 Π_k 空间上 Putnam-Fuglede 定理成立的等价条件问题得到解决.

1 预备知识

不定度规空间 Π 是复数域上的线性空间, 且带有一个非退化的度规 $[\cdot, \cdot]$, 即双线性 Hermite 泛函. 若 $x \in \Pi$, 且 $[x, x] = 0$, 则称 x 为零性向量. 零性向量构成的子空间称为零性子空间. 如果不定度规空间的正则分解 $\Pi = H_+ \oplus H_-$ 中负性子空间的维数 $k < \infty$, 则称之为 Pontrjagin 空间, 或 Π_k 空间. Π_k 空间上的度规 $[\cdot, \cdot]$ 也称为不定内积, 而由正则分解诱导出的正定内积为 $(\cdot, \cdot) = [\cdot, \cdot]_+ - [\cdot, \cdot]_-$, 相应的度规算子为 J , Π_k 空间上的算子关于不定内积的共轭算子记为 $A^\#$, 而关于正定内积的共轭算子记为 A^* , 并且有 $A^\# = JA^*J$ ^[4-8].

Π_k 空间的正规分解是指 $\Pi_k = (Z \oplus H) + Z^*$. 其中 Z 是零性子空间, Z^* 是 Z 的对偶, 当 $\dim Z = k$ 时, H 是 Hilbert 空间; 当 $\dim Z < k$ 时, H 是 Π_k 型空间.

用 \mathcal{A} 表示 Π_k 空间上有界线性算子所成的代数 $B(\Pi_k)$ 的子代数. 若 $A \in \mathcal{A}$ 则 $A^\# \in \mathcal{A}$, 就称 \mathcal{A} 是对称的. 若 \mathcal{A} 没有零性不变子空间, 则称 \mathcal{A} 为非退化的, 否则就称为一般的算子代数^[9-11].

Π_k 空间上的拓扑是由 Π_k 空间的正则分解诱导出的正定内积 (\cdot, \cdot) 引入的范数 $\|\cdot\|$ 所确定的. 与范数 $\|\cdot\|$ 相应的可给出 $B(\Pi_k)$ 中算子 A 的范数 $\|A\|$. 这个算子范数确定了 $B(\Pi_k)$ 上的一致拓扑. 若 $B(\Pi_k)$

的子代数 \mathcal{A} 按一致拓扑是闭的, 则称 \mathcal{A} 是 Π_k 上的 JC^* -代数^[12-14].

引理 1^[15] Π_k 空间上非退化的 JC^* -代数存在正(负)不变子空间 H_\pm , 使得 $\Pi_k = H_- \oplus H_+$ 为 Π_k 空间的正则分解.

2 主要结果

定理 1 设 A, B 都是 Π_k 空间上的有界线性算子, A 是正规算子, B 与 A 可交换. \mathcal{A} 表示由 A, B 和 Π_k 上的单位算子 I 生成的 JC^* -代数. 如果 \mathcal{A} 非退化, 则 P-F 定理成立.

证明 因为 \mathcal{A} 是 JC^* -代数, 由引理 1 知, 存在 Π_k 空间的正则分解 $\Pi_k = H_- \oplus H_+$, 其中 H_\pm 是 \mathcal{A} 的正、负不变子空间, 相应的度规算子为 $J = \begin{pmatrix} -I & \\ & I \end{pmatrix}$, 其中 I_\pm 是 H_\pm 上的单位算子. 由 \mathcal{A} 是对称的知, H_\pm 是 \mathcal{A} 的约化子空间. 从而 \mathcal{A} 在该正则分解下具有对角形式. 现在设

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & \\ & A_{22} \end{pmatrix} \in \mathcal{A},$$

则

$$A^\# = JA^*J = \begin{pmatrix} A_{11}^* & \\ & A_{22}^* \end{pmatrix},$$

由 A 是正规算子知, A_{11}, A_{22} 分别是 H_+ 与 H_- 上的正规算子. 再设

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix},$$

则

$$AB = \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} & A_{11}B_{12} \\ A_{22}B_{21} & A_{22}B_{22} \end{pmatrix},$$

$$BA = \begin{pmatrix} B_{11}A_{11} & B_{12}A_{22} \\ B_{21}A_{11} & B_{22}A_{22} \end{pmatrix}.$$

由 $AB=BA$, 有

$$A_{11}B_{11} = B_{11}A_{11}, A_{22}B_{22} = B_{22}A_{22},$$

$$A_{11}B_{12} = B_{12}A_{22}, A_{22}B_{21} = B_{21}A_{11},$$

由 A_{11}, A_{22} 是正规算子以及 Hilbert 空间上的 P-F 定理(及推广形式)知,

$$A_{11}^*B_{11} = B_{11}A_{11}^*, A_{22}^*B_{22} = B_{22}A_{22}^*,$$

$$A_{11}^*B_{12} = B_{12}A_{22}^*, A_{22}^*B_{21} = B_{21}A_{11}^*,$$

于是 $A^\#B = BA^\#$.

推论 1 若 Π_k 空间上的正规算子 A 无零性不变子空间, 则对 Π_k 空间上的任意与 A 可交换的有界线性算子 B , 必有 $A^\#B = BA^\#$.

推论 2 设 A 是 Π_k 空间上有零性不变子空间的正规算子, 若 B 是 Π_k 空间上与 A 无公共零性不变子空间且与 A 可交换的任意有界线性算子, 则必有 $A^\#B = BA^\#$.

定理 2 设 \mathcal{B} 是由 $A, A^\#$ 及单位 I 生成的 $J\mathcal{C}^*$ -代数, 则 P-F 定理成立的等价条件是 $B \in \mathcal{B}'$, 其中 \mathcal{B}' 是 \mathcal{B} 的交换.

证明 设 $AB=BA$, 且 A 是正规算子. 若 P-F 定理成立, 则 $BA^\# = A^\#B$. 于是对任意二元复系数多项式 $P_{nm}(A, A^\#)$, 有 $BP_{nm}(A, A^\#) = P_{nm}(A, A^\#)B$. 另一方面不难看出

$$\mathcal{B} = \lim_{n,m \rightarrow \infty} \{P_{nm}(A, A^\#) \mid n, m \in \mathbb{N}\},$$

反之, 若 $B \in \mathcal{B}'$, 则 B 与 $A^\#$ 交换, 即 P-F 定理成立.

定理 3 令 $\mathcal{Z} = \{Z \mid AZ \subseteq Z, BZ \subseteq Z, (z, z) = 0, z \in Z\}$, 则算子代数 \mathcal{A} 是一般的, 等价于存在 $Z \in \mathcal{Z}$, 使得 Z 是 $B^\#$ 的零性不变子空间.

证明 \Rightarrow 若 \mathcal{A} 是退化的, 则由 $A, B, B^\# \in \mathcal{A}$ 知, 存在对 $A, B, B^\#$ 不变的零性子空间 Z , 即 $Z \in \mathcal{Z}$ 且对 $B^\#$ 不变.

\Leftarrow 设 $Z \in \mathcal{Z}$, 且 $B^\#Z \subseteq Z$. 下证 Z 是 \mathcal{A} 的不变子空间. 为此只需证 Z 是 $A^\#$ 的不变子空间即可. 取 Z^*

为 Z 的对偶. 令

$$H = (Z + Z^*)^{\perp\perp},$$

则得 Π_k 空间的正规分解

$$\Pi_k = (Z \oplus H) + Z^*,$$

相应的度规算子为

$$\begin{pmatrix} & J_1 \\ I & \\ & J_3 \end{pmatrix}.$$

由于 Z 是 A 的不变子空间, 因此可设 A 在该正规分解下的形式为

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & Y \otimes \xi & T \\ & M & \eta \otimes Z \\ X \otimes \eta & & A_{33} \end{pmatrix},$$

其中 ξ 与 η 是 Z 与 Z^* 的标准正交基(按正定内积), 其中 $Y, Z \in H$. 于是

$$A^\# = JA^*J = J \begin{pmatrix} A_{11}^* & & \\ \xi \otimes Y & M^* & \eta \otimes X \\ T^* & Z \otimes \eta & A_{33}^* \end{pmatrix} J = \begin{pmatrix} A_{33}^* & Z \otimes \xi & T^* \\ \eta \otimes X & M^* & \eta \otimes Y \\ & & A_{11}^* \end{pmatrix}.$$

计算 $AA^\#$ 与 $A^\#A$, 有

$$AA^\# = \begin{pmatrix} A_{11} & Y \otimes \xi & T \\ & M & \eta \otimes Z \\ X \otimes \eta & & A_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{33}^* & Z \otimes \xi & T^* \\ \eta \otimes X & M^* & \eta \otimes Y \\ & & A_{11}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}A_{33}^* + (X, Y) & (A_{11}^*Z + MY) \otimes \xi & A_{11}T^* + (Y, Y) + TA_{11}^* \\ \eta \otimes MX & MM^* & \eta \otimes (MY + A_{11}^*Z) \\ (X, X) & MX \otimes \eta & (Y, X) + A_{33}A_{11}^* \end{pmatrix}, \text{ 及}$$

$$A^\#A = \begin{pmatrix} A_{33}^* & Z \otimes \xi & T^* \\ \eta \otimes X & M^* & \eta \otimes Y \\ & & A_{11}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & Y \otimes \xi & T \\ & M & \eta \otimes Z \\ X \otimes \eta & & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{33}^*A_{11} & (A_{33}Y + M^*Z + TX) \otimes \xi & A_{33}^*T + (Z, Z) + T^*A_{33} \\ \eta \otimes A_{11}X & (Y, X) + M^*M + (X, Y) & \eta \otimes (TX + M^*Z + A_{33}Y) \\ & A_{11}X \otimes \eta & A_{11}^*A_{33} \end{pmatrix}.$$

由 $A^\#A = AA^\#$, 有 $(X, X) = 0$, 所以 $X=0$, 故 Z 是 $A^\#$ 的不变子空间.

推论 3 设 A 是 Π_k 空间上的正规算子, A 与 $A^\#$ 的零性不变子空间是一致的.

引理 2 设 A 是 Π_k 空间上的有界线性算子, 令

$$h(z) = \|e^{-i(zA^\# + \bar{z}A)}\|, k(z) = \|e^{i(zA^\# + \bar{z}A)}\|, r(z) = \|e^{izA^\#}\| \|e^{-izA}\|, z \in \mathbb{C},$$

则下列结论成立:

(i) $h(z) = k(z)$,

(ii) $h(z) \leq r(z)$,

(iii) 当 $\|e^{izA^\#}\|$ 在 $z=0$ 点处解析时, $r(z)$ 在 $z=0$ 点也解析, 且 $r'(0) = 0$.

证明 (i) 对任意 $z \in \mathbb{C}$, 有

$$(e^{-i(zA^\# + \bar{z}A)})^\# = e^{i(zA^\# + \bar{z}A)},$$

所以

$$\|(e^{-i(zA^\# + \bar{z}A)})^\#\| = \|e^{i(zA^\# + \bar{z}A)}\|,$$

即 $h(z) = k(z)$.

(ii) 对任意 $z \in \mathbb{C}$ 有,

$$\begin{aligned}
h(z) &= \| e^{-izA^\#} e^{-i\bar{z}A} \| = \| (e^{izA^\#})^{-1} (e^{izA^\#})^\# \| = \\
& \| (e^{izA^\#})^\#{}^{-1} (e^{izA^\#})^\# \| = \\
& \| (e^{izA^\#} (e^{izA^\#})^\#{}^{-1})^\# \| = \| e^{izA^\#} (e^{izA^\#})^\#{}^{-1} \| \leq \\
& \| e^{izA^\#} \| \| (e^{izA^\#})^{-1} \| = \\
& \| e^{izA^\#} \| \| e^{-izA^\#} \| = r(z).
\end{aligned}$$

(iii) 令 $r_1(z) = \| e^{izA^\#} \|$, $r_2(z) = \| e^{-izA^\#} \|$, 则

$$\begin{aligned}
r'_1(0) &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\| e^{izA^\#} \| - \| \mathbf{I} \|}{z} = \\
\lim_{-z \rightarrow 0} \frac{\| e^{-izA^\#} \| - \| \mathbf{I} \|}{-z} &= -r'_2(0),
\end{aligned}$$

即 $r_1(z)$ 在 $z=0$ 点处解析时, $r_2(z)$ 在 $z=0$ 点处也解析. 于是当 $r_1(z)$ 在 $z=0$ 解析时, $r_2(z)$ 在 $z=0$ 也解析, 从而有

$$\begin{aligned}
r'(0) &= r'_1(0)r_2(0) + r_1(0)r'_2(0) = r'_1(0) + \\
r'_2(0) &= 0.
\end{aligned}$$

定理 4 设 \mathbf{A} 是 Π_k 空间上的正规算子, 函数 $\| e^{izA^\#} \|$ 在 $z=0$ 点解析. 对 Π_k 空间上的与 \mathbf{A} 可交换的有界线性算子 \mathbf{B} , 必有 $\mathbf{A}^\# \mathbf{B} = \mathbf{B} \mathbf{A}^\#$.

证明 由普通函数论知识, 对任意复数 z , 有

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!},$$

因此, 存在一个多项式列 P_n 使得 $P_n(\mathbf{A})$ 按算子范数收敛于 e^{zA} . 由条件 $\mathbf{A}\mathbf{B} = \mathbf{B}\mathbf{A}$, 得 $P_n(\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{B}P_n(\mathbf{A})$. 于是对任意复数 z , 有 $e^{zA}\mathbf{B} = \mathbf{B}e^{zA}$. 从而

$$\mathbf{B} = e^{-i\bar{z}A}\mathbf{B}e^{i\bar{z}A}.$$

令

$$f(z) = \frac{e^{-izA^\#} \mathbf{B} e^{izA^\#}}{r^2(z)},$$

其中 $r(z)$ 是引理 1 中定义的函数, 由于 \mathbf{A} 是正规算子, 故有 $\mathbf{A}\mathbf{A}^\# = \mathbf{A}^\#\mathbf{A}$, 因此

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{e^{-izA^\#} e^{-i\bar{z}A} \mathbf{B} e^{i\bar{z}A} e^{izA^\#}}{r^2(z)} = \\
& \frac{e^{-i(zA^\# + \bar{z}A)} \mathbf{B} e^{i(\bar{z}A + zA^\#)}}{r^2(z)},
\end{aligned}$$

且 $f(z)$ 是整个复平面上的算子值解析函数. 再由引理 2(i)(ii) 知, $f(z)$ 在整个复平面上有界. 由 Liouville 定理知 $f(z)$ 恒为常数, 从而 $f'(z) = 0$. 于是

$$\begin{aligned}
\frac{e^{-zA} (-iA^\#) r(z) - e^{-izA^\#} r'(z)}{r^2(z)} \mathbf{B} \frac{e^{izA^\#}}{r(z)} + \\
\frac{e^{-izA^\#}}{r(z)} \mathbf{B} \frac{e^{izA^\#} (izA^\#) r(z) - e^{izA^\#} r'(z)}{r^2(z)} = 0,
\end{aligned}$$

再令 $z = 0$, 得

$$-iA^\# \mathbf{B} + i\mathbf{B}A^\# - 2r'(0)\mathbf{B} = 0,$$

由引理 2(iii), 有 $r'(0) = 0$, 从而有 $\mathbf{A}^\# \mathbf{B} = \mathbf{B} \mathbf{A}^\#$.

参考文献:

- [1] ROSENBLUM M. On a theorem of fuglede and putnam [J]. Journal of the London Mathematical Society, 1958, 33 (3): 376-377.
- [2] YANG H T. On the commutativity of operators on Pontrjagin spaces [J]. Acta Math Sinica, 2006, 49(2): 451-458.
- [3] SHULMAN V S. On operator algebras in spaces with indefinite metric of Π_1 type [J]. Dokl Akad Nauk SSSR, 1971, 201(1): 44-47.
- [4] XIA D X, YAN S S. Spectral theory of linear operators [M]. Beijing: Science Press, 1987.
- [5] TONG Y S. Uniformly closed symmetric operator algebras on Pontrjagin spaces [J]. China Ann Math, 1994, 15A(5): 603-611.
- [6] TONG Y S. A density theorem on the operator algebras in Pontrjagin spaces [J]. J Math Anal Appl, 2002, 268: 143-156.
- [7] YANG H T. On the symmetry of operator algebras on Pontrjagin spaces [J]. Acta Math Sinica, 2004, 47(5): 915-920.
- [8] YANG H T. Equivalent conditions of weakly and uniformly closed on the degenerate operator algebra in Pontrjagin spaces [J]. Acta Math Sinica, 2006, 49(5): 857-860.
- [9] YANG H T. Derivation of JVN-algebras on Pontrjagin spaces [J]. China Ann Math, 2005, 26A(1): 105-112.
- [10] YANG H T. Conditional positive forms and dilations [J]. J Sys Sci and Math Scis, 2005, 25(5): 543-549.
- [11] 叶洪波, 李克华, 杨海涛. Π_k 空间上算子的运算及谱性质 [J]. 厦门理工学院学报, 2021, 29(3): 90-96.
- [12] BOGNAR J. Indefinite inner product spaces [M]. New York: Springer-Verlag, 1974.
- [13] 杨海涛. Pontrjagin 空间上的算子理论及应用 [M]. 上海: 同济大学出版社, 2020.
- [14] 杨海涛. Pontrjagin 空间上的算子代数 [M]. 厦门: 厦门大学出版社, 2013.
- [15] LOGINOV A I, SHULMAN V S. Irreducible J-symmetric algebras of operators in spaces with an indefinite metric [J]. Dokl Akad Nauk SSSR, 1978, 240: 21-23.

(责任编辑: 汪 军)