

单位圆内二阶线性微分方程解的增长性与不动点*

陈 玉^{1,2)} 邓冠铁^{1)†} 黄华平³⁾

(1)北京师范大学数学科学学院, 数学与复杂系统教育部重点实验室, 100875, 北京;

2)江西师范大学数学与统计学院, 330022, 江西南昌; 3)重庆三峡学院数学与统计学院, 404020, 重庆万州)

摘要 利用系数特征函数比较的极限形式, 研究了单位圆内二阶微分方程解的增长性, 给出了系数均为可允许的解析函数时方程所有非零解为无穷级的充分条件, 并得到了了解的不动点估计的一般性结论. 所得结果推广了 Heittokangas 与曹廷彬的结果.

关键词 线性微分方程; 单位圆; 可允许的; 特征函数; 不动点

中图分类号 O174.52

DOI: 10.12202/j.0476-0301.2020310

0 预备知识

使用单位圆 $\Delta = \{z : |z| < 1\}$ 内亚纯函数的 Nevanlinna 值分布理论的基本结果和标准符号^[1-3], 以 $T(r, f) = m(r, f) + N(r, f)$ 表示 Nevanlinna 特征函数, 则

$$m(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+ |f(re^{i\theta})| d\theta,$$
$$N(r, f) = \int_0^r \frac{n(t, f) - n(0, f)}{t} dt + n(0, f) \ln r,$$

式中 $N(r, f)$ 表示 $f(z)$ 在 $|z| \leq r$ 上的极点密指量,

$N\left(r, \frac{1}{f-a}\right)$ 相应地表示 a -值点密指量.

定义 1^[3] Δ 内亚纯函数 f 的级定义为

$$\sigma(f) = \overline{\lim}_{r \rightarrow 1^-} \frac{\ln^+ T(r, f)}{\ln \frac{1}{1-r}}.$$

对于 Δ 内解析函数 f , 其级定义为

$$\sigma_M(f) = \overline{\lim}_{r \rightarrow 1^-} \frac{\ln^+ \ln^+ M(r, f)}{\ln \frac{1}{1-r}},$$

式中 $M(r, f)$ 是 $f(z)$ 的最大模.

注 1^[4] 如果 f 在 Δ 内解析, 则 $\sigma(f) \leq \sigma_M(f) \leq \sigma(f) + 1$;

如果 $\sigma(f) = \infty$, 则 $\sigma(f) = \sigma_M(f)$.

定义 2^[5] Δ 内亚纯函数 f 的超级定义为

$$\sigma_2(f) = \overline{\lim}_{r \rightarrow 1^-} \frac{\ln^+ \ln^+ T(r, f)}{\ln \frac{1}{1-r}}.$$

定义 3^[3, 6] 如果 Δ 内亚纯函数 f 满足

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow 1^-} \frac{T(r, f)}{\ln \frac{1}{1-r}} = \infty,$$

则 f 称为可允许的, 反之, f 称为不可允许的.

定义 4^[7] Δ 内亚纯函数 f 在 Δ 内的 a -值点 ($a \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$) 序列的超级收敛指数定义为

$$\lambda_2(f-a) = \overline{\lim}_{r \rightarrow 1^-} \frac{\ln^+ \ln^+ N\left(r, \frac{1}{f-a}\right)}{\ln \frac{1}{1-r}},$$

且 $\bar{\lambda}_2(f-a)$, Δ 内亚纯函数 f 在 Δ 内判别的 a -值点 ($a \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$) 序列的超级收敛指数定义为

$$\bar{\lambda}_2(f-a) = \overline{\lim}_{r \rightarrow 1^-} \frac{\ln^+ \ln^+ \bar{N}\left(r, \frac{1}{f-a}\right)}{\ln \frac{1}{1-r}}.$$

注 2 若 $a = 0$, 则 $\lambda_2(f)$ 和 $\bar{\lambda}_2(f)$ 分别表示 f 在 Δ 内 0 点序列和判别 0 点序列的超级收敛指数.

定义 5^[8-9] 集合 $E \subset [0, 1]$ 的上密度和下密度分别定义为

$$\overline{\text{dens}}_{\Delta} E = \overline{\lim}_{r \rightarrow 1^-} \frac{m(E \cap [r, 1])}{1-r},$$

$$\underline{\text{dens}}_{\Delta} E = \underline{\lim}_{r \rightarrow 1^-} \frac{m(E \cap [r, 1])}{1-r}.$$

* 国家自然科学基金资助项目(11271045, 11561031)

† 通信作者: 邓冠铁(1959—), 男, 博士, 教授. 研究方向: 复分析. E-mail: denggt@bnu.edu.cn

收稿日期: 2020-08-21

式中, 对于 $E \subset [0, 1]$, 给出线测度 $mE = \int_E dt$.

注 3^[9] 如果集合 $E \subset [0, 1]$ 满足 $\overline{\text{dens}}_E > 0$, 则

$$\int_E \frac{dr}{1-r} = +\infty.$$

1 引言与主要结果

随着微分方程复振荡理论研究的发展, 自 2000 年 Heittokangas 深入研究 Δ 内微分方程解的增长性以来, Δ 内微分方程的复振荡理论得到越来越多的发展, 许多复平面上微分方程的有关结论在 Δ 上都得到了类似的结果. 同时, 由于 Δ 与复平面有很大差异, 人们对 Δ 内微分方程独特的方面, 也利用不同概念进行了诸多研究. 对二阶线性微分方程

$$f'' + A(z)f' + B(z)f = 0, \quad (1)$$

Heittokangas^[3] 得到如下结论.

定理 A^[3] 设 $A(z)$ 和 $B(z)$ 是 Δ 内的解析函数, 满足 B 是可允许的, A 是不可允许的, 则式 (1) 的每个解 $f \neq 0$ 满足 $\sigma(f) = \infty$.

问题 1 如果 A 、 B 均为可允许的, Δ 内微分方程的非零解是否具有无穷级.

Gundersen^[11]、Kwon^[12]、Chen 等^[13]、Belaidi^[14] 先后研究改进了复平面上某类微分方程式 (1) 的增长性, Belaidi^[15] 得到了 Δ 上相应的一结果.

定理 B^[12] 假设 E 为复数集, 满足 $\overline{\text{dens}}\{|z| : z \in E\} > 0$, 且设 $A(z)$ 和 $B(z)$ 是整函数, 对正常数 α 、 β , 当 $z \rightarrow \infty$, $z \in E$ 时, 满足

$$|A(z)| \leq \exp\{o(1)|z|^\beta\}, |B(z)| \geq \exp\{(1+o(1))\alpha|z|^\beta\},$$

则式 (1) 的每个解 $f \neq 0$ 满足 $\sigma_2(f) \geq \beta$.

定理 C^[14] 假设 H 为复数集, 满足 $\overline{\text{dens}}\{|z| : z \in H\} > 0$, 且设 $A_0(z), \dots, A_{k-1}(z)$ 是整函数, 对常数 $0 \leq \beta < \alpha$ 、 $\mu > 0$, 当 $z \in H$ 且 $z \rightarrow \infty$ 时, 有

$$|A_0(z)| \geq e^{\alpha|z|^\beta}, |A_j(z)| \leq e^{\beta|z|^\beta} \quad (j = 1, \dots, k-1),$$

则

$$f^{(k)} + A_{k-1}(z)f^{(k-1)} + \dots + A_0(z)f = 0$$

的每一非零解 f 满足 $\sigma(f) = +\infty, \sigma_2(f) \geq \mu$.

曹廷彬等^[7, 10] 将 Kwon^[12]、Belaidi^[14] 的结果推广到了 Δ 上, 通过系数特征函数的大小比较, 估计了 Δ 内微分方程解的迭代 n -级, 并进一步研究了 Δ 内微分方程解的不动点, 特别地, 当 $n = 1$ 时, 可得如下定理.

定理 D^[10] 设 H 是一个复数集, 且满足 $\overline{\text{dens}}_H\{|z| : z \in H \subseteq \Delta\} > 0$, 又设 $A(z)$ 和 $B(z)$ 在 Δ 内解析, 对常数 $0 \leq \beta < \alpha$ 、 $\mu > 0$, 当 $z \in H$ 且 $|z| \rightarrow 1^-$ 时, 有

$$T(r, B) \geq \alpha \left(\frac{1}{1-|z|} \right)^\mu, T(r, A) \leq \beta \left(\frac{1}{1-|z|} \right)^\mu, \quad (2)$$

则式 (1) 的每个解 $f \neq 0$ 满足 $\sigma(f) = \infty$ 且 $\sigma_2(f) \geq \mu$.

定理 E^[10] 在定理 D 的条件下, 如果 $A(z) + zB(z) \neq 0$, 则式 (1) 的每个解 $f \neq 0$ 满足 $\bar{\lambda}_2(f-z) = \sigma_2(f)$.

定理 D 是将 $T(r, A)$ 、 $T(r, B)$ 与 $(1-r)^\mu$ 进行比较, 并在 $A(z) + zB(z) \neq 0$ 条件下, 得到了此类型方程相应解的不动点性质. 对微分方程无穷级解的不动点, 是否存在不受方程系数类型限制的更一般的结论.

经过本研究, 给出了系数特征函数比较的极限形式, 并利用这种极限形式, 得到了无穷级解估计的几个充分条件, 回答了问题 1; 同时, 对微分方程无穷级解的不动点, 去掉了对方程类型与系数的条件限制, 得到了一般性的结论.

定理 1 设 H 为一复数集, 满足 $\overline{\text{dens}}_H\{|z| : z \in H \subseteq \Delta\} > 0$, 且设 $A(z)$ 和 $B(z)$ 在 Δ 内解析. 如果对任意的 $\mu > 0$, 有

$$\lim_{\substack{|z| \rightarrow 1^- \\ z \in H}} \frac{T(r, A) + \mu \ln \left(\frac{1}{1-|z|} \right)}{T(r, B)} < 1, \quad (3)$$

则式 (1) 的每个解 $f \neq 0$ 满足 $\sigma(f) = \infty$.

定理 2 设 $A(z)$ 和 $B(z)$ 在 Δ 内解析. 如果

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} \frac{T(r, B) - T(r, A)}{\ln \left(\frac{1}{1-r} \right)} = \infty, \quad (4)$$

则式 (1) 的每个解 $f \neq 0$ 满足 $\sigma(f) = \infty$.

注 4 在定理 A “ B 是可允许的, A 是不可允许的” 的条件下, 由引理 1 可知, 式 (4) 成立; 由定理 2 知, 定理 A 成立, 即定理 A 是定理 2 的一个推论.

由定理 2 可得非零解为无穷级解的充分条件.

定理 3 设 $A(z)$ 和 $B(z)$ 在 Δ 内解析, $B(z)$ 是可允许的, 且

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} \frac{T(r, A)}{T(r, B)} < 1, \quad (5)$$

则式 (1) 的每个解 $f \neq 0$ 满足 $\sigma(f) = \infty$.

推论 1 设 $A(z)$ 、 $B(z)$ 为 Δ 内可允许的解析函数, 且满足式 (5), 则式 (1) 的每个解 $f \neq 0$ 满足 $\sigma(f) = \infty$.

定理 4 设 $A(z)$ 和 $B(z)$ 在 Δ 内解析, $B(z)$ 是可允许的, 且 $T(r, A) = o(T(r, B)) (r \rightarrow 1^-)$, 则式 (1) 的每个解 $f \neq 0$ 满足 $\sigma(f) = \infty$.

推论 2 设 $A(z)$ 、 $B(z)$ 为 Δ 内可允许的解析函数, 且 $T(r, A) = o(T(r, B)) (r \rightarrow 1^-)$, 则式 (1) 的每个解 $f \neq 0$ 满足 $\sigma(f) = \infty$.

定理 5 设 H 为一复数集, 满足 $\overline{\text{dens}}_H\{|z| : z \in H \subseteq \Delta\} >$

0, 且设 $A(z)$ 和 $B(z)$ 在 Δ 内解析. 如果存在常数 $\lambda > 0, \mu > 0$, 使得

$$\lim_{\substack{|z| \rightarrow 1^- \\ z \in H}} \frac{T(r,A) + \frac{\lambda}{(1-|z|)^\mu}}{T(r,B)} < 1, \quad (6)$$

则式(1)的每个解 $f \neq 0$ 满足 $\sigma(f) = \infty$ 且 $\sigma_2(f) \geq \mu$.

注5 在式(2)中取 $\lambda = \alpha - \beta$, 则可得式(6)成立, 从而定理D包含在定理5的结论中, 成为定理5的推论.

注6 由定理1与定理5的证明知, 将定理1与定理5的条件“ $\overline{\text{dens}}_d\{|z|: z \in H \subseteq \Delta\} > 0$ ”替换成

$$\int_{\{|z|: z \in H\}} \frac{dr}{1-r} = \infty,$$

结论仍成立.

定理6 设 $A(z)$ 和 $B(z)$ 是 Δ 内的有限级解析函数, 如果式(1)的所有非零解 f 满足 $\sigma(f) = \infty, \sigma_2(f) = \mu$, 则

$$\bar{\lambda}_2(f-z) = \sigma_2(f) = \mu.$$

由定理6的证明易得如下推论.

推论3 在定理D或定理5的条件下, 式(1)的每个解 $f \neq 0$ 满足:

$$\bar{\lambda}_2(f-z) = \sigma_2(f).$$

2 引理

引理1 设 $A(z)$ 和 $B(z)$ 是 Δ 内的解析函数, B 是可允许的, A 是不可允许的, 则

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow 1^-} \frac{T(r,B) - T(r,A)}{\ln\left(\frac{1}{1-r}\right)} = \infty.$$

证明 由 A 是不可允许的, 可得

$$T(r,A) = O\left(\ln\left(\frac{1}{1-r}\right)\right) (r \rightarrow 1^-),$$

从而存在 $M > 0$, 使得当 $r \rightarrow 1^-$ 时, 有

$$\frac{T(r,B) - T(r,A)}{\ln\left(\frac{1}{1-r}\right)} = \frac{T(r,B) - O\left(\ln\left(\frac{1}{1-r}\right)\right)}{\ln\left(\frac{1}{1-r}\right)} \geq \frac{T(r,B)}{\ln\left(\frac{1}{1-r}\right)} - M.$$

而 B 是可允许的, 由定义易得

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow 1^-} \frac{T(r,B) - T(r,A)}{\ln\left(\frac{1}{1-r}\right)} = \infty.$$

引理2^[3] 设 f 是 Δ 内亚纯函数, 且设 $k \in \mathbb{N}$, 则

$$m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) = S(r, f),$$

式中 $S(r, f) = O(\ln^+ T(r, f)) + O\left(\ln\left(\frac{1}{1-r}\right)\right), r \notin E$, 这里 $E \subset [0, 1]$ 满足 $\int_E \frac{dr}{1-r} < \infty$. 若 f 是有穷级, 则

$$m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) = O\left(\ln\left(\frac{1}{1-r}\right)\right).$$

引理3^[16] 设 $g: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ 是单调递增函数, 满足 $g(r) \leq h(r), r \notin E$, 这里 $E \subset [0, 1]$, 且满足 $\int_E \frac{dr}{1-r} < \infty$. 则存在 $d \in (0, 1)$, 使得当 $s(r) = 1 - d(1-r)$ 时, 对任意的 $r \in [0, 1)$, 有 $g(r) \leq h(s(r))$.

引理4^[17] 设 $A_0, \dots, A_{k-1}, F \neq 0$ 是 Δ 内有限迭代 p -级解析函数, 如果 f 是

$$f^{(k)} + A_{k-1}f^{(k-1)} + \dots + A_0f = F$$

的解, 且满足 $\sigma_p(f) = \infty, \sigma_{p+1}(f) = \rho < \infty$, 则

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}_p(f) &= \lambda_p(f) = \sigma_p(f) = \infty, \\ \bar{\lambda}_{p+1}(f) &= \lambda_{p+1}(f) = \sigma_{p+1}(f) = \rho. \end{aligned}$$

3 定理的证明

定理1的证明 设 $f \neq 0$ 为式(1)的解, 如果 $\sigma(f) < \infty$, 则由引理2得

$$m\left(r, \frac{f^{(j)}}{f}\right) = O\left(\ln\left(\frac{1}{1-r}\right)\right) (j = 1, \dots, k), \quad (7)$$

由式(1)知

$$-B = A \frac{f'}{f} + \frac{f''}{f}, \quad (8)$$

由式(8)知

$$m(r, B) \leq m(r, A) + \sum_{j=1}^2 m\left(r, \frac{f^{(j)}}{f}\right) + O(1), \quad (9)$$

由 $A(z)$ 和 $B(z)$ 在 Δ 内解析, 有 $m(r, A) = T(r, A), m(r, B) = T(r, B)$, 将式(7)代入式(9)得

$$T(r, B) - T(r, A) \leq O\left(\ln\left(\frac{1}{1-r}\right)\right). \quad (10)$$

由式(3)知, 对任意的 $\mu > 0$, 当 $|z| \rightarrow 1^-, z \in H$ 时, 有

$$\frac{T(r, A) + \mu \ln\left(\frac{1}{1-|z|}\right)}{T(r, B)} < 1,$$

即

$$T(r, B) - T(r, A) > \mu \ln \left(\frac{1}{1-|z|} \right). \quad (11)$$

式(10)与(11)矛盾, 因此 $\sigma(f) = \infty$.

定理 2 的证明 设 $f \neq 0$ 为方程(1)的解, 如果 $\sigma(f) < \infty$, 则由定理 1 的证明, 有式(10)成立. 由式(4)知, 存在一列 $\{r_n\}: r_n \rightarrow 1^- (n \rightarrow \infty)$, 使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T(r_n, B) - T(r_n, A)}{\ln \left(\frac{1}{1-r_n} \right)} = \infty,$$

则对任意的 $\mu > 0$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $r_n \rightarrow 1^-$, 且有

$$\frac{T(r_n, B) - T(r_n, A)}{\ln \left(\frac{1}{1-r_n} \right)} > \mu. \quad (12)$$

式(10)与(12)矛盾, 故 $\sigma(f) = \infty$.

定理 3 的证明 设 $f \neq 0$ 为式(1)的解. 由式(5)知, 存在常数 $M > 0$, 使得当 $r \rightarrow 1^-$ 时, 有

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} \frac{T(r, A)}{T(r, B)} < M < 1,$$

从而当 $r \rightarrow 1^-$ 时, 有

$$T(r, A) < MT(r, B).$$

则

$$\frac{T(r, B) - T(r, A)}{\ln \left(\frac{1}{1-r} \right)} \geq \frac{(1-M)T(r, B)}{\ln \left(\frac{1}{1-r} \right)},$$

而 B 是可允许的, 故

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} \frac{T(r, B) - T(r, A)}{\ln \left(\frac{1}{1-r} \right)} = \infty.$$

由定理 2 知, $\sigma(f) = \infty$.

定理 4 的证明 当 $T(r, A) = o(T(r, B)) (r \rightarrow 1^-)$ 时, 式(5)成立, 由定理 3 知, 结论成立.

定理 5 的证明 设 $f \neq 0$ 为式(1)的解, 如果 $\sigma(f) < \infty$, 则式(10)成立. 由式(6)知, 存在常数 $\lambda > 0, \mu > 0$, 使得当 $|z| \rightarrow 1^-, z \in H$ 时, 有

$$\frac{T(r, A) + \frac{\lambda}{(1-|z|)^\mu}}{T(r, B)} < 1,$$

即

$$T(r, B) - T(r, A) > \frac{\lambda}{(1-|z|)^\mu}. \quad (13)$$

易知式(10)与(13)矛盾, 因此 $\sigma(f) = \infty$.

由引理 2 得

$$m \left(r, \frac{f^{(i)}}{f} \right) = O(\ln^+ T(r, f)) + O \left(\ln \left(\frac{1}{1-r} \right) \right), r \notin E_1, \quad (14)$$

式中 $E_1 \subset [0, 1)$ 满足 $\int_{E_1} \frac{dr}{1-r} < \infty$. 将式(13)和(14)代入式(9)得

$$\frac{\lambda}{(1-|z|)^\mu} < O(\ln^+ T(r, f)) + O \left(\ln \left(\frac{1}{1-r} \right) \right), r \in \{|z|: z \in H\} - E_1. \quad (15)$$

由注 3 知 $\int_{\{|z|: z \in H\} - E_1} \frac{dr}{1-r} = \infty$. 因此, 根据引理 3 及式(15), 有 $\sigma_2(f) \geq \mu$.

定理 6 的证明 设 $f \neq 0$ 为式(1)的解, 由题设

$$\sigma(f) = \infty, \sigma_2(f) = \mu, \quad (16)$$

假设 $g(z) = f(z) - z, z \in \Delta$, 由式(16)有

$$\bar{\lambda}_2(f-z) = \bar{\lambda}_2(g), \sigma_2(f) = \sigma_2(g) = \mu. \quad (17)$$

将 $f = g + z$ 代入式(1), 可化为

$$g'' + Ag' + Bg = -A - zB. \quad (18)$$

现在来证 $-A - zB \neq 0$. 假设 $-A - zB \equiv 0$, 令 $f_1 = -z$, 则 f_1 为式(1)的解, 且 $\sigma(f_1) < \infty$. 这与式(16)矛盾. 故 $-A - zB \neq 0$. 由式(18)与引理 4 可得 $\bar{\lambda}_2(g) = \sigma_2(g)$. 从而由式(17)可得 $\bar{\lambda}_2(f-z) = \bar{\lambda}_2(g) = \sigma_2(g) = \sigma_2(f) = \mu$.

4 参考文献

- [1] HAYMAN W. Meromorphic functions[M]. Oxford: Clarendon Press, 1964
- [2] YANG L. Value distribution theory[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1993
- [3] HEITOKANGAS J. On complex differential equations in the unit disc[J]. Ann Acad Sci Fenn Math Diss, 2000, 122: 1
- [4] TSUJI M. Potential theory in modern function theory[M]. New York: Chelsea, 1975
- [5] 李叶舟. 单位圆盘上二阶微分方程解的增长性[J]. 纯粹数学与应用数学, 2002, 18(4): 295
- [6] 陈宗焯. 一类单位圆内微分方程解的性质[J]. 江西师范大学学报(自然科学版), 2002, 26(3): 189
- [7] 曹廷彬, 仪洪勋. 关于单位圆内解析系数的二阶线性微分方程的复振荡[J]. 数学年刊: A辑, 2007, 28(5): 719
- [8] FENTON P, GRÖHN J, ROSSI J, et al. On α -polynomial regular functions, with applications to ordinary differential equations[J]. Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society, 2014, 57(2): 405
- [9] TU J, XUAN Z X. Complex linear differential equations with certain analytic coefficients of $[p, q]$ -order in the unit disc[J]. Advances in Difference Equations, 2014: 167

- [10] CAO T B. The growth, oscillation and fixed points of solutions of complex linear differential equations in the unit disc[J]. *J Math Anal Appl*, 2009, 352(2): 739
- [11] GUNDERSEN G G. Finite order solutions of second order linear differential equations[J]. *Trans Amer Math Soc*, 1988, 305: 415
- [12] KWON K H. On the growth of entire functions satisfying second order linear differential equations[J]. *Bull Korean Math Soc*, 1996, 33(3): 487
- [13] CHEN Z X, YANG C C. Some further results on the zeros and growths of entire solutions of second order linear differential equations[J]. *Kodai Mathematical Journal*, 1999, 22(2): 273
- [14] BELAÏDI B. Estimation of the hyper-order of entire solutions of complex linear ordinary differential equations whose coefficients are entire functions[J]. *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*, 2002, 5: 1
- [15] BELAÏDI B. Growth of solutions of linear differential equations in the unit disc[J]. *Bull Math Anal Appl*, 2011, 3(1): 14
- [16] BANK S. A general theorem concerning the growth of solutions of first-order algebraic differential equations[J]. *Compos Math*, 1972, 25(1): 61
- [17] BELAÏDI B. Oscillation of fast growing solutions of linear differential equations in the unit disc[J]. *Acta Universitatis Sapientiae Mathematica*, 2010, 2(1): 25

Growth and fixed points of solutions for second-order linear differential equations in the unit disc

CHEN Yu^{1,2)} DENG Guantie^{1)†} HUANG Huaping³⁾

(1) School of Mathematical Sciences, Laboratory of Mathematics and Complex Systems of Ministry of Education, Beijing Normal University, 100875, Beijing, China;

2) School of Mathematics and Statistics, Jiangxi Normal University, 330022, Nanchang, Jiangxi, China;

3) School of Mathematics and Statistics, Chongqing Three Gorges University, 404020, Wanzhou, Chongqing, China)

Abstract Growth of solutions for second-order differential equations in the unit disc is investigated through some limit form with a comparison of coefficients' characteristic functions. Some sufficient conditions are given for every non-zero solution to be of infinite order when coefficients of the equations are admissible. Moreover, a general conclusion is drawn on the fixed points in the solutions. The above results extend upon those of Heittokangas and Cao Tingbin.

Keywords linear differential equation; unit disc; admissible; characteristic functions; fixed points

【责任编辑:陆有忠】