一类管状区域上的 Bergman 度量 *

刘嘉欣　邓冠铁†　殷宏恒
(北京师范大学数学科学学院,数学与复杂系统教育部重点实验室,100875,北京)

摘要　给出了 2 类积分算子在管状区域 Ω 上加权 Bergman 空间有界条件. 计算了管状区域 Ω 上的 Bergman 度量. 得到了 Ω 的一组 Bergman 度量球覆盖. 证明了 Ω 上测度 μ 是 Carleson 测度的一些等价条件.

关键词　管状区域; 加权 Bergman 空间; Bergman 度量; Carleson 测度
中图分类号　O174.56　　**DOI**: 10.12202/j.0476-0301.2022295

0　引言

Zhu [1] 研究了单位球上的全纯函数理论,得到了加权 Bergman 空间中函数的积分表示,2 类积分算子 T、S 有界性的等价条件,以及关于 Siegel 上半空间 Carleson 测度的一些定理; Liu 等[2–3]证明了 Siegel 上半空间上 2 类积分算子的有界性,涉及 Carleson 测度消减的等价条件.

对于 z、$w\in\mathbb{C}^n$, 令

$$z'=(z_1,z_2,\cdots,z_{n-1}),$$
$$\langle z,w\rangle=\sum_{k=1}^{n}z_k\overline{w_k},$$
$$z'\cdot z'=z_1^2+z_2^2+\cdots+z_{n-1}^2.$$

设 n 维复空间 $\mathbb{C}^n$ 中的管状区域 $\Omega=T_B=\{z=x+\mathrm{i}y,x\in\mathbb{R}^n,y\in B\}$, 其中 $B=\{(y',y_n),y'^2<y_n\},y'=(y_1,y_2,\cdots,y_{n-1})$, 定义

$$L_\alpha^p(\Omega)=\{f(z):\|f(z)\|_{p,\alpha}=\left(\int_\Omega|f(z)|^p(y_n-y'^2)^\alpha\mathrm{d}V(z)\right)^{1/p}<\infty,z\in\Omega\},\tag{1}$$

式中: $\mathrm{d}V(z)$ 为 $\mathbb{C}_n$ 的 Lebesgue 测度; $A_\alpha^p(\Omega)=H(\Omega)\cap L_\alpha^p(\Omega)$ 称为管状区域 Ω 上的加权 Bergman 空间.

Deng 等[4] 得到管状区域 Ω上的加权 Bergman 核为

$$K_\alpha(z,w)=\frac{2^{n+1+2\alpha}\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)\pi^n}\cdot((z'-\bar{w}')^2-2\mathrm{i}(z_n-\bar{w}_n))^{-n-\alpha-1}.$$

当 $\alpha=0$时, 管状区域 Ω 上的 Bergman 核为

$$K(z,w)=\frac{2^{n+1}n!}{\pi^n}((z'-\bar{w}')^2-2\mathrm{i}(z_n-\bar{w}_n))^{-n-1}.$$

令

$$\rho(z,w)=\frac{1}{4}((z'-\bar{w}')^2-2\mathrm{i}(z_n-\bar{w}_n)),$$
$$\rho(z):=\rho(z,z)=y_n-y'^2,\tag{2}$$

式中 $y=(y',y_n)=\Im z$.

本文通过单位球 $\mathbb{B}_n=\{z\in\mathbb{C}^n:|z|<1\}$ 到管状区域 Ω 的双全纯映射,研究管状区域上的相关性质.

1　主要结论

定义 1[1]　设$a\in\mathbb{B}_n$, 定义

$$\varphi_a(z)=\frac{a-P_a(z)-s_aQ_a(z)}{1-\langle z,a\rangle},z\in\mathbb{B}_n,\tag{3}$$

式中: $s_a=\sqrt{1-|a|^2}$; P_a 是 $\mathbb{C}^n$ 到 a 生成子空间 $[a]$ 的正交投影; Q_a 是 $\mathbb{C}^n$ 到 $\mathbb{C}^n-[a]$ 的正交投影.

准确地说,

$$P_a(z)=\frac{\langle z,a\rangle}{|a|^2}a,z\in\mathbb{C}^n,$$
$$Q_a(z)=z-\frac{\langle z,a\rangle}{|a|^2}a,z\in\mathbb{B}_n.$$

定义 2[1]　$K(z,w)$ 是管状区域 Ω 上的 Bergman 核, Ω 上的 Bergman 矩阵为

$$\boldsymbol{B}(z)=(b_{ij}(z))_{1\leqslant i,j\leqslant n}=\frac{1}{n+1}\left(\frac{\partial^2}{\partial\bar{z}_i\partial z_j}\ln K(z,z)\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n},z\in\Omega.$$

Bergman 度量$\beta(z,w)=\inf\{l(\gamma):\gamma(0)=z,\gamma(1)=w\}$, 其中$\gamma\in C^1([0,1])$为 Ω中从 z 到 w 的分段光滑曲线, 式中

$$l(\gamma)=\int_0^1\langle\boldsymbol{B}(\gamma(t))\gamma'(t),\gamma'(t)\rangle\mathrm{d}t.$$

---

* 国家自然科学基金资助项目(11971045, 12071035)
† 通信作者: 邓冠铁(1959—), 男, 博士, 二级教授. 研究方向: 复分析. E-mail:denggt@bnu.edu.cn
收稿日期: 2022-10-13

对于 $r>0$、$z\in\Omega$, Bergman 度量球为

$$D(z,r)=\{w\in\Omega:\ \beta(z,w)<r\}.$$

在介绍主要定理之前,先计算 Ω 的 Bergman 矩阵.

$$\frac{\partial^2}{\partial\overline{z_i}z_j}\ln K(z,z)=(n+1)\frac{\partial^2}{\partial\overline{z_i}\partial z_j}\ln(y_n-y'^2)=\frac{1}{4}(n+1)\frac{\partial^2}{\partial y_i\partial y_j}\ln(y_n-y'^2).$$

令:$Y=\left(y_1,y_2,\cdots,y_{n-1},-\frac{1}{2}\right)=\left(y',-\frac{1}{2}\right)$, $\boldsymbol{I}_{n-1}$ 是 $n-1$ 维单位矩阵,

$$\boldsymbol{A}(y)=Y^{\mathrm{T}}Y,\quad \boldsymbol{I}'=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_{n-1}&0\\0&0\end{pmatrix},$$

可得

$$\boldsymbol{B}(z)=\boldsymbol{B}(y)=\frac{\frac{1}{2}(y_n-y'^2)\boldsymbol{I}'+\boldsymbol{A}(y)}{(y_n-y'^2)^2},$$

因此,管状区域 Ω 上的 Bergman 矩阵 $\boldsymbol{B}(z)$ 只与 y 有关.

定理 1 设 a、b、$c\in\mathbb{R}$, 定义积分算子 T、S, 有

$$Tf(z)=(\rho(z)^a)\int_\Omega\frac{\rho(w)^b}{\rho(z,w)^c}f(w)\mathrm{d}V(w),$$

$$Sf(z)=(\rho(z)^a)\int_\Omega\frac{\rho(w)^b}{|\rho(z,w)|^c}f(w)\mathrm{d}V(w).$$

则对于 $\alpha\in\mathbb{R},1\leqslant p<\infty$, 有如下 3 个条件等价.

1)算子 T 在 $L^p_\alpha(\Omega)$ 上有界;

2)算子 S 在 $L^p_\alpha(\Omega)$ 上有界;

3)$-p\alpha<\alpha+1<p(b+1)$, 且 $c=n+a+b+1$,

当 $p=\infty$ 时, 条件 3)应为 $a>0$、$b>-1$, 且 $c=n+a+b+1$.

定理 2 对于 $0<r\leqslant1$, 存在 $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}\subset\Omega$, 满足:

1)$\Omega=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}D(a_k,r)$;

2)若 a_i、$a_j\in\{a_k\},i\neq j$, 则 $D\left(a_i,\frac{r}{4}\right)\cap D\left(a_j,\frac{r}{4}\right)=\varnothing$;

3)存在不依赖于 r 的正整数 N, 使得对于任意 $z\in\Omega$, 集合 $K=\{k:z\in D(a_k,r)\}$ 的元素个数不超过 N 个.

定理 3 设 $r>0$、$p>0$、$\alpha>-1$, μ 是 Ω 上的正 Borel 测度, 则如下 4 个条件等价.

1)对于任意 $f\in H(\Omega)$, 存在常数 $C_1>0$, 有

$$\int_\Omega|f(z)|^p\mathrm{d}\mu(z)\leqslant C_1\int_\Omega|f(z)|^p\mathrm{d}v_\alpha(z);$$

2)对于任意 $z\in\Omega$, 存在常数 $C_2>0$, 有

$$\int_\Omega\frac{\rho(z)^{n+1+\alpha}}{|\rho(z,w)|^{2(n+1+\alpha)}}\mathrm{d}\mu(z)\leqslant C_2;$$

3)对于任意 $z\in\Omega$, 存在常数 $C_3>0$, 有

$$\mu(D(z,r))\leqslant C_3\rho(z)^{n+1+\alpha};$$

4)存在 $C_4>0$, 有

$$\mu(D(a_k,r))\leqslant C_4\rho(a_k)^{n+1+\alpha},k\geqslant1,$$

$\{a_k\}$ 是定理 2 中的序列.

2 主要引理

为了证明定理 1~3, 需要先证明引理 1~6.

引理 1 1)映射 $\Phi:\mathbb{B}_n\to\Omega$ 定义为

$$\Phi(z)=\left(\frac{\sqrt{2}z'}{1+z_n},\mathrm{i}\frac{1-z_n}{1+z_n}-\mathrm{i}\frac{z'\cdot z'}{(1+z_n)^2}\right),z\in\mathbb{B}_n.$$

则 $\Phi(z)$ 是 $\mathbb{B}_n$ 到 Ω 的双全纯映射, 且

$$\Phi^{-1}(w)=\left(\frac{2\mathrm{i}w'}{\mathrm{i}+w_n+\frac{\mathrm{i}}{2}w'\cdot w'},\frac{\mathrm{i}-w_n-\frac{\mathrm{i}}{2}w'\cdot w'}{\mathrm{i}+w_n+\frac{\mathrm{i}}{2}w'\cdot w'}\right),w\in\Omega.$$

2)Φ 的 Jacobi 矩阵为 $\boldsymbol{J}_R(\Phi(z))=\dfrac{2^{n+1}}{|1+z_n|^{2(n+1)}},z\in\Omega$.

3)对于任意 ξ、$\eta\in\Omega$, 令 $\boldsymbol{i}=\Phi(0)=(0',\mathrm{i})$,

$$1-\langle\Phi^{-1}(\xi),\Phi^{-1}(\eta)\rangle=\frac{\rho(\xi,\eta)}{\rho(\xi,\boldsymbol{i})\rho(\boldsymbol{i},\eta)},$$

且 $1-|\Phi^{-1}(\xi)|^2=\dfrac{\rho(\xi)}{|\rho(\xi,\boldsymbol{i})|^2},1+[\Phi^{-1}(z)]_n=\dfrac{1}{\rho(z,\boldsymbol{i})}$.

4)对于任意 μ、$\nu\in\mathbb{B}_n$, $\beta_{\mathbb{B}_n}(\mu,\nu)$ 是单位球 $\mathbb{B}_n$ 上的 Bergman 度量, 则对于任意 z、$w\in\Omega$, 有

$$\beta_\Omega(z,w)=\beta_{\mathbb{B}_n}(\Phi^{-1}(z),\Phi^{-1}(w))=\tanh^{-1}\sqrt{1-\frac{\rho(z)\rho(w)}{\rho(z,w)^2}}.$$

证明 1)对于任意 z、$w\in\mathbb{B}_n$,

$$\rho(\Phi(z),\Phi(w))=\frac{1}{4}(((\Phi(z))'-\overline{(\Phi(w))'})^2-2\mathrm{i}((\Phi(z))_n-\overline{(\Phi(w))_n}))=\frac{1-\langle z,w\rangle}{(1+z_n)(1+\overline{w_n})},$$

由此可见, $\Phi(z)$ 是 $\mathbb{B}_n$ 到 Ω 的双射, 且 $\Phi(z)$ 可逆, 因此 1)成立.

2)$\boldsymbol{J}_{\mathbb{C}}(\Phi(z))=$

$$\begin{vmatrix}\frac{\sqrt{2}}{1+z_n}&0&0&-\frac{\sqrt{2}z_1}{(1+z_n)^2}\\0&\frac{\sqrt{2}}{1+z_n}&0&-\frac{\sqrt{2}z_2}{(1+z_n)^2}\\0&0&0&\vdots\\0&0&\frac{\sqrt{2}}{1+z_n}&-\frac{\sqrt{2}z_{n-1}}{(1+z_n)^2}\\\frac{2\mathrm{i}z_1}{(1+z_n)^2}&\cdots&\frac{2\mathrm{i}z_{n-1}}{(1+z_n)^2}&\frac{-2\mathrm{i}}{(1+z_n)^2}+\frac{2\mathrm{i}z'\cdot z'}{(1+z_n)^3}\end{vmatrix},$$

$z\in\mathbb{B}_n$,

因此 $\boldsymbol{J}_R(\Phi(z)) = |\boldsymbol{J}_{\mathbb{C}}(\Phi(z))|^2 = \dfrac{2^{n+1}}{|1+z_n|^{2(n+1)}}$.

3) 对于 ξ、$\eta \in \Omega$,

$$\rho(\xi,\eta) = \frac{1-\langle \Phi^{-1}(\xi), \Phi^{-1}(\eta)\rangle}{(1+(\Phi^{-1}(\xi))_n)(1+\overline{(\Phi^{-1}(\eta))_n})}, \tag{4}$$

式中 $1+(\Phi^{-1}(\xi))_n = \rho(\xi,\boldsymbol{i})$, 因此 3) 成立.

4) 由 Bergman 核的双全纯不变性 [5–6] 显然可得.

引理 2　设: r、$s>0$, $t>-1$, 且 $r+s-t>n+1$, 对于任意 z、$u\in\Omega$,

$$\int_\Omega \frac{\rho(w)^t}{\rho(z,w)^r\rho(w,u)^s}\mathrm{d}V(w) = \frac{C_1(n,r,s,t)}{\rho(z,u)^{r+s-t-n-1}},$$

式中

$$C_1(n,r,s,t) = \frac{2^{n+1}\pi^n\Gamma(1+t)\Gamma(r+s-t-n-1)}{\Gamma(r)\Gamma(s)}.$$

特别地, 令: s、$t\in\mathbb{R}$, 若 $t>-1$、$2s-t>n+1$, 则

$$\int_\Omega \frac{\rho(w)^t}{|\rho(z,w)|^{2s}}\mathrm{d}V(w) = \frac{C_1(n,s,s,t)}{\rho(z)^{2s-t-n-1}}, \tag{5}$$

否则, 积分等于无穷.

证明　由引理 1 及文献 [2] 的引理 4, 可得

$$\int_\Omega \frac{\rho(w)^t}{\rho(z,w)^r\rho(w,u)^s}\mathrm{d}V(w) = \int_{\mathbb{B}_n} \frac{2^{n+1}\rho(\Phi(\xi))^n}{\rho(z,\Phi(\xi))^r\rho(\Phi(\xi),u)^s|1+\xi_n|^{2(n+1)}}\mathrm{d}V(\xi) = \frac{C_1(n,s,r,t)}{\rho(z,u)^{r+s-t-n-1}}.$$

再证式 (5) 中的积分有限. 当且仅当 $t>-1$、$2s-t>n+1$, 任意选取 $\mu\in\mathbb{C}^{n-1}, \nu\in\mathbb{R}$, 定义映射

$$h:(z',z_n)\mapsto (z'+2^{1/2}\mu, z_n+2^{1/2}\mathrm{i}\langle z',\mu\rangle + \mathrm{i}|\mu|^2 - \mathrm{i}\mu\cdot\mu - \mathrm{i}2^{1/2}z'\cdot\mu+\nu).$$

显然 $\rho(h(z),h(w)) = \rho(z,w)$, 因此 $h(z)$是 Ω 到 Ω 的解析映射, 且 $\boldsymbol{J}_{\mathbb{C}}(h(z))=1$. 令 $\mu = -2^{1/2}z', \nu = -\Re z_n$, 则 $h(z) = \rho(z)\boldsymbol{i}$, 且对任意 $w\in\Omega$, $\rho(h(z),w) = \dfrac{\mathrm{i}}{2}(\overline{w_n}-\rho(z)\boldsymbol{i})$, 其中 $\boldsymbol{i} = (0',\mathrm{i})$. 令 $w = x+\mathrm{i}y = (x',x_n)+(y',y_n)$, 因此

$$\int_\Omega \frac{\rho(w)^t\mathrm{d}V(w)}{|\rho(z,w)|^{2s}} = \int_\Omega \frac{\rho(w)^t}{\rho(h(z),w)^{2s}}\mathrm{d}V(w) = 2^s\int_\Omega \frac{(y_n-y'^2)^t}{|x_n+\mathrm{i}y_n+\rho(z)\mathrm{i}|^s}\mathrm{d}V(w) = 2^{2s}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^\infty \frac{1}{|x_n+\mathrm{i}y_n+\rho(z)\mathrm{i}|^{2s}}\mathrm{d}x_n\mathrm{d}y_n\int_{|y'|<y_n^{1/2}}((y_n-y'^2)^t)\mathrm{d}y' = 2^{2s}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^\infty \frac{y_n^{n-1+t}}{|x_n+\mathrm{i}y_n+\rho(z)\mathrm{i}|^{2s}}\mathrm{d}x_n\mathrm{d}y_n\int_{|y'|<1}(1-|y'|)^t\mathrm{d}y',$$

则式 (5) 有限, 当且仅当 $t>-1$、$2s-t>n+1$.

引理 3　对于任意 $r>0$, z、u、$v\in\Omega$, 且 $\beta(u,v)<r$, 存在常数 C_1、$C_2>0$, 使得

$$C_1^{-1}\leqslant\frac{|\rho(u)|}{|\rho(v)|}\leqslant C_1, C_2^{-1}\leqslant\frac{|\rho(z,u)|}{|\rho(z,v)|}\leqslant C_2.$$

证明　令: $\xi = \Phi^{-1}(u), \eta = \Phi^{-1}(v), \zeta = \Phi^{-1}(z)$, 由 $\beta(u,v)<r$, 可知 $\beta_{\mathbb{B}_n}(\xi,\eta)<r$,

$$\rho(u) = \rho(\Phi(\xi)) = \frac{1-|\xi|^2}{|1+\xi_n|^2}, \rho(v) = \rho(\Phi(\eta)) = \frac{1-|\eta|^2}{|1+\eta_n|^2},$$
$$\rho(z,u) = \rho(\Phi(\zeta),\Phi(\xi)) = \frac{1-\langle\zeta,\xi\rangle}{(1+z_n)(1+\overline{\xi_n})},$$

因此

$$\frac{|\rho(u)|}{|\rho(v)|} = \frac{1-|\xi|^2}{1-|\eta|^2}\cdot\frac{|1+\eta_n|^2}{|1+\xi_n|^2},$$
$$\frac{|\rho(z,u)|}{|\rho(z,v)|} = \left|\frac{(1-\langle\zeta,\xi\rangle)(1+\overline{\eta_n})}{(1-\langle\zeta,\eta\rangle)(1+\overline{\xi_n})}\right|.$$

由文献 [1] 的引理 2.20 和 2.27 可得, 存在常数 C_r、$c_r>0$, 使得

$$C_r^{-1}\leqslant\frac{1-|\xi|^2}{1-|\eta|^2}\leqslant C_r, c_r^{-1}<\left|\frac{1-\langle\zeta,\xi\rangle}{1-\langle\zeta,\eta\rangle}\right|<c_r.$$

令: $\boldsymbol{e}_n = (0',1)$, 由于 $-\boldsymbol{e}_n$ 在单位球边界上, 不满足文献 [1] 引理 2.27 的条件. 故此, 令 $R = \tanh r, \xi = \varphi_\eta(\mu), \gamma = \varphi_\eta(-\boldsymbol{e}_n)$, 则 $\beta_{\mathbb{B}_n}(\varphi_\eta(\xi),0)<r$, 即 $|\mu|<R<1$, 由文献 [1] 的引理 2.27, 有$|\gamma|=1$且

$$\frac{|1+\eta_n|}{|1+\xi_n|} = \left|\frac{1-\langle-\boldsymbol{e}_n,\eta\rangle}{1-\langle-\boldsymbol{e}_n,\xi\rangle}\right| = \left|\frac{1-\langle\varphi_\eta(\gamma),\eta\rangle}{1-\langle\varphi_\eta(\gamma),\varphi_\eta(\mu)\rangle}\right| = \left|\frac{1-\langle\eta,\mu\rangle}{1-\langle\gamma,\mu\rangle}\right|, \tag{6}$$

式中由于 $|\mu|\leqslant R<1$, 有

$$1-R\leqslant|1-\langle\eta,\mu\rangle|<2,$$
$$1-R\leqslant 1-|\langle\gamma,\mu\rangle|<2,$$

因此令常数 $C_R = \dfrac{2}{1-R}$, 则

$$C_R^{-1}<\frac{|1+\eta_n|}{|1+\xi_n|}<C_R.$$

故此, 令$C_1 = C_rC_R$、$C_2 = c_rC_R$, C_1、C_2不依赖于r, 有

$$C_1^{-1}\leqslant\frac{|\rho(u)|}{|\rho(v)|}\leqslant C_1, C_2^{-1}\leqslant\frac{|\rho(z,u)|}{|\rho(z,v)|}\leqslant C_2.$$

引理 4　设 $\alpha>-1$、$r>0$, 存在常数 $c>0$、$C>0$, 对于 $z\in\Omega$,

$$c\rho(z)^{n+1+\alpha}\leqslant v_\alpha(D(z,r))\leqslant C\rho(z)^{n+1+\alpha}.$$

证明 作变换 $u=\Phi^{-1}(w),a=\Phi^{-1}(z),\xi=\varphi_a(u),R=\tanh r$,

$$v_\alpha(D(z,r))=\int_{D(z,r)}\mathrm{d}V_\alpha(w)=\int_{\beta_\Omega(z,w)<r}\rho(w)^\alpha\mathrm{d}V(w)=$$

$$\int_{\beta_{\mathbb{B}_n}(a,u)<r}\rho(\Phi(u))^\alpha\mathrm{d}(\Phi(u))=\int_{\beta_{\mathbb{B}_n}(a,u)<r}\frac{2^{n+1}(1-|u|^2)^\alpha}{|1+u_n|^{2(n+1+\alpha)}}\mathrm{d}u=$$

$$\int_{|\xi|<R}\frac{2^{n+1}}{|1+(\varphi_a(\xi))_n|^{2(n+1+\alpha)}}\cdot\frac{(1-|a|^2)^{n+1}(1-|\varphi_a(\xi)|^2)^\alpha}{|1-\langle\xi,a\rangle|^{2n+2}}\mathrm{d}V(\xi)=$$

$$\int_{|\xi|<R}\frac{2^{n+1}}{|1+(\varphi_a(\xi))_n|^{2(n+1+\alpha)}}\cdot\frac{(1-|a|^2)^{n+1+\alpha}(1-|\xi|^2)^\alpha}{|1-\langle\xi,a\rangle|^{2(n+1+\alpha)}}\mathrm{d}V(\xi),$$

由文献 [1] 的引理 1.3, $|\varphi_a(-\boldsymbol{e_n})|=1$ 且有

$$1-\langle\varphi_a(\varphi_a(\xi)),\varphi_a(-\boldsymbol{e_n})\rangle=\frac{(1-|a|^2)(1-\langle\varphi_a(\xi),-\boldsymbol{e_n}\rangle)}{(1-\langle\varphi_a(\xi),a\rangle)(1-\langle a,-\boldsymbol{e_n}\rangle)},$$

因此

$$1+(\varphi_a(\xi))_n=1-\langle\varphi_a(\xi),-\boldsymbol{e_n}\rangle=\frac{(1-\langle\xi,\varphi_a(-\boldsymbol{e_n})\rangle)(1-\langle a,-\boldsymbol{e_n}\rangle)}{1-\langle\xi,a\rangle},$$

$$v_\alpha(D(z,r))=\frac{2^{n+1}(1-|a|^2)^{n+1+\alpha}}{|1+a_n|^{2(n+1+\alpha)}}\cdot\int_{|\xi|<R}\frac{(1-|\xi|^2)^\alpha}{|1-\langle\xi,\varphi_a(-\boldsymbol{e_n})\rangle|^{2(n+1+\alpha)}}\mathrm{d}V(\xi).$$

由引理 1 可知,

$$\frac{(1-|a|^2)^{n+1+\alpha}}{|1+a_n|^{2(n+1+\alpha)}}=\frac{(1-|\Phi^{-1}(z)|^2)^{n+1+\alpha}}{|1+(\Phi^{-1}(z))_n|^{2(n+1+\alpha)}}=\frac{\rho(z)^{n+1+\alpha}}{|\rho(z,\boldsymbol{i})|^{2(n+1+\alpha)}}\cdot|\rho(z,\boldsymbol{i})|^{2(n+1+\alpha)}=\rho(z)^{n+1+\alpha},$$

$$\frac{(1-|\xi|^2)^\alpha}{|1-\langle\xi,\varphi_a(-\boldsymbol{e_n})\rangle|^{2(n+1+\alpha)}}=\frac{1}{|1-\langle\xi,\varphi_a(-\boldsymbol{e_n})\rangle|^{2(n+1)}}\cdot\frac{(1-|\xi|^2)^\alpha}{|1-\langle\xi,\varphi_a(-\boldsymbol{e_n})\rangle|^{2\alpha}},$$

由文献 [1] 引理 2.20 的证明可知, 存在常数 $C_1>0$, 使得

$$C_1^{-1}\leqslant\frac{(1-|\xi|^2)^\alpha}{|1-\langle\xi,\varphi_a(-\boldsymbol{e_n})\rangle|^{2\alpha}}\leqslant C_1,$$

C_1 与 r 有关, 若 r 有界, C_1 可不依赖于 r. 由文献 [1] 引理 1.3 的证明,

$$\int_{|\xi|<R}\frac{1}{|1-\langle\xi,\varphi_a(-\boldsymbol{e_n})\rangle|^{2(n+1)}}\mathrm{d}V(\xi)=\frac{n!}{4\pi^n}\frac{R^{2n}}{(1-R^2)^{n+1}},$$

令 $c=C_1^{-1}2^{n-1}\dfrac{n!}{\pi^n}\dfrac{R^{2n}}{(1-R^2)^{n+1}},C=C_12^{n-1}\dfrac{n!}{\pi^n}\dfrac{R^{2n}}{(1-R^2)^{n+1}}$.

结论得证.

引理 5 令 $\alpha\in\mathbb{R}$、$r_1>0$、$r_2>0$、$r_3>0$, 则对于任意 z、$w\in\Omega$, $\beta(z,w)<r_3$, 存在 $C>0$, 使得

$$C^{-1}\leqslant\frac{v_\alpha(D(z,r_1))}{v_\alpha(D(w,r_2))}\leqslant C.$$

证明 由引理 3 和 4 可得.

引理 5 中常数 C 与 r_1、r_2、r_3 有关. 令 $M>0$, 由于 $\lim\limits_{r\to0}\dfrac{\tanh Mr}{\tanh r}=M$, 因此当 $r_1=Mr_2$ 且 r_1、r_2、r_3 有界时, 引理 5 中常数 C 不依赖于 r_1、r_2、r_3.

引理 6 设 $r>0$、$p>0$、$\alpha>1$, 则存在常数 $C>0$, 对于任意 $f\in H(\Omega)$、$z\in\Omega$, 都有

$$|f(z)|^p\leqslant\frac{C}{\rho(z)^{n+1+\alpha}}\int_{D(z,r)}|f(w)|^p\mathrm{d}V_\alpha(w).$$

证明 令 $z=\Phi(\xi)$、$w=\Phi(u)$, 其中 ξ、$u\in\mathbb{B}_n,z\in\Omega$, $f\in H(\Omega)$, 则

$$\frac{1}{\rho(z)^{n+1+\alpha}}\int_{D(z,r)}|f(w)|^p\mathrm{d}V_\alpha(w)=$$

$$\frac{1}{\rho(\Phi(\xi))^{n+1+\alpha}}\int_{\beta_\Omega(\Phi(\xi),\Phi(u))<r}|f(\Phi(u))|\rho(\Phi(u))^\alpha\mathrm{d}(\Phi(u))=$$

$$\frac{|1+\xi_n|^{2(n+1+\alpha)}}{(1-|\xi|^2)^{n+1+\alpha}}\int_{\beta_{\mathbb{B}_n}(\xi,u)<r}|f(\Phi(u))|\frac{(1-|u|^2)^\alpha}{|1+u_n|^{2(n+1+\alpha)}}\mathrm{d}V(u).$$

由文献 [1] 的引理 2.24 可知,

$$|f(z)|^p\leqslant\frac{C}{\rho(z)^{n+1+\alpha}}\int_{D(z,r)}|f(w)|^p\mathrm{d}V_\alpha(w),f\in H(\Omega).$$

3 主要定理的证明

定理 1 的证明 定理 1 可由引理 1 和 2 及文献 [2] 定理 1 的证明得到.

定理 2 的证明 1) 对于任意$\delta>0$, 存在可数列$\{b_k\}_{k\in\mathbb{N}}\subset\Omega$, 使得 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}D\left(b_k,\dfrac{\delta}{2}\right)=\Omega$. 这里 $\{b_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 可以取 Ω 中的有理数列, 所以 $\{b_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 总存在, 用数学归纳法找到数列 $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$.

令 $i_1=1$, $i_2=\min\{k\text{: }\beta(b_k,b_{i_1})\geqslant\dfrac{\delta}{2},k>i_1\}$, 则对任意 $i_1<j<i_2$, 有$\beta(b_j,b_{i_1})<\dfrac{\delta}{2}$ 且 $\bigcup\limits_{k=i_1}^{i_2-1}D\left(b_k,\dfrac{\delta}{2}\right)\subset D(b_{i_1},\delta)$. 用同样的方法选取 $i_j,j=2,3,\cdots$, 令$i_j=\min\{k\text{: }\beta(b_k,b_{i_{j-1}})\geqslant\dfrac{\delta}{2}$, $k>i_{j-1}\}$, $j\geqslant2$, 因此 $\beta(b_{i_j},b_{i_{j-1}})\geqslant\dfrac{\delta}{2}$, 则对任意 $i_{j-1}\leqslant s\leqslant i_j$, 有 $\beta(b_s,b_{i_{j-1}})<\dfrac{\delta}{2}$, $\bigcup\limits_{s=i_{j-1}}^{i_j-1}D(b_s,\dfrac{\delta}{2})\subset D(b_{i_{j-1}},\delta)$, 且 $\bigcup\limits_{k=i_1}^{i_{j-1}}D(b_k,\dfrac{\delta}{2})\subset\bigcup\limits_{s=1}^{j-1}D(b_{i_s},\delta)$. 令 $a_j=b_{i_j},j=1,2,\cdots$, 综上用数学归纳法可以找到 $\{a_j\}_{j\in\mathbb{N}}\subset\Omega,\beta(a_i,a_j)\geqslant\dfrac{\delta}{2},i\neq j$, 使得 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}D(b_k,\dfrac{\delta}{2})\subset\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}D(a_k,\delta)$, 进而 $\Omega=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}D(a_k,\delta)$.

2) 由 1) 显然可得.

3) 任意选取 $z\in\Omega$、$\{a_{k_j}\}\subset\{a_k\}$, 使得 $z\in\bigcap\limits_{j=1}^{N_1}D(a_{k_j},\delta)$, 即对于任意 $a_{k_i}\in\{a_{k_j}\}$, 有 $\beta(z,a_{k_i})<\delta$, $D(a_{k_i},\delta)\subset D(z,2\delta)$,

显然 $\bigcup_{j=1}^{N_1} D(a_{k_j},\frac{\delta}{4})\subset D(z,4\delta)$, 由 1) 知, $D(a_{k_j},\frac{\delta}{4})\cap D(a_{k_i},\frac{\delta}{4})=\varnothing, i\neq j$, 可得 $\sum_{j=1}^{N_1} v\left(D\left(a_{k_j},\frac{\delta}{4}\right)\right)\leqslant v(D(z,4\delta))$. 又由引理 5 可知, 存在不依赖于 δ 的常数 $C>0$, 使得 $v(D(z,4\delta))\leqslant Cv(D(a_{k_j},\frac{\delta}{4}))$, 令 $N=[C]+1$, 则 $N_1\leqslant N$.

定理 3 的证明　若 1) 成立, 令

$$f(z)=\left(\frac{\rho(w)^{n+\alpha+1}}{|\rho(z,w)|^{2(n+\alpha+1)}}\right)^{1/p},\quad \forall z\in\Omega,$$

则由引理 2 可得

$$\int_\Omega |f(z)|^p \mathrm{d}V_\alpha(z)=\rho(w)^{n+\alpha+1}\int_\Omega \frac{\rho(z)^\alpha}{|\rho(z,w)|^{2(n+\alpha+1)}}\mathrm{d}V(z)=C_1(n,n+\alpha+1,n+\alpha+1,\alpha),$$

因此 2) 成立.

若 2) 成立, 则

$$\int_{D(a,r)}\frac{\rho(a)^{n+1+\alpha}}{|\rho(z,a)|^{2(n+\alpha+1)}}\mathrm{d}\mu(z)\leqslant C,$$

由引理 3 得 3) 成立.

若 3) 成立, 则 4) 显然成立.

若 4) 成立, 对于定理 2 中的数列 $\{a_k\}$, 存在常数 $C_1>0$, 使得

$$\mu(D(a_k,r))\leqslant C_1(1-|a_k|^2)^{n+1+\alpha},$$

若 $f(z)\in H(\Omega)$, 则

$$\int_\Omega |f(z)|^p \mathrm{d}\mu(z)\leqslant \sum_{k=1}^{\infty}\int_{D(a_k,r)}|f(z)|^p \mathrm{d}\mu(z)\leqslant \sum_{k=1}^{\infty}\mu(D(a_k,r))\sup\{|f(z)|^p: z\in D(a_k,r)\},$$

由引理 3 和 4 知, 存在常数 $C_2>0$, 使得

$$\sup\{|f(z)|^p: z\in D(a_k,r)\}\leqslant \frac{C_2}{\rho(a_k)^{n+1+\alpha}}\int_{D(a_k,2r)}|f(w)|^p \mathrm{d}V_\alpha(w),$$

因此由定理 2,

$$\int_\Omega |f(z)|^p \mathrm{d}\mu(z)\leqslant C_1C_2\sum_{k=1}^{\infty}\int_{D(a_k,r)}|f(w)|^p \mathrm{d}V_\alpha(w)\leqslant C_1C_2N\int_\Omega |f(w)|^p \mathrm{d}V_\alpha(w).$$

证毕.

4　参考文献

[1] ZHU K H. Spaces of holomorphic functions in the unit ball[M]. New York: Springer-Verlag, 2004:5

[2] LIU C W, LIU Y, HU P Y, et al. Two classes of integral operators over the Siegel upper half-space[J]. Complex Analysis and Operator Theory, 2019, 13(3): 685

[3] LIU C W, SI J J. Positive Toeplitz operators on the Bergman spaces of the Siegel upper half-space[J]. Communications in Mathematics and Statistics, 2020, 8(1): 113

[4] DENG G T, HUANG Y, QIAN T. Reproducing kernels of some weighted Bergman spaces[J]. The Journal of Geometric Analysis, 2021, 31(10): 9527

[5] KURES O, ZHU K H. A class of integral operators on the unit ball of $\mathbb{C}^n$[J]. Integral Equations and Operator Theory, 2006, 56(1): 71

[6] KRANTZ S G. Geometric analysis of Bergman kernel and metric[M]. New York: Springer, 2013:25

Bergman metric on a class of tubular domains

LIU Jiaxin　DENG Guantie　YIN Hongheng

(School of Mathematical Sciences, Key Laboratory of Mathematics and Complex Systems of Ministry of Education, Beijing Normal University, 100875, Beijing, China)

Abstract　In this paper, we give bounded condition of two types of integral operators. The Bergman metric on tubular area Ω is calculated. A set of metric spheres covered by Ω is obtained. It is proved that measure μ on tubular domain is some equivalent condition of the Carleson measure.

Keywords　tube domains; the weighted Bergman space; Bergman metric; Carleson measure

【责任编辑: 陆有忠】