

# 奇特原子核电荷半径的理论研究进展\*

安 荣<sup>1,2)†</sup> 曹李刚<sup>1,2)</sup> 张丰收<sup>1,2,3)</sup>

(1)北京市科学技术研究院,射线束技术教育部重点实验室,辐射技术研究所,100875,北京;

2)北京师范大学核科学与技术学院,100875,北京;

3)兰州重离子加速器国家实验室原子核理论研究中心,730000,甘肃兰州)

**摘要** 电荷半径是描述原子核基本性质的可观测量之一,对于奇特原子核电荷半径的精确描述是核物理实验和理论研究的前沿课题.影响原子核电荷半径大小的因素有很多,例如形变、对关联、壳闭合效应等,因此需要发展一个统一的理论模型.对于奇特原子核电荷半径的精确描述,一方面可以更深层次地揭示核子-核子有效相互作用,对理论模型参数进行约束;另一方面,可靠的电荷半径数值作为输入参量,对核天体演化研究具有重要意义.本文简要介绍关于奇特原子核电荷半径的理论研究进展,分析了不同理论模型对电荷半径的壳效应和奇偶效应的描述;结合 Ca 和 Rb 同位素链电荷半径的变化趋势,分析指出中子-质子关联和自旋-轨道相互作用在精确描述原子核电荷半径中起到了很重要的作用.

**关键词** 相对论平均场理论;电荷半径;壳效应;奇偶效应;对关联

**中图分类号** O571

**DOI:** 10.12202/j.0476-0301.2022133

## 0 引言

同原子核质量一样,原子核电荷半径的大小也是实验上可观测的描述原子核性质的基本量之一.随着探测技术的改进,实验上可以对越来越多的远离 $\beta$ -稳定线附近的奇特原子核的电荷半径进行测量<sup>[1]</sup>.电荷半径可以反映出核结构的信息,并且可靠的原子核电荷半径数值可以为核天体物理的理论研究提供输入参量<sup>[2]</sup>.除此之外,电荷半径的精确测量在新物理研究中起到了很重要的作用<sup>[3]</sup>.实验上可以通过不同的方法对原子核电荷半径的尺寸大小进行测量,目前应用最为广泛的方法之一是共线激光谱(collinear laser spectroscopy)技术<sup>[4-5]</sup>.丰富的原子核电荷半径实验数据为核物理理论模型的发展奠定了基础.

原子核虽然是一个复杂的量子多体系统,但是在整个核素图上,电荷半径随着中子数( $N$ )的增加会表现出普适的、有规律的变化趋势,例如实验上测得 Ca ( $Z=20$ )同位素链电荷半径在  $N=20$  和 28 之间具有明显的奇偶振荡现象<sup>[6]</sup>.在丰质子区域,这种现象依然存在<sup>[7]</sup>.同样,在 K( $Z=19$ )同位素链中这种现象依然

存在,但是其奇偶振荡的振幅明显减弱.在重核区域,原子核的形状演化也会导致电荷半径具有明显的奇偶效应,最为显著的是在 Hg ( $Z=80$ )<sup>[8-9]</sup>和 Bi ( $Z=83$ )<sup>[10]</sup>同位素链的缺中子区域.除此之外,在 Pb ( $Z=82$ )同位素链的缺中子区域,原子核电荷半径的奇偶效应依然存在<sup>[11]</sup>.

沿着同位素链,电荷半径会在特殊的核素处发生突然增大的变化趋势.当原子核内的中子数或者质子数为幻数时,原子核会更加稳定,电荷半径相对较小.当向满壳层的原子核中添加价核子时,电荷半径会有突然的增大趋势,这时候会出现所谓的“kink”现象<sup>[12-13]</sup>.例如,在  $N=28, 50, 82$  和 126 时,原子核的电荷半径表现出了明显的壳效应(shell effect).理论研究表明,自旋-轨道(spin-orbit)相互作用中较小的同位旋依赖行为导致了电荷半径壳效应的产生<sup>[14]</sup>.跨过这些幻数的时候,电荷半径会出现突然增大的变化趋势.另一方面,在  $N=60$  和 90 附近,电荷半径也会出现突然增大的变化趋势<sup>[15-16]</sup>.导致这种变化趋势的主要原因是来自原子核的形状相变(shape-phase transition),

\*国家自然科学基金资助项目(12135004, 11635003, 11961141004, 11975096, 12047513);中央高校基本科研业务费专项资助项目(2020NTST06);北京市科学技术研究院改革与发展专项资助项目(13001-2110, 13001-2116)

†通信作者:安荣(1987—),男,博士.研究方向:核多体理论. E-mail: anrong@brc.ac.cn

收稿日期: 2022-06-11

同时也称此区域为形状相变区域。

研究表明, 在 pf-壳的丰中子区域存在新的物理现象, 即对  $N=32$  附近核素的质量、 $2^+$ 态的能量以及 BE2 的测量表明  $N=32$  具有新幻性<sup>[17-26]</sup>。如上所述, 电荷半径在幻数处会出现“kink”现象, 然而<sup>52</sup>Ca 的电荷半径相比于临近的原子核其变化趋势没有发生改变<sup>[27]</sup>。同样地, 对 K 同位素链丰中子区电荷半径的研究表明, 跨过新幻数  $N=32$  时, <sup>52</sup>K 电荷半径并未表现出突然增大的变化趋势<sup>[28]</sup>。原子核电荷半径在 2 个中子幻数之间的演化会呈现出拱形的变化趋势, 实验上发现在 K 和 Ca 同位素链中, 原子核电荷半径在  $N=20$  和 28 之间存在“类抛物线”的演化趋势<sup>[6]</sup>。大量的实验数据表明, 电荷半径在 2 个中子幻数之间的这种变化趋势是一种普遍的现象, 例如在 Cu ( $Z=29$ )<sup>[29]</sup>、Cd ( $Z=48$ )<sup>[30]</sup> 和 Sn ( $Z=50$ )<sup>[31]</sup> 等同位素链中也会表现出这种变化趋势。随着远离稳定线附近原子核电荷半径数据的增加, 这些局部的有规律实验现象对原子核理论模型提出了限制。

## 1 描述奇特原子核电荷半径的理论模型

考虑到原子核的饱和性质, 稳定线附近原子核尺寸大小可以近似为  $A^{1/3}$  或  $Z^{1/3}$  的函数<sup>[32]</sup>。远离稳定线时, 实验值与理论值之间存在很大偏差。为了更精确地再现实验数据, Wang 等<sup>[33]</sup> 在电荷半径公式中引入了同位旋相关项和壳修正项。改进后的方法降低了实验值与理论值之间的均方根偏差, 同时可以给出 Ca 同位素链电荷半径在  $N=20$  和 28 之间的“类抛物线”变化趋势, 但是不能很好地描述其电荷半径的奇偶效应。为了能够更直观地描述电荷半径的壳效应和奇偶效应, 可以在五点公式中引入 Casten 因子以及奇偶相关的项<sup>[34]</sup>。其中, Casten 因子考虑了满壳层外中子和质子之间的相互作用, 这意味着中子-质子关联在描述原子核精细结构方面起到了一定的作用。

另外, 早期用来描述原子核质量 GK(Garvey-Kelson) 关系也可以用来研究原子核电荷半径的大小<sup>[35]</sup>, 根据相邻原子核电荷半径之间存在的简单变化关系, 进而外推到未知核素<sup>[36]</sup>。但是由于缺少远离稳定线的原子核的实验数据, 其外推能力受到了一定的限制。对于重核或超重核, 由于其寿命短, 因此实验上很难对其电荷半径进行测量。任中洲等提出了通过原子核的轻粒子发射或结团发射的衰变性质来计算电荷半径的数值<sup>[37-39]</sup>, 这为获取放射性原子核电荷半径的尺寸提供了一种可能的方法。以上的方法尽管可以用来估计原子核电荷半径的大小, 但是其拟合参数都

是根据已有实验数据来确定的, 这就导致其不能很好地外推到滴线附近的原子核。另一方面, 唯象方法不能精确地给出电荷密度分布。

基于能量密度泛函理论, 可以通过自洽迭代的方式得到电荷密度的分布形式, 应用最为广泛的有非相对论的 Hartree-Fock-Bogoliubov (HFB) 模型<sup>[40]</sup> 和相对论平均场 (relativistic mean field, RMF) 理论<sup>[41]</sup>。文献指出<sup>[42]</sup>, HFB 的能量密度泛函理论不能很好地再现电荷半径的奇偶效应以及壳效应。相对论平均场理论可以自洽地给出自旋-轨道耦合的信息, 即很自然地给出壳结构信息, 但不足之处是不能很好地描述电荷半径的奇偶效应。同样地, 手征有效场论相互作用下的从头算 (*Ab initio*) 模型也可以用来描述原子核的变化趋势, 但是不能很好地再现电荷半径的精细结构<sup>[27]</sup>。除此之外, 也可以通过自洽格林函数方法 (SCGF) 和内介质相似重整化群方法 (IMSRG) 来描述有限核电荷半径的信息, 详细讨论可参考文献<sup>[43-45]</sup>。

为了更准确地描述原子核电荷半径沿着同位素链的变化趋势, Reinhard 等<sup>[46]</sup> 在 Fayans 能量密度泛函理论中, 通过对相互作用中引入了密度的梯度项来表示表面对相互作用成分, 这意味着对关联在描述原子核电荷半径的精细结构中起到了很重要的作用。Miller 等<sup>[47]</sup> 指出, 中子-质子短程关联可以影响电荷半径的变化趋势, 且这种关联可以减小或者增大电荷半径的计算数值, 但是对于有些原子核来说并不起作用。基于此, 作者在 RMF 理论框架基础上, 在均方根电荷半径中唯象地引入了库伯对相关的中子-质子关联, 发展了 RMF(BCS)\* 模型。其中库伯对相关成分是通过求解状态相关的 BCS 方程得到的, 而引入的归一化参数是通过再现 <sup>44</sup>Ca 和 <sup>126</sup>Sn 核素的电荷半径而得到的, 改进后的模型可以很好地描述电荷半径的壳效应和奇偶效应<sup>[48]</sup>。

最近几年, 深度机器学习方法在核物理研究中起到了很重要的作用。机器学习以先验输入量或理论模型为基础, 可以对未知物理量进行外推计算和预言。机器学习方法在给出理论预言值的同时, 还可以给出系统性的理论误差, 这对于实验观测具有重要的参考价值。利用人工神经网络与贝叶斯理论结合而成的贝叶斯神经网络 (Bayesian neural network) 来研究原子核的电荷半径是如今的热点课题<sup>[49-51]</sup>。耿立升团队以贝叶斯神经网络为基础, 通过人工神经网络与三点公式相结合的方法预言了核素图中原子核电荷半径的变化趋势<sup>[52]</sup>。神经网络所拟合的数据, 即其输出为原子核电荷半径的实验数据与理论模型计算结果的差值。贝叶斯神经网络参数的后验分布是通过马

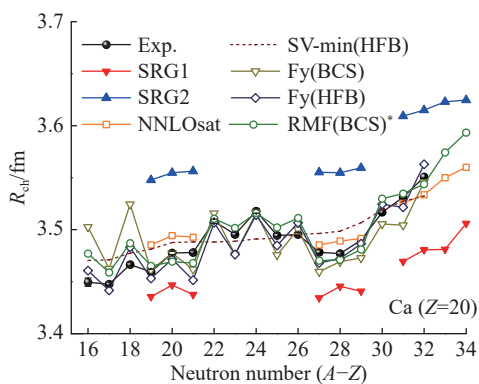
尔科夫链蒙特卡罗方法采样得到,然后便可以对核素图上任一原子核的电荷半径给出带有不确定度的计算结果.此方法可以很好地描述 Ca 和 K 同位素链电荷半径的奇偶效应和壳效应.

原子核是由质子和中子这两种费米子成分组成,对于原子核电荷半径的精确描述可以让人们更深刻地了解核力的基本性质.发展统一的可以再现现有电荷半径实验数据的理论模型,可以很好地预测未知区域核素电荷半径的大小.为了阐述 RMF(BCS)\*模型在描述电荷半径方面的普适性,我们通过 Ca 和 Rb 同位素链均方根电荷半径的计算结果作进一步的讨论.

## 2 数值计算结果和讨论

为了更清楚地反映不同理论模型对于电荷半径的描述,我们采用相对论平均场理论来描述 Ca 和 Rb 同位素链电荷半径的演化趋势.在计算中采用了非线性自耦合的 NL3 参数,通过求解状态依赖的 BCS 方程来处理费米面附近的对关联现象.其中对强度根据三点公式拟合质量的奇偶效应得到,对窗口为费米面上下 12 MeV,对相互作用采用零程接触的形式.详细的理论模型和数值过程可以参考文献 [48].

图 1 所示为不同模型下 Ca 同位素链电荷半径随着中子数的演化趋势. SV-min(HFB) 表示非相对论 Skyrme 密度泛函理论计算的结果, SV-min 表示有效相互作用力参数.从图 1 可以看出,非相对论的 HFB 模型不能给出电荷半径的奇偶效应,并且在跨过中子数  $N=28$  的时候,也不能很好地再现电荷半径突然增大的变化趋势.除此之外, HFB 模型过高地估计了  $N=20$  和  $28$  的数值,这是因为 HFB 模型不能很好地给出同位旋密度依赖的自旋-轨道相互作用形式 [42]. SRG1、SRG2 和 NNLOsat 表示不同手征有效场论相



实验数值取自文献 [1, 6], Fy(BCS) 和 Fy(HFB) 取自文献 [46], SRG1、SRG2 和 NNLOsat 取自文献 [27], RMF(BCS)\* 取自文献 [48], SV-min(HFB) 取自文献 [40].

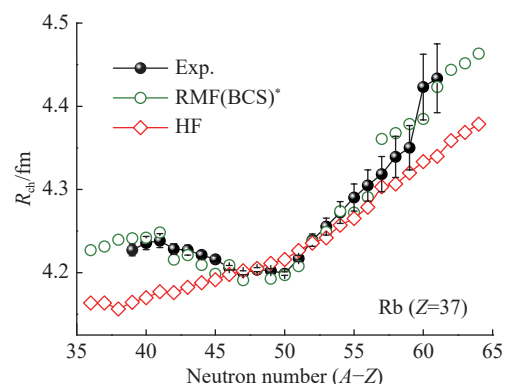
图 1 Ca 同位素链电荷半径随着中子数的演化

互作用下从头算模型给出的数值结果,数值结果显示 SRG1 低估了实验值,与此相反,SRG2 过高地估计了实验值,而 NNLOsat 的结果与 HFB 模型得到了几乎一致的变化趋势 [27].

Fy(BCS) 和 Fy(HFB) 表示 Fayans 密度泛函理论模型给出的结果,相同之处都是在对相互作用中考虑了密度梯度项,不同之处是 Fy(BCS) 通过 BCS 理论处理对关联,而 Fy(HFB) 作了 Bogoliubov 变换.这两个模型可以很好地描述电荷半径的奇偶效应,以及跨过  $N=28$  时突然增大的变化趋势,同时也可以很好地描述  $N=20$  和  $28$  之间“类抛物线”现象.但是在缺中子区域,相比于 Fy(HFB) 模型, Fy(BCS) 模型过高地估计了电荷半径的奇偶效应. RMF(BCS)\* 模型与 Fy(HFB) 模型得到了几乎一致的数值结果,但是在跨过  $N=28$  的时候, RMF(BCS)\* 模型能更好地再现实验值 [48].

为了进一步检验此模型在奇质子同位素链中的应用,同时考虑到壳效应和形状相变对电荷半径的影响,在图 2 中,我们通过相对论的 RMF(BCS)\* 模型和非相对论的 Skyrme 密度泛函理论 (HF) 计算了 Rb ( $Z=37$ ) 同位素链电荷半径的数值并于实验结果作对比.其中在 HF 模型中,相互作用参数选择 SV-bas,通过 BCS 理论处理对关联 [53].从图 2 中可以明显地发现: RMF(BCS)\* 模型可以很好地描述电荷半径在  $N=50$  处的壳效应;在  $N=60$  处电荷半径会出现突然增大的变化趋势,正如前面所讨论,这是因为形状相变导致的. RMF(BCS)\* 模型可以很好地再现实验数据,尤其是  $^{39-45}\text{Rb}$  处电荷半径的精细结构.与之相反, HFB 的 HF 模型过高地估计了  $^{87}\text{Rb}$  核素电荷半径的数值,并且在跨过  $N=50$  的时候,其变化趋势明显减弱,同时 HF 计算的结果在  $N=60$  附近偏离实验值.

RMF(BCS)\* 模型也可以很好地再现  $N=82$  和  $126$



实验数据取自文献 [6], 空心圆表示通过 RMF(BCS)\* 方法计算得到的结果, 空心菱形表示非相对论的 HF 模型的结果.

图 2 Rb 同位素链电荷半径随着中子数的演化

处电荷半径的壳效应<sup>[48, 54]</sup>, 但是也存在不足: 第一, 在均方根电荷半径公式中唯象地引入了中子-质子关联, 尽管可以通过求解 BCS 方程得到中子和质子的库伯对成分, 但是没有考虑到粒子数破缺对其产生的影响; 第二, 唯象公式中的参数仅是通过<sup>44</sup>Ca 和<sup>126</sup>Sn 的实验值来确定, 因此不能系统性地反映电荷半径的变化趋势.

最近的研究表明, 电荷半径的精确测量可以用来限制核物质的状态方程<sup>[55]</sup>, 因此对电荷半径的精确描述在核物理中起到了很重要的作用. Reinhard 等人指出, 原子核电荷密度分布会受到原子核形状因子的影响, 而原子核的形状因子与核子的内禀形状因子以及质心修正相关. 在相对论情形下, 电荷形状因子包含了张量密度的信息, 其与核子的磁形状因子结合就会对电荷密度产生磁贡献<sup>[56]</sup>. 沿着同位素链电荷半径的变化趋势会受到不同机制的影响, 例如形状共存、对关联、粒子振动耦合、形状相变等<sup>[57]</sup>. 同时电荷密度的高阶径向极矩与原子核表面厚度直接相关, 其在精确描述原子核电荷半径过程中起到了很重要的作用<sup>[58]</sup>. 因此, 发展统一的描述原子核电荷半径的理论模型对核物理研究十分重要.

### 3 结论和展望

对于电荷半径的精确描述可以用来限制核物理模型, 同时也可以利用镜像核电荷半径的差值关系限制核物质的状态方程. 对原子核电荷密度分布的精确描述, 可以反映核子-核子相互作用力, 并且为新物理研究提供一种可能的方法. 因此对于原子核电荷半径的系统性描述, 是核物理研究中的前沿课题之一.

RMF 理论可以很自然地处理自旋-轨道相互作用中的同位旋依赖行为<sup>[13]</sup>, 并且能够很好地描述原子核电荷半径的壳效应. 非相对论的 Skyrme 密度泛函理论过高地估计了中子幻数处电荷半径的数值, 且不能再现电荷半径的奇偶效应. 我们发展的 RMF(BCS)\* 模型可以很好地再现电荷半径的奇偶效应, 这也反映出中子-质子关联在描述原子核电荷半径中起到了很重要的作用. 尽管我们的模型可以很好地再现实验数值, 但是如何从微观理论上引入中子-质子关联, 将需要更系统深入的研究.

### 4 参考文献

- [1] LI T, LUO Y N, WANG N. Compilation of recent nuclear ground state charge radius measurements and tests for models[J]. Atomic Data and Nuclear Data Tables, 2021, 140: 101440
- [2] ARNOULD M, GORIELY S. Astronuclear physics: a tale of the atomic nuclei in the skies[J]. Progress in Particle and Nuclear Physics, 2020, 112: 103766
- [3] SAFRONOVA M S, BUDKER D, DEMILLE D, et al. Search for new physics with atoms and molecules[J]. Reviews of Modern Physics, 2018, 90(2): 025008
- [4] WANG S J, YANG X F, BAI S W, et al. Construction and commissioning of the collinear laser spectroscopy system at BRIF[J]. Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment, 2022, 1032: 166622
- [5] BAI S W, YANG X F, WANG S J, et al. Commissioning of a high-resolution collinear laser spectroscopy apparatus with a laser ablation ion source[J]. Nuclear Science and Techniques, 2022, 33(1): 1
- [6] ANGELI I, MARINOVA K P. Table of experimental nuclear ground state charge radii: an update[J]. Atomic Data and Nuclear Data Tables, 2013, 99(1): 69
- [7] MILLER A J, MINAMISONO K, KLOSE A, et al. Proton superfluidity and charge radii in proton-rich calcium isotopes[J]. Nature Physics, 2019, 15(5): 432
- [8] MARSH B A, DAY GOODACRE T, SELS S, et al. Characterization of the shape-staggering effect in mercury nuclei[J]. Nature Physics, 2018, 14(12): 1163
- [9] PERU S, HILAIRE S, GORIELY S, et al. Description of magnetic moments within the Gogny Hartree-Fock-Bogoliubov framework: application to Hg isotopes[J]. Physical Review C, 2021, 104(2): 024328
- [10] BARZAKH A, ANDREYEV A N, RAISON C, et al. Large shape staggering in neutron-deficient Bi isotopes[J]. Physical Review Letters, 2021, 127(19): 192501
- [11] ANSELMANT M, FAUBEL W, GORING S, et al. The odd-even staggering of the nuclear charge radii of Pb isotopes[J]. Nuclear Physics A, 1986, 451(3): 471
- [12] NAKADA H. Irregularities in nuclear radii at magic numbers[J]. Physical Review C, 2019, 100(4): 044310
- [13] GARCIA RUIZ R, VERNON A. Emergence of simple patterns in many-body systems: from macroscopic objects to the atomic nucleus[J]. The European Physical Journal A, 2020, 56: 136
- [14] SHARMA M M, LALAZISSIS G, KÖNIG J, et al. Isospin dependence of the spin-orbit force and effective nuclear potentials[J]. Physical Review Letters, 1995, 74(19): 3744
- [15] TOGASHI T, TSUNODA Y, OTSUKA T, et al. Quantum phase transition in the shape of Zr isotopes[J]. Physical Review Letters, 2016, 117(17): 172502
- [16] LALAZISSIS G A, SHARMA M M, RING P. Rare-earth nuclei: Radii, isotope-shifts and deformation properties in the relativistic mean-field theory[J]. Nuclear Physics A, 1996, 597(1): 35

- [17] WIENHOLTZ F, BECK D, BLAUM K, et al. Masses of exotic calcium isotopes pin down nuclear forces[J]. *Nature*, 2013, 498(7454): 346
- [18] ROSENBUSCH M, ASCHER P, ATANASOV D, et al. Probing the  $N=32$  shell closure below the magic proton number  $Z=20$ : mass measurements of the exotic isotopes  $^{52}\text{K}$ [J]. *Physical Review Letters*, 2015, 114(20): 202501
- [19] GALLANT A T, BALE J C, BRUNNER T, et al. New precision mass measurements of neutron-rich calcium and potassium isotopes and three-nucleon forces[J]. *Physical Review Letters*, 2012, 109(3): 032506
- [20] XU X, WANG M, BLAUM K. Masses of neutron-rich  $^{52}\text{Sc}$  and  $^{54, 56}\text{Ti}$  nuclides: The  $N=32$  subshell closure in scandium[J]. *Physical Review C*, 2019, 99(6): 064303
- [21] HUCK A, KLOTZ G, KNIPPER A, et al. Beta decay of the new isotopes  $^{52}\text{K}$ ,  $^{52}\text{Ca}$ , and  $^{52}\text{Sc}$ ; a test of the shell model far from stability[J]. *Physical Review C*, 1985, 31(6): 2226
- [22] LEISTENSCHNEIDER E, REITER M P, AYET SAN ANDRES S, et al. Dawning of the  $N=32$  shell closure seen through precision mass measurements of neutron-rich titanium isotopes[J]. *Physical Review Letters*, 2018, 120: 062503
- [23] PRISCIANDARO J I, MANTICA P F, BROWN B A, et al. New evidence for a subshell gap at  $N=32$ [J]. *Physics Letters B*, 2001, 510(1/2/3/4): 17
- [24] GOLDKUHLE A, FRANSEN C, BLAZHEV A, et al. Lifetime measurements in  $^{52, 54}\text{Ti}$  to study shell evolution toward  $N=32$ [J]. *Physical Review C*, 2019, 100(5): 054317
- [25] SEIDLITZ M, REITER P, DEWALD A, et al. Precision lifetime measurements of the first  $2^+$  and  $4^+$  states in  $^{56}\text{Cr}$  at the  $N=32$  subshell closure[J]. *Physical Review C*, 2011, 84(3): 034318
- [26] CORTÉS M L, RODRIGUEZ W, DOORNENBAL P, et al.  $N=32$  shell closure below calcium: low-lying structure of  $^{50}\text{Ar}$ [J]. *Physical Review C*, 2020, 102(6): 064320
- [27] GARCIA RUIZ R F, BISSELL M L, BLAUM K, et al. Unexpectedly large charge radii of neutron-rich calcium isotopes[J]. *Nature Physics*, 2016, 12(6): 594
- [28] KOSZORÚS Á, YANG X F, JIANG W G, et al. Charge radii of exotic potassium isotopes challenge nuclear theory and the magic character of  $N=32$ [J]. *Nature Physics*, 2021, 17(4): 439
- [29] DE GROOTE R P, BILLOWES J, BINNERSLEY C L, et al. Measurement and microscopic description of odd-even staggering of charge radii of exotic copper isotopes[J]. *Nature Physics*, 2020, 16(6): 620
- [30] HAMMEN M, NÖRTERSCHÄUSER W, BALABANSKI D L, et al. From calcium to cadmium: testing the pairing functional through charge radii measurements of  $^{100-130}\text{Cd}$ [J]. *Physical Review Letters*, 2018, 121(10): 102501
- [31] GORGES C, RODRÍGUEZ L V, BALABANSKI D L, et al. Laser spectroscopy of neutron-rich tin isotopes: a discontinuity in charge radii across the  $N=82$  shell closure[J]. *Physical Review Letters*, 2019, 122(19): 192502
- [32] ZHANG S Q, MENG J, ZHOU S G, et al. Isospin and  $Z^{1/3}$ -dependence of the nuclear charge radii[J]. *The European Physical Journal A: Hadrons and Nuclei*, 2002, 13(3): 285
- [33] WANG N, LI T. Shell and isospin effects in nuclear charge radii[J]. *Physical Review C*, 2013, 88: 011301
- [34] SHENG Z, FAN G, QIAN J, et al. An effective formula for nuclear charge radii[J]. *The European Physical Journal A*, 2015, 51: 40
- [35] PIEKAREWICZ J, CENTELLES M, ROCA-MAZA X, et al. Garvey-Kelson relations for nuclear charge radii[J]. *The European Physical Journal A*, 2010, 46(3): 379
- [36] BAO M, ZONG Y Y, ZHAO Y M, et al. Local relations of nuclear charge radii[J]. *Physical Review C*, 2020, 102: 014306
- [37] NI D D, REN Z Z, DONG T K, et al. Nuclear charge radii of heavy and superheavy nuclei from the experimental  $\alpha$ -decay energies and half-lives[J]. *Physical Review C*, 2013, 87(2): 024310
- [38] QIAN Y B, REN Z Z, NI D D. Attempt to probe nuclear charge radii by cluster and proton emissions[J]. *Physical Review C*, 2013, 87(5): 054323
- [39] QIAN Y B, REN Z Z, NI D D. Tentative probe into the nuclear charge radii of superheavy odd-mass and odd-odd nuclei[J]. *Physical Review C*, 2014, 89(2): 024318
- [40] GORIELY S, HILAIRE S, GIROD M, et al. First Gogny-Hartree-Fock-Bogoliubov nuclear mass model[J]. *Physical Review Letters*, 2009, 102(24): 242501
- [41] GENG L, TOKI H, SUGIMOTO S, et al. Relativistic mean field theory for deformed nuclei with pairing correlations[J]. *Progress of Theoretical Physics*, 2003, 110(5): 921
- [42] MALBRUNOT-ETTENAUER S, KAUFMANN S, BACCA S, et al. Nuclear charge radii of the nickel isotopes  $^{58-68, 70}\text{Ni}$ [J]. *Physical Review Letters*, 2022, 128: 022502
- [43] SOMA V. Self-consistent Green's function theory for atomic nuclei[J]. *Frontiers in Physics*, 2020, 8: 340
- [44] STROBERG S R, HERGERT H, BOGNER S K, et al. Nonempirical interactions for the nuclear shell model: an update[J]. *Annual Review of Nuclear and Particle Science*, 2019, 69: 307

- [45] SOMÀ V, NAVRÁTIL P, RAIMONDI F, et al. Novel chiral Hamiltonian and observables in light and medium-mass nuclei[J]. *Physical Review C*, 2020, 101: 014318
- [46] REINHARD P G, NAZAREWICZ W. Toward a global description of nuclear charge radii: exploring the Fayans energy density functional[J]. *Physical Review C*, 2017, 95(6): 064328
- [47] MILLER G A, BECK A, BECK S M T, et al. Can long-range nuclear properties be influenced by short range interactions?: a chiral dynamics estimate[J]. *Physics Letters B*, 2019, 793: 360
- [48] AN R, GENG L S, ZHANG S S. Novel ansatz for charge radii in density functional theories[J]. *Physical Review C*, 2020, 102(2): 024307
- [49] UTAMA R, CHEN W C, PIEKAREWICZ J. Nuclear charge radii: density functional theory meets Bayesian neural networks[J]. *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*, 2016, 43(11): 114002
- [50] MA Y F, SU C, LIU J, et al. Predictions of nuclear charge radii and physical interpretations based on the naive Bayesian probability classifier[J]. *Physical Review C*, 2020, 101: 014304
- [51] WU D, BAI C L, SAGAWA H, et al. Calculation of nuclear charge radii with a trained feed-forward neural network[J]. *Physical Review C*, 2020, 102(5): 054323
- [52] DONG X X, AN R, LU J X, et al. Novel Bayesian neural network based approach for nuclear charge radii[J]. *Physical Review C*, 2022, 105: 014308
- [53] AN R, JIANG X, CAO L G, et al. Evolution of nuclear charge radii in copper and indium isotopes[J]. *Chinese Physics C*, 2022, 46: 064101
- [54] AN R, JIANG X, CAO L G, et al. Odd-even staggering and shell effects of charge radii for nuclei with even  $Z$  from 36 to 38 and from 52 to 62[J]. *Physical Review C*, 2022, 105: 014325
- [55] PINEDA S V, KÖNIG K, ROSSI D M, et al. Charge radius of neutron-deficient  $^{54}\text{Ni}$  and symmetry energy constraints using the difference in mirror pair charge radii[J]. *Physical Review Letters*, 2021, 127(18): 182503
- [56] REINHARD P G, NAZAREWICZ W. Nuclear charge densities in spherical and deformed nuclei: toward precise calculations of charge radii[J]. *Physical Review C*, 2021, 103(5): 054310
- [57] PERERA U C, AFANASJEV A V, RING P. Charge radii in covariant density functional theory: a global view[J]. *Physical Review C*, 2021, 104(6): 064313
- [58] NAITO T, COLO G, LIANG H Z, et al. Second and fourth moments of the charge density and neutron-skin thickness of atomic nuclei[J]. *Physical Review C*, 2021, 104(2): 024316

## Theoretical research on charge radii in exotic nuclei

AN Rong<sup>1, 2)</sup> CAO Ligang<sup>1, 2)</sup> ZHANG Fengshou<sup>1, 2, 3)</sup>

(1)Key Laboratory of Beam Technology of Ministry of Education, Institute of Radiation Technology, Beijing Academy of Science and Technology, 100875, Beijing, China;

2)College of Nuclear Science and Technology, Beijing Normal University, 100875, Beijing, China;

3)Center of Theoretical Nuclear Physics, National Laboratory of Heavy Ion Accelerator of Lanzhou, 730000, Lanzhou, Gansu, China)

**Abstract** Charge radii are fundamental properties in describing atomic nuclei. Precise determination of charge radii of exotic nuclei can be influenced, for example, by shape deformation, pairing correlation, and shell closure effect. Therefore it is important to develop a unified theoretical model. Available descriptions of charge radii can disclose effective nucleon-nucleon interactions and make constraints on theoretical parameterization sets. Reliable data of nuclear charge radii serve as inputs in astrophysics study. This paper reviews recent progress of theoretical research regarding charge radii in exotic nuclei. The source of shell closures and odd-even staggering in charge radii are analyzed through various theoretical models. Trends in systematic change of charge radii along Ca and Rb isotopic chains are used as examples to emphasize that neutron-proton correlations and spin-orbit interactions play an important role in describing charge radii of exotic nuclei.

**Keywords** relativistic mean field theory; charge radii; shell effect; odd-even staggering; pairing correlations

【责任编辑: 刘先勤】