关于 D_n 型外尔群的本原幂等元 *

胡　峻　孙焕美[†]　王世轩
(北京理工大学数学与统计学院,100081,北京)

摘要　设$n\geqslant 4$是自然数,$W(D_n)$是D_n型的有限外尔群,设 K 是一个域且群代数$K[W(D_n)]$在域 K 上分裂半单. 对于$K[W(D_n)]$的每一个单模 U,精确构造了一个拟幂等元$z_U\in K[W(D_n)]$,即存在$c_U\in K^\times$,有$z_U^2=c_Uz_U$,使得$c_U^{-1}z_U$为本原幂等元,并且$z_UK[W(D_n)]$作为右$K[W(D_n)]$-模同构于 U. 主要研究结果推广了 Dipper、James 关于 A 型及 B 型外尔群半单群代数的本原幂等元的构造.

关键词　外尔群;群代数;本原幂等元
中图分类号　O152.6　　**DOI:** 10.12202/j.0476-0301.2020114

0　引言

本原幂等元是研究域上的有限维代数(如半单群代数)的表示理论的一个重要工具. 在有限群的常表示理论中,每个本原幂等元都生成一个不可约表示,每个不可约表示都可以实现为由一个本原幂等元生成的右理想. 本原幂等元在理论上可以由对应的不可约特征标表示出来[1-2]. 在实际应用中,学者们往往希望本原幂等元能用群代数的生成元简单表示出来,从而便于计算. 对于对称群及B型的外尔群,甚至一般的$G(m,1,n)$型的复反射群,目前已经有多种方法来构造这些幂等元[3-7]. 但对于D型的外尔群鲜有研究. 本文的主要目标就是针对D型的外尔群,在其半单群代数中精确构造出对应于它的每个不可约表示的本原幂等元.

令m是一个$\geqslant 1$的自然数. 对任一个满足$1\leqslant i\leqslant m-1$的整数$i$,令$s_i:=(i,i+1)$,则$\{s_1,s_2,\cdots,s_{m-1}\}$是$m$元对称群$\mathfrak{S}_m$的所有单反射的集合. 设$K$是一个域,$K[\mathfrak{S}_m]$表示对称群$\mathfrak{S}_m$的群代数. 根据定义,$K[\mathfrak{S}_m]$是以$s_1$, $\cdots$, s_{m-1}为生成元的、具有单位元的结合K-代数,满足如下生成关系:

$$s_i^2=1,\ \forall\, 1\leqslant i<m,$$

$$s_rs_t=s_ts_r,\ \forall\, 1\leqslant r<t-1<m-1,$$

$$s_as_{a+1}s_a=s_{a+1}s_as_{a+1},\ \forall\, 1\leqslant a<m-1.$$

假设$w\in\mathfrak{S}_m$,如果w具有分解$w=s_{i_1}s_{i_2}\cdots s_{i_k}$,并且使得$k$最小,则称这个分解为$w$的既约表达式. 此时,称$w$的长度为$k$,记作$\ell(w)=k$.

对m的任一个划分$\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots)$,令$\mathfrak{S}_\lambda$为$\mathfrak{S}_m$对应的标准 Young 子群,令$t^\lambda$为初始标准$\lambda$-表(数字$1,2,\cdots,m$按照从小到大的顺序依次从左到右放在 Young 图$[\lambda]$的第 1 行,然后第 2 行……);t_λ为唯一的标准λ-表,使得$(t^{\lambda'})'=t_\lambda$,这里$'$表示划分及标准表上的共轭运算. 令$w_\lambda\in\mathfrak{S}_m$表示唯一的元素,使得$t^\lambda w_\lambda=t_\lambda$,令

$$x_\lambda:=\sum_{w\in\mathfrak{S}_\lambda}w,\ y_\lambda:=\sum_{w\in\mathfrak{S}_\lambda}(-1)^{\ell(w)}w,\ z_\lambda:=x_\lambda w_\lambda y_{\lambda'},$$

称右$K[\mathfrak{S}_m]$-模$S^\lambda:=z_\lambda K[\mathfrak{S}_m]$为与$\lambda$对应的$K[\mathfrak{S}_m]$的 Specht 模,有[8-12]:

1) $S^\lambda:=z_\lambda w_{\lambda'}K[\mathfrak{S}_m]$,且若$K[\mathfrak{S}_m]$是半单的,则$\{S^\lambda|\lambda\vdash m\}$是两两不同构的所有单$K[\mathfrak{S}_m]$-模的完全集;

2) $(z_\lambda w_{\lambda'})^2=s_\lambda(1)z_\lambda w_{\lambda'}$,式中$s_\lambda(1):=\dfrac{m!}{\#Std(\lambda)}\in Z$是$A_{m-1}$型外尔群$\mathfrak{S}_m$对应于剖分$\lambda$的 Schur 元素,$Std(\lambda)$表示全体标准$\lambda$-表组成的集合;

3) 若$K[\mathfrak{S}_m]$是半单的,则对任意的$\lambda\vdash m$,$s_\lambda(1)\cdot 1_K\in K^\times$,且$s_\lambda(1)^{-1}z_\lambda w_{\lambda'}$是$K[\mathfrak{S}_m]$的一个本原幂等元,且$S^\lambda=s_\lambda(1)^{-1}z_\lambda w_{\lambda'}K[\mathfrak{S}_m]$.

通过以上可知,当$K[\mathfrak{S}_m]$半单时,不可约模S^λ是由拟幂等元$z_\lambda w_{\lambda'}$生成的.

设n是一个$\geqslant 2$的自然数. B_n型外尔群$W(B_n)$的群代数$K[W(B_n)]$是以s_0, s_1, $\cdots$, s_{n-1}为生成元的具有单位元的结合K-代数,其生成元满足

$$s_i^2=1,\ \forall\, 0\leqslant i\leqslant n-1,$$

* 国家自然科学基金资助项目(11525102)
† 通信作者:孙焕美(1992—),女,硕士. 研究方向:代数及其表示. E-mail: 1325564201@qq.com
收稿日期:2020-04-02

$$s_0s_1s_0s_1=s_1s_0s_1s_0,$$

$$s_rs_{r+1}s_r=s_{r+1}s_rs_{r+1},\ \forall\, 1\leqslant r\leqslant n-2,$$

$$s_rs_t=s_ts_r,\ \forall\, 0\leqslant r<t-1\leqslant n-2.$$

给定整数 $0\leqslant a\leqslant n$. 对 n 的任一个 a-双剖分 $\underline{\lambda}=(\lambda^{(1)},\lambda^{(2)})$, 令 $\mathfrak{S}_{\underline{\lambda}}$ 为 $\mathfrak{S}_n$ 对应于 $\underline{\lambda}$ 的标准 Young 子群. 令 $t^{\underline{\lambda}}$ 为初始标准 $\underline{\lambda}$-表, $t_{\underline{\lambda}}$ 为唯一标准 $\underline{\lambda}$-表, 使得 $(t^{\underline{\lambda}'})'=t_{\underline{\lambda}}$, 其中 $\underline{\lambda}'=(\lambda^{(1)\prime},\lambda^{(2)\prime})$.

设

$$x_{\underline{\lambda}}:=\sum_{w\in\mathfrak{S}_{\underline{\lambda}}}w,\ y_{\underline{\lambda}}:=\sum_{w\in\mathfrak{S}_{\underline{\lambda}}}(-1)^{\ell(w)}w,\ z_{\underline{\lambda}}:=u^-_{n-a}w_{n-a,a}u^+_ax_{\underline{\lambda}}w_{\underline{\lambda}}y_{\underline{\lambda}'},$$

右 $K[W(B_n)]$-模 $S^{\underline{\lambda}}:=z_{\underline{\lambda}}K[W(B_n)]$: 被称为与 $\underline{\lambda}$ 对应的 $K[W(B_n)]$ 的 Specht 模, 有[11-12]:

1) $S^{\underline{\lambda}}:=z_{\underline{\lambda}}w_{\underline{\lambda}'}K[W(B_n)]$, 且若 $K[W(B_n)]$ 是半单的, 则 $\left\{S^{\underline{\lambda}}|\underline{\lambda}\vdash n\right\}$ 是两两不同构的所有单 $K[W(B_n)]$-模的完全集;

2) $\left(z_{\underline{\lambda}}w_{\underline{\lambda}'}\right)^2=s_{\underline{\lambda}}(1)z_{\underline{\lambda}}w_{\underline{\lambda}'}$, 其中 $s_{\underline{\lambda}}(1)\in\mathbb{Z}$ 是 B_n 型外尔群对应于 a-双剖分 $\underline{\lambda}$ 的 Schur 元素;

3) 若 $K[W(B_n)]$ 是半单的, 则对任意的 $\underline{\lambda}\vdash n$, 有 $s_{\underline{\lambda}}(1)\cdot 1_K\in K^\times$, 这种情况下, $s_{\underline{\lambda}}(1)^{-1}z_{\underline{\lambda}}w_{\underline{\lambda}'}$ 是 $K[W(B_n)]$ 的一个本原幂等元, 且 $S^{\underline{\lambda}}=s_{\underline{\lambda}}(1)^{-1}z_{\underline{\lambda}}w_{\underline{\lambda}'}K[W(B_n)]$.

设 n 是 $\geqslant 4$ 的自然数. D_n 型外尔群 $W(D_n)$ 可以实现 B_n 型外尔群 $W(B_n)$ 的一个指数为 2 的正规子群(见第 1 章). 特别地, 把正则 $W(B_n)$-模 $K[W(B_n)]$ 限制为 $K[W(D_n)]$-模时, 它同构于一个秩 2 的自由 $K[W(D_n)]$-模, 即 $K[W(D_n)]\oplus K[W(D_n)]$.

1 相关知识及主要定理

设 m 是一个正整数, 若 $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots)$ 是一个非负整数的弱减序列, 满足 $|\lambda|:=\sum_{i\geqslant 1}\lambda_i=m$, 则称 λ 为 m 的划分. 定义 λ 对应的 Young 图 $[\lambda]:=\{(i,j)|i\geqslant 1,1\leqslant j\leqslant\lambda_i\}$. λ' 称为 λ 的共轭, 其中 $\lambda'_l:=\#\{i|i\geqslant 1,\lambda_i\geqslant l\}$, $\forall\, l\geqslant 1$. 当 $x=(i,j)\in[\lambda]$, 定义相对于 λ 的 x 的 hook 长度为整数[13] $h^\lambda_{i,j}:=\lambda_i-i+\lambda'_j-j+1$.

对称群 $\mathfrak{S}_m$(A_{m-1} 型外尔群)[12] 对应于 m 的划分 $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots)$ 的 Schur 元素, 可以表示为 $s_\lambda(1)=\prod_{(i,j)\in[\lambda]}h^\lambda_{i,j}=\dfrac{m!}{\#Std(\lambda)}\in\mathbb{N}$.

设 $0\leqslant a\leqslant n$ 是一个非负整数. n 的一个 a-双剖分是指一个有序剖分对 $\underline{\lambda}=(\lambda^{(1)},\lambda^{(2)})$, 式中 $\lambda^{(1)}$ 是 a 的一个划分, $\lambda^{(2)}$ 是 $n-a$ 的一个划分. 也称 $\underline{\lambda}$ 是 n 的一个 a-双剖分, 记作 $\underline{\lambda}\vdash n$. 此时, 对应于剖分 $\lambda^{(1)}$、$\lambda^{(2)}$ 的对称群 $\mathfrak{S}_a$ 和对称群 $\mathfrak{S}_{n-a}$ 的 Schur 元素分别记为

$$s_{\lambda^{(1)}}(1)=\prod_{(i,j)\in[\lambda^{(1)}]}h^{\lambda^{(1)}}_{i,j}=\frac{a!}{\#Std(\lambda^{(1)})},\ s_{\lambda^{(2)}}(1)=\prod_{(i,j)\in[\lambda^{(2)}]}h^{\lambda^{(2)}}_{i,j}=\frac{(n-a)!}{\#Std(\lambda^{(2)})}.$$

引理 1 令 $\underline{\lambda}=(\lambda^{(1)},\lambda^{(2)})$ 为 n 的 a-双剖分, 则 B_n 型外尔群对应于 $\underline{\lambda}$ 的 Schur 元素可以表示为[13]

$$s_{\underline{\lambda}}(1,1)=2^n\prod_{1\leqslant s\leqslant 2}\prod_{(i,j)\in[\lambda^{(s)}]}(h^{\lambda^{(s)}}_{i,j})=2^n\prod_{(i,j)\in[\lambda^{(1)}]}h^{\lambda^{(1)}}_{i,j}\prod_{(i,j)\in[\lambda^{(2)}]}h^{\lambda^{(2)}}_{i,j}$$
$$=2^n\frac{a!}{\#Std(\lambda^{(1)})}\frac{(n-a)!}{\#Std(\lambda^{(2)})}=2^ns_{\lambda^{(1)}}(1)s_{\lambda^{(2)}}(1).$$

为了介绍主要结果, 还需要回忆以下定义和结论.

定义 1 设 $n\geqslant 4$ 是自然数. D_n 型外尔群 $W(D_n)$ 定义为 B_n 型外尔群 $W(B_n)$ 的由 $s_u:=s_0s_1s_0$, s_1, s_2, $\cdots$, s_{n-1} 生成的子群, 它是 $W(B_n)$ 中一个指数为 2 的正规子群.

引理 2 设 n 是 $\geqslant 4$ 的自然数. D_n 型外尔群 $W(D_n)$ 的群代数 $K[W(D_n)]$, 可等同于 $W(B_n)$ 的群代数 $K[W(B_n)]$ 的由 s_u, s_1, s_2, $\cdots$, s_{n-1} 生成的 K-子代数. 它同构于由生成元 s_u, s_1, s_2, $\cdots$, s_{n-1} 及如下生成关系所定义的结合 K-代数 $s_u^2=1$, $s_i^2=1$, $\forall\, 1\leqslant i\leqslant n-1$, $s_us_2s_u=s_2s_us_2$, $s_us_1=s_1s_u$, $s_is_{i+1}s_i=s_{i+1}s_is_{i+1}$, $\forall\, 1\leqslant i\leqslant n-2$, $s_is_j=s_js_i$, $\forall\, 1\leqslant i<j-1\leqslant n-2$, $s_us_i=s_is_u$, $\forall\, 2<i<n$.

本研究中, 任给 $K[W(B_n)]$-模 M, 用符号 $M\downarrow_{D_n}$ 表示把 $K[W(B_n)]$-模 M 自然地限制为 $K[W(D_n)]$-模.

令 $\mathcal{P}_n$ 表示 n 的所有双剖分组成的集合, 对于 n 的任意双剖分 $\underline{\lambda}=(\lambda^{(1)},\lambda^{(2)})$, $\underline{\mu}=(\mu^{(1)},\mu^{(2)})$, 当 $\underline{\lambda}=\underline{\mu}$ 或 $\lambda^{(1)}=\mu^{(2)}$ 且 $\lambda^{(2)}=\mu^{(1)}$ 时, 定义 $\underline{\lambda}\sim\underline{\mu}$. 显然 $\sim$ 是 $\mathcal{P}_n$ 上的 1 个等价关系. 令 $\mathcal{P}_n/\sim$ 为 $\mathcal{P}_n$ 中所有等价类的代表元组成的固定集合.

假设 $K[W(D_n)]$ 在域 K 上是分裂半单的, 则由文献 [14] 里的命题 2.10 及 2.11 可知, 域 K 的特征一定不等于 2. 令 $\underline{\lambda}=(\lambda^{(1)},\lambda^{(2)})\in P_n/\sim$. 若 $\lambda^{(1)}\neq\lambda^{(2)}$, 则 $S^{\underline{\lambda}}\downarrow_{D_n}$ 仍然是不可约的[15]; 若 $\lambda^{(1)}=\lambda^{(2)}=\beta\vdash n/2$, 则 $S^{\underline{\lambda}}\downarrow_{D_n}$ 可以分解成 2 个维数相同、但相互不同构的单 $K[W(D_n)]$-模的直和, 即 $S^{\underline{\lambda}}\downarrow_{D_n}=S^{\underline{\lambda}}_+\oplus S^{\underline{\lambda}}_-$.

定理 1 设 n 是 $\geqslant 4$ 的自然数, 并且群代数 $K[W(D_n)]$ 在域 K 上分裂半单.

1) 若 n 是奇数, 则定义

$$\mathrm{Irr}\,K[W(D_n)]:=\left\{S^{\underline{\lambda}}\downarrow_{D_n}|\underline{\lambda}=(\lambda^{(1)},\lambda^{(2)})\in\mathcal{P}_n/\sim\right\};$$

2) 若 n 是偶数, 则定义

$$\mathrm{Irr}\,K[W(D_n)]:=\{S^{\underline{\lambda}}\downarrow_{D_n},S^{(\beta,\beta)}_+,S^{(\beta,\beta)}_-|\underline{\lambda}=(\lambda^{(1)},\lambda^{(2)})\in\mathcal{P}_n/\sim,\lambda^{(1)}\neq\lambda^{(2)},\beta\vdash n/2\},$$

则 $\mathrm{Irr}\,K[W(D_n)]$ 是所有两两不同构的单 $K[W(D_n)]$-模组成的一个完全集[15].

设 $0\leqslant a\leqslant n$ 是一个非负整数. 对任意的 $i\in\{1,2,\cdots,n-1\}\backslash\{n-a\}$, 定义

$$\hat{i}:=\begin{cases}i+a,\ 1\leqslant i<n-a,\\ i-n+a,\ n-a<i<n,\end{cases}$$

则^可以自然拓展为从$K[\mathfrak{S}_{(n-a,a)}]$到$K[\mathfrak{S}_{(a,n-a)}]$的代数同构, 对任意的$i\in\{1,2,\cdots,n-1\}\setminus\{n-a\}$, ^在生成元上的作用为$\widehat{s_i}:=s_{\hat{i}}$.

对于n的任意一个a-双剖分$\underline{\lambda}=(\lambda^{(1)}\lambda^{(2)})$, 定义

$$z_{\underline{\lambda}}=z_{\lambda^{(1)}}\widehat{z_{\lambda^{(2)}}},$$

式中

$$z_{\lambda^{(1)}}=x_{\lambda^{(1)}}w_{\lambda^{(1)}}y_{\lambda^{(1)'}}=\left(\sum_{w\in\mathfrak{S}_{\lambda^{(1)}}}w\right)w_{\lambda^{(1)}}\left(\sum_{w\in\mathfrak{S}_{\lambda^{(1)'}}}(-1)^{-\ell(w)}w\right),$$

$$z_{\lambda^{(2)}}=x_{\lambda^{(2)}}w_{\lambda^{(2)}}y_{\lambda^{(2)'}}=\left(\sum_{w\in\mathfrak{S}_{\lambda^{(2)}}}w\right)w_{\lambda^{(2)}}\left(\sum_{w\in\mathfrak{S}_{\lambda^{(2)'}}}(-1)^{-\ell(w)}w\right).$$

定义

$$z\left(\underline{\lambda}\right):=v(n-a,a)z_{\underline{\lambda}}w_{\lambda^{(1)'}}\widehat{w_{\lambda^{(2)'}}}w_{a,n-a}\in K[W(D_n)],$$

式中$v(n-a,a)$的详细定义由定义 3 给出.

若$\lambda^{(1)}=\lambda^{(2)}=\beta$, 则此时$n$为偶数, 定义

$$z_+\left(\underline{\lambda}\right)=v(n/2,n/2)z_{\underline{\lambda}}w_{\lambda^{(1)'}}\widehat{w_{\lambda^{(2)'}}}(w_{n/2,n/2}+1)\in K[W(D_n)],$$

$$z_-\left(\underline{\lambda}\right)=v(n/2,n/2)z_{\underline{\lambda}}w_{\lambda^{(1)'}}\widehat{w_{\lambda^{(2)'}}}(w_{n/2,n/2}-1)\in K[W(D_n)].$$

下面的定理是本研究的主要结果.

定理 2 设$n\geqslant 4$是自然数, 并且群代数$K[W(D_n)]$在域K上是分裂半单的. 任给$\underline{\lambda}=(\lambda^{(1)},\lambda^{(2)})\in\mathcal{P}_n/\sim$, 式中$a=|\lambda^{(1)}|$.

1) 若$\lambda^{(1)}\neq\lambda^{(2)}$, 则$2s_{\underline{\lambda}}(1,1)^{-1}z\left(\underline{\lambda}\right)$是$K[W(D_n)]$的一个本原幂等元, 且使得$2s_{\underline{\lambda}}(1,1)^{-1}z\left(\underline{\lambda}\right)K[W(D_n)]\cong S^{\underline{\lambda}}\downarrow_{D_n}$.

2) 若$\lambda^{(1)}=\lambda^{(2)}$, 则$s_{\underline{\lambda}}(1,1)^{-1}z_+\left(\underline{\lambda}\right)$, $s_{\underline{\lambda}}(1,1)^{-1}z_-\left(\underline{\lambda}\right)$是相互正交的本原幂等元, 且使得

$$s_{\underline{\lambda}}(1,1)^{-1}z_+\left(\underline{\lambda}\right)K[W(D_n)]\cong S^{\underline{\lambda}}_+,$$
$$s_{\underline{\lambda}}(1,1)^{-1}z_+\left(\underline{\lambda}\right)K[W(D_n)]\cong S^{\underline{\lambda}}_-.$$

2 元素$v(n-a,a)$与$w_a^{[n-a]}$

设$0\leqslant a\leqslant n$是一个非负整数. 对于n的任意一个a-双剖分$\underline{\lambda}=(\lambda^{(1)},\lambda^{(2)})$, 令$\widehat{\underline{\lambda}}:=(\lambda^{(2)},\lambda^{(1)})$. 回忆$z_{\underline{\lambda}}=z_{\lambda^{(1)}}\widehat{z_{\lambda^{(2)}}}$, 式中

$$z_{\lambda^{(1)}}=x_{\lambda^{(1)}}w_{\lambda^{(1)}}y_{\lambda^{(1)'}}=\left(\sum_{w\in\mathfrak{S}_{\lambda^{(1)}}}w\right)w_{\lambda^{(1)}}\left(\sum_{w\in\mathfrak{S}_{\lambda^{(1)'}}}(-1)^{-\ell(w)}w\right),$$

$$z_{\lambda^{(2)}}=x_{\lambda^{(2)}}w_{\lambda^{(2)}}y_{\lambda^{(2)'}}=\left(\sum_{w\in\mathfrak{S}_{\lambda^{(2)}}}w\right)w_{\lambda^{(2)}}\left(\sum_{w\in\mathfrak{S}_{\lambda^{(2)'}}}(-1)^{-\ell(w)}w\right).$$

根据文献 [16] 引理 4.5 可以得到

$$z_{\underline{\lambda}}w_{\lambda^{(1)'}}\widehat{w_{\lambda^{(2)'}}}z_{\underline{\lambda}}=s_{\lambda^{(1)}}(1)s_{\lambda^{(2)}}(1)z_{\underline{\lambda}}.$$

定义 2 对任意的非负整数k、a、b, 设[10-11]

$$u_k^+=\begin{cases}1, & k=0,\\ \prod_{i=1}^{k}(1+s_{i-1}\cdots s_1s_0s_1\cdots s_{i-1}), & 1\leqslant k\leqslant n,\end{cases}$$

$$u_k^-=\begin{cases}1, & k=0,\\ \prod\limits_{i=1}^{k}(1-s_{i-1}\cdots s_1s_0s_1\cdots s_{i-1}), & 1\leqslant k\leqslant n,\end{cases}$$

$$v_{a,b}=u_a^+w_{a,b}u_b^-,\ v'_{a,b}=u_a^-w_{a,b}u_b^+,$$

式中

$$w_{a,b}=\begin{cases}\underbrace{s_a\cdots s_1}\underbrace{s_{a+1}\cdots s_2}\cdots\underbrace{s_{a+b-1}\cdots s_b}, & a、b\text{为正整数},\\ 1, & a\text{或}b\text{为}0.\end{cases}$$

令τ是$K[W(B_n)]$的群代数自同构, 它在标准生成元上的作用定义为$\tau(s_1)=s_0s_1s_0$, 而对任意的$i\neq 1$, $\tau(s_i)=s_i$. 令σ是$K[W(B_n)]$的群代数自同构, 其在标准生成元上的作用定义为$\sigma(s_0)=-s_0$, 而对任意的$i\neq 0$, $\sigma(s_i)=s_i$. 显然有$\tau(K[W(B_n)])=K[W(B_n)]$和$\sigma\downarrow_{W[D_n]}=id$. 对任意的$x\in K[W(B_n)]$, 记$\widetilde{x}:=\tau(x)$.

定义 3 对任意的正整数k、a及非负整数b, 设[14]

$$\bar{p}_k=\begin{cases}1, k=1,\\ \prod\limits_{i=2}^{k}(1+s_{i-1}\cdots s_2s_us_1s_2\cdots s_{i-1}), 2\leqslant k\leqslant n,\end{cases}$$

式中$s_u=s_0s_1s_0\in W(D_n)$.

$$v(a,b)=\begin{cases}\bar{p}_a, b=0,\\ \bar{p}_a(w_{a,b}-\widetilde{w_{a,b}})\bar{p}_b, b\geqslant 1.\end{cases}$$

引理 3 对任意的正整数a, 有

$$u_a^+=\bar{p}_a(1+s_0)=(1+s_0)\bar{p}_a,$$

$$u_a^-=\bar{p}_a(1-s_0)=(1-s_0)\bar{p}_a,$$

$$(\bar{p}_a)^2=2^{a-1}\bar{p}_a,$$

$$v_{a,b}=(1+s_0)v(a,b)=v(a,b)(1-s_0),$$

$$v'_{a,b}=(1-s_0)v(a,b)=v(a,b)(1+s_0).$$

证明: 除了第 3 个等式外, 其余均可见文献 [15] 引理 1.3. 而对于第 3 个等式, 因为$(u_a^-)^2=2^au_a^-$, $(1-s_0)^2=2(1-s_0)$, 所以$(\bar{p}_a)^2=2^{a-1}\bar{p}_a$.

引理 4 设$h\in K[W(B_n)]$, 并且$0\leqslant a\leqslant n$, 有:

1) 存在唯一的$h_1\in K[\mathfrak{S}_n]$, h'_b、$h''_b\in K[\mathfrak{S}_n]$, 使得$u_a^+h=u_a^+h_1+\sum\limits_{b>a}h'_bu_b^+h''_b$;

2) 存在唯一的$g_1\in K[\mathfrak{S}_{(a,n-a)}]$, g'_b、$g''_b\in K[\mathfrak{S}_n]$, 使得

$$u_a^+hu_a^+=u_a^+g_1+\sum_{b>a}g'_bu_b^+g''_b.$$

证明: 用$\mathcal{H}_q(\mathfrak{S}_n)$、$\mathcal{H}_q(B_n)$分别表示参数为未定元$q$的$A_{n-1}$型及$B_n$型的 Hecke 代数. 根据文献 [11] 的引理 4.9 及 5.2, 若$h\in\mathcal{H}_q(B_n)$, 并且$0\leqslant a\leqslant n$, 则有:

1) 存在唯一的 $h_1\in\mathcal{H}_q(\mathfrak{S}_n)$, h_b'、$h_b''\in\mathcal{H}_q(\mathfrak{S}_n)$, s.t. $u_a^+h=u_a^+h_1+\sum\limits_{b>a}h_b'u_b^+h_b''$;

2) 存在唯一的 $g_1\in\mathcal{H}_q(\mathfrak{S}_{(a,n-a)})$, g_b'、$g_b''\in\mathcal{H}(\mathfrak{S}_n)$, s.t. $u_a^+hu_a^+=u_a^+g_1+\sum\limits_{b>a}g_b'u_b^+g_b''$.

令$q=1$, 引理即得证.

定义 4 定义$w_a^{[n-a]}$是$K[\mathfrak{S}_n]$中唯一的元素, 使得

$$u_a^+w_{a,n-a}u_{n-a}^-=u_a^+w_a^{[n-a]}+\sum_{b>a}w_b'u_b^+w_b''$$

成立, 式中w_b'、$w_b''\in K[\mathfrak{S}_n]$.

用“*”表示$K[\mathfrak{S}_n]$的代数反自同构, 使得对于任意的$1\leqslant i<n$, $*$在生成元上的作用定义为$s_i^*=s_i$.

将同构σ和反自同构$*$作用在定义 4 的等式 2 边, 可以得到

$$\begin{cases}u_a^-w_{a,n-a}u_{n-a}^+=u_a^-w_a^{[n-a]}+\sum\limits_{b>a}w_b'u_b^-w_b'',\\ u_{n-a}^-w_{n-a,a}u_a^+=(w_a^{[n-a]})^*u_a^++\sum\limits_{b>a}w_b'u_b^+w_b'',\\ u_{n-a}^+w_{n-a,a}u_a^-=(w_a^{[n-a]})^*u_a^-+\sum\limits_{b>a}w_b'u_b^-w_b''.\end{cases}\tag{1}$$

引理 5 设$0\leqslant a\leqslant n$是一个非负整数, 则$w_a^{[n-a]}=2^{n-a}w_{a,n-a}$.

证明: 任给$x,y\in K[W(B_n)]$, 若

$$x-y\in\sum_{b>a}K[W(B_n)]u_b^+K[W(B_n)],$$

则定义$x\equiv y$. 特别地, 为方便计算, 令$\widehat{w}_{a,n}:=s_{a+1}\cdots s_2s_{a+2}\cdots s_3\cdots s_{n-1}\cdots s_{n-a}$, 且满足$w_{a,n-a}=s_a\cdots s_1\widehat{w}_{a,n}$.

$$\begin{aligned}&u_a^+w_{a,n-a}u_{n-a}^-\\&=u_a^+s_a\cdots s_1\widehat{w}_{a,n}(1-s_0)(1-s_1s_0s_1)\cdots(1-s_{n-a-1}\cdots s_1s_0s_1\cdots s_{n-a-1})\\&=u_a^+s_a\cdots s_1(1-s_0)\widehat{w}_{a,n}(1-s_1s_0s_1)\cdots(1-s_{n-a-1}\cdots s_1s_0s_1\cdots s_{n-a-1})\\&\equiv 2u_a^+s_a\cdots s_1\widehat{w}_{a,n}(1-s_1s_0s_1)\cdots(1-s_{n-a-1}\cdots s_1s_0s_1\cdots s_{n-a-1})\\&=2u_a^+w_{a,n-a}(1-s_1s_0s_1)\cdots(1-s_{n-a-1}\cdots s_1s_0s_1\cdots s_{n-a-1}),\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}&u_a^+w_{a,n-a}u_{n-a}^-\\&\equiv 2u_a^+w_{a,n-a}(1-s_2s_1s_0s_1s_2)\cdots(1-s_{n-a-1}\cdots s_1s_0s_1\cdots s_{n-a-1})-\\&\quad 2s_{a+1}u_a^+w_{a,n-a}s_0s_1(1-s_2s_1s_0s_1s_2)\cdots(1-s_{n-a-1}\cdots s_1s_0s_1\cdots s_{n-a-1})\\&\equiv 2u_a^+w_{a,n-a}(1-s_2s_1s_0s_1s_2)\cdots(1-s_{n-a-1}\cdots s_1s_0s_1\cdots s_{n-a-1})+\\&\quad 2s_{a+1}u_a^+w_{a,n-a}s_1(1-s_2s_1s_0s_1s_2)\cdots(1-s_{n-a-1}\cdots s_1s_0s_1\cdots s_{n-a-1})\\&\equiv 2^2u_a^+w_{a,n-a}(1-s_2s_1s_0s_1s_2)\cdots(1-s_{n-a-1}\cdots s_1s_0s_1\cdots s_{n-a-1})\\&\equiv\cdots\equiv 2^{n-a}u_a^+w_{a,n-a}.\end{aligned}$$

由引理 3 得$w_a^{[n-a]}=2^{n-a}w_{a,n-a}$.

定义 5 设n是偶数, 则[15]

$$u_{n/2}^+w_{n/2,n/2}u_{n/2}^-=2^{n/2}u_{n/2}^+w_{n/2,n/2}+\sum_{b>n/2}w_b'u_b^+w_b'',$$

成立, 式中$w_b',w_b''\in K[\mathfrak{S}_n]$.

引理 6 设$0\leqslant a\leqslant n$是一个非负整数, 则

$$2^{n-a}v(n-a,a)w_{a,n-a}=v(n-a,a)(w_{a,n-a}-\widetilde{w_{a,n-a}})\bar{p}_{n-a}.$$

证明: 由公式(1),

$$u_a^-w_{a,n-a}u_{n-a}^+=u_a^-w_a^{[n-a]}+\sum_{b>a}w_b'u_b^-w_b''.$$

结合文献 [10] 的命题 3.7 与引理 2.6, 可以得到

$$u_{n-a}^+w_{n-a,a}v_{a,n-a}'=v_{n-a,a}w_a^{[n-a]}=2^{n-a}v_{n-a,a}w_{a,n-a}.$$

由文献 [15] 的引理 1.3, 有

$$\begin{aligned}&(1+s_0)2^{n-a}v(n-a,a)w_{a,n-a}\\&=v_{n-a,a}w_a^{[n-a]}=u_{n-a}^+w_{n-a,a}u_a^-w_a^{[n-a]}\\&=u_{n-a}^+w_{n-a,a}u_a^-w_{a,n-a}u_{n-a}^+\\&=(1+s_0)v(n-a,a)w_{a,n-a}(1+s_0)\bar{p}_{n-a}\\&=(1+s_0)v(n-a,a)(w_{a,n-a}-\widetilde{w}_{a,n-a})\bar{p}_{n-a},\end{aligned}$$

显然有$2^{n-a}v(n-a,a)w_{a,n-a}=v(n-a,a)(w_{a,n-a}-\widetilde{w}_{a,n-a})\bar{p}_{n-a}$.

推论 1 设$i\neq a$是一个正整数, 且满足$1\leqslant i\leqslant n-1$, 有

$$s_iw_a^{[n-a]}=\begin{cases}w_a^{[n-a]}s_{i+n-a}, & 1\leqslant i<a,\\ w_a^{[n-a]}s_{i-a}, & a<i\leqslant n-1.\end{cases}$$

证明: 由引理 5 得$w_a^{[n-a]}=2^{n-a}w_{a,n-a}$, 再由定义 2 引理得证.

引理 7 设$0\leqslant a\leqslant n$是一个非负整数, 则

$$(w_a^{[n-a]})^*v(a,n-a)=v(n-a,a)w_a^{[n-a]}.$$

证明: 因为

$$(w_a^{[n-a]})^*u_a^+w_{a,n-a}u_{n-a}^-=u_{n-a}^-w_{n-a,a}u_a^+w_{a,n-a}u_{n-a}^-=u_{n-a}^-w_{n-a,a}u_a^+w_a^{[n-a]},$$

等价地,

$$(w_a^{[n-a]})^*v(a,n-a)(1-s_0)=(1-s_0)v(n-a,a)w_a^{[n-a]}.$$

引理即证.

假定n是偶数, 记$m:=n/2$. 简记$w_m^{[m]}$为w_m, 则$w_m=2^mw_{m,m}=w_m^*$.

应用本章的引理及推论可知, 在群代数$K[\mathrm{W}(D_n)]$中有如下结论:

1) $v(m,m)(w_{m,m}-\widetilde{w_{m,m}})v(m,m)=2^{2m}v(m,m)$;

2) $v(m,m)w_m=2^mv(m,m)w_{m,m}=v(m,m)(w_{m,m}-\widetilde{w_{m,m}})\bar{p}_m$;

3) $w_mv(m,m)=v(m,m)w_m$;

4) $\bar{p}_m^2=2^{m-1}\bar{p}_m$.

3 主要定理 2 的证明

本章中始终假设 $n\geqslant 4$是自然数, 并且 $0\leqslant a\leqslant n$是一个非负整数. 定理 2 的内容包含在本章的定理 3 和 4 中.

定理 3 设群代数$K[W(D_n)]$在域K上是分裂半单的. 令 $\underline{\lambda}=(\lambda^{(1)},\lambda^{(2)})\in\mathcal{P}_n/\sim$是$n$的 1 个 a-双剖分, 式中 $a=|\lambda^{(1)}|$, $n-a=|\lambda^{(2)}|$, 并且满足$\lambda^{(1)}\neq\lambda^{(2)}$. 定义

$$z(\underline{\lambda}):=v(n-a,a)z_{\underline{\lambda}}w_{\lambda^{(1)\prime}}\widehat{w_{\lambda^{(2)\prime}}}w_{a,n-a}\in K[W(D_n)],$$

则 $z(\underline{\lambda})^2=\dfrac{1}{2}s_{\underline{\lambda}}(1,1)z(\underline{\lambda})$, 并且 $z(\underline{\lambda})K[W(D_n)]\cong S^{\underline{\lambda}}\downarrow_{D_n}$, 式中 $s_{\underline{\lambda}}(1,1)$的定义由引理 1 给出. 特别地, $2s_{\underline{\lambda}}(1,1)^{-1}\cdot z(\underline{\lambda})$是$K[W(D_n)]$的对应于单模$S^{\underline{\lambda}}\downarrow_{D_n}$的本原幂等元.

证明: 根据引理 3, 有$(\bar{p}_{n-a})^2=2^{n-a-1}\bar{p}_{n-a}$.

$$\begin{aligned}
z(\underline{\lambda})^2&=v(n-a,a)w_{a,n-a}v(n-a,a)w_{a,n-a}z_{\underline{\lambda}}w_{\lambda^{(2)\prime}}\widehat{w_{\lambda^{(1)\prime}}}z_{\underline{\lambda}}w_{\lambda^{(2)\prime}}\widehat{w_{\lambda^{(1)\prime}}}\\
&=s_{\lambda^{(2)}}(1)s_{\lambda^{(1)}}(1)v(n-a,a)w_{a,n-a}v(n-a,a)w_{a,n-a}z_{\underline{\lambda}}w_{\lambda^{(2)\prime}}\widehat{w_{\lambda^{(1)\prime}}}\\
&=s_{\lambda^{(2)}}(1)s_{\lambda^{(1)}}(1)v(n-a,a)w_{a,n-a}\bar{p}_{n-a}(w_{n-a,a}-\widetilde{w_{n-a,a}})\bar{p}_aw_{a,n-a}z_{\underline{\lambda}}w_{\lambda^{(2)\prime}}\widehat{w_{\lambda^{(1)\prime}}}\\
&=2^{a-n}s_{\lambda^{(2)}}(1)s_{\lambda^{(1)}}(1)v(n-a,a)(w_{a,n-a}-\widetilde{w_{a,n-a}})(\bar{p}_{n-a})^2(w_{n-a,a}-\widetilde{w_{n-a,a}})\bar{p}_aw_{a,n-a}z_{\underline{\lambda}}w_{\lambda^{(2)\prime}}\widehat{w_{\lambda^{(1)\prime}}}\\
&=2^{-1}s_{\lambda^{(2)}}(1)s_{\lambda^{(1)}}(1)v(n-a,a)(w_{a,n-a}-\widetilde{w_{a,n-a}})\bar{p}_{n-a}(w_{n-a,a}-\widetilde{w_{n-a,a}})\bar{p}_aw_{a,n-a}z_{\underline{\lambda}}w_{\lambda^{(2)\prime}}\widehat{w_{\lambda^{(1)\prime}}}\\
&=2^{n-a-1}s_{\lambda^{(2)}}(1)s_{\lambda^{(1)}}(1)v(n-a,a)w_{a,n-a}(w_{n-a,a}-\widetilde{w_{n-a,a}})\bar{p}_aw_{a,n-a}z_{\underline{\lambda}}w_{\lambda^{(2)\prime}}\widehat{w_{\lambda^{(1)\prime}}}\\
&=2^{n-a-1}s_{\lambda^{(2)}}(1)s_{\lambda^{(1)}}(1)(w_{a,n-a})^*v(a,n-a)(w_{n-a,a}-\widetilde{w_{n-a,a}})\bar{p}_aw_{a,n-a}z_{\underline{\lambda}}w_{\lambda^{(2)\prime}}\widehat{w_{\lambda^{(1)\prime}}}\\
&=2^{n-1}s_{\lambda^{(2)}}(1)s_{\lambda^{(1)}}(1)(w_{a,n-a})^*v(a,n-a)w_{n-a,a}w_{a,n-a}z_{\underline{\lambda}}w_{\lambda^{(2)\prime}}\widehat{w_{\lambda^{(1)\prime}}}\\
&=2^{n-1}s_{\lambda^{(2)}}(1)s_{\lambda^{(1)}}(1)v(n-a,a)w_{a,n-a}z_{\underline{\lambda}}w_{\lambda^{(2)\prime}}\widehat{w_{\lambda^{(1)\prime}}}\\
&=2^{-1}s_{\underline{\lambda}}(1,1)v(n-a,a)z_{\underline{\lambda}}w_{a,n-a}w_{\lambda^{(2)\prime}}\widehat{w_{\lambda^{(1)\prime}}}=\frac{1}{2}s_{\underline{\lambda}}(1,1)z(\underline{\lambda}),
\end{aligned}$$

由 $(1+s_0)v(n-a,a)z_{\underline{\lambda}}w_{\lambda^{(1)\prime}}\widehat{w_{\lambda^{(2)\prime}}}w_{a,n-a}=v_{n-a,a}z_{\underline{\lambda}}w_{\lambda^{(1)\prime}}\widehat{w_{\lambda^{(2)\prime}}}w_{a,n-a}=(1+s_0)z(\underline{\lambda})$, 所以 $z(\underline{\lambda})K[W(D_n)]\cong S^{\underline{\lambda}}\downarrow_{D_n}$. 由已知 $\lambda^{(1)}\neq\lambda^{(2)}$, 所以 $S^{\underline{\lambda}}\downarrow_{D_n}$是单 $K[W(D_n)]$-模, 即 $2s_{\underline{\lambda}}(1,1)^{-1}z(\underline{\lambda})$是$K[W(D_n)]$的对应于单模$S^{\underline{\lambda}}\downarrow_{D_n}$的本原幂等元.

定理 4 设群代数$K[W(D_n)]$在域K上是分裂半单的. $\underline{\lambda}=(\lambda^{(1)},\lambda^{(2)})$是$n$的 1 个 a-双剖分, $a=|\lambda^{(1)}|$. 如果 $\lambda^{(1)}=\lambda^{(2)}=\beta$, 记$m:=n/2$, 定义

$$z_+(\underline{\lambda})=v(m,m)z_{\underline{\lambda}}w_{\lambda^{(1)\prime}}\widehat{w_{\lambda^{(2)\prime}}}(w_{m,m}+1)\in K[W(D_n)],$$
$$z_-(\underline{\lambda})=v(m,m)z_{\underline{\lambda}}w_{\lambda^{(1)\prime}}\widehat{w_{\lambda^{(2)\prime}}}(w_{m,m}-1)\in K[W(D_n)],$$

则有

$$z_+(\underline{\lambda})^2=s_{(\beta,\beta)}(1,1)z_+(\underline{\lambda}),\ z_-(\underline{\lambda})^2=s_{(\beta,\beta)}(1,1)z_-(\underline{\lambda}),$$

并且$S_+^{\underline{\lambda}}:=z_+(\underline{\lambda})K[W(D_n)]$, $S_-^{\underline{\lambda}}:=z_-(\underline{\lambda})K[W(D_n)]$是$S^{\underline{\lambda}}\downarrow_{D_n}$的 2 个互不同构的单$K[W(D_n)]$-子模, 满足$S^{\underline{\lambda}}\downarrow_{D_n}=S_+^{\underline{\lambda}}\oplus S_-^{\underline{\lambda}}$. 进一步, $s_{(\beta,\beta)}(1,1)^{-1}z_+(\underline{\lambda})$是$K[W(D_n)]$的对应于单模$S_+^{\underline{\lambda}}$的本原幂等元, $s_{(\beta,\beta)}(1,1)^{-1}z_-(\underline{\lambda})$是$K[W(D_n)]$的对应于单模$S_-^{\underline{\lambda}}$的本原幂等元.

证明: 首先, 由文献 [15] 可知, 群代数$K[W(D_n)]$在域K上分裂半单保证了$s_{(\beta,\beta)}(1,1)$是域K中可逆元. 对于$\underline{\lambda}=(\beta,\beta)$, 由于$\lambda^{(1)}=\lambda^{(2)}=\beta$, 利用推论 1, 有

$$\begin{aligned}
z_+(\underline{\lambda})^2&=v(m,m)(w_{m,m}+1)v(m,m)(w_{m,m}+1)z_{\underline{\lambda}}w_{\lambda^{(1)\prime}}\widehat{w_{\lambda^{(2)\prime}}}z_{\underline{\lambda}}w_{\lambda^{(1)\prime}}\widehat{w_{\lambda^{(2)\prime}}}\\
&=s_{\lambda^{(2)}}(1)s_{\lambda^{(1)}}(1)v(m,m)(w_{m,m}+1)v(m,m)(w_{m,m}+1)z_{\underline{\lambda}}w_{\lambda^{(1)\prime}}\widehat{w_{\lambda^{(2)\prime}}}\\
&=s_{\lambda^{(2)}}(1)s_{\lambda^{(1)}}(1)v(m,m)(w_{m,m}+1)w_{m,m}v(m,m)(w_{m,m}+1)z_{\underline{\lambda}}w_{\lambda^{(1)\prime}}\widehat{w_{\lambda^{(2)\prime}}}\\
&=s_{\lambda^{(2)}}(1)s_{\lambda^{(1)}}(1)(w_{m,m}+1)v(m,m)w_{m,m}v(m,m)(w_{m,m}+1)z_{\underline{\lambda}}w_{\lambda^{(1)\prime}}\widehat{w_{\lambda^{(2)\prime}}}\\
&=2^{-m}s_{\lambda^{(2)}}(1)s_{\lambda^{(1)}}(1)(w_{m,m}+1)v(m,m)w_mv(m,m)(w_{m,m}+1)z_{\underline{\lambda}}w_{\lambda^{(1)\prime}}\widehat{w_{\lambda^{(2)\prime}}}\\
&=2^{2m-1}s_{\lambda^{(2)}}(1)s_{\lambda^{(1)}}(1)(w_{m,m}+1)v(m,m)(w_{m,m}+1)z_{\underline{\lambda}}w_{\lambda^{(1)\prime}}\widehat{w_{\lambda^{(2)\prime}}}\\
&=2^{2m-1}s_{\lambda^{(2)}}(1)s_{\lambda^{(1)}}(1)v(m,m)(w_{m,m}+1)^2z_{\underline{\lambda}}w_{\lambda^{(1)\prime}}\widehat{w_{\lambda^{(2)\prime}}}\\
&=2^{2m-1}s_{\lambda^{(2)}}(1)s_{\lambda^{(1)}}(1)v(m,m)2(w_{m,m}+1)z_{\underline{\lambda}}w_{\lambda^{(1)\prime}}\widehat{w_{\lambda^{(2)\prime}}}\\
&=2^{2m}s_{\lambda^{(2)}}(1)s_{\lambda^{(1)}}(1)v(m,m)(w_{m,m}+1)z_{\underline{\lambda}}w_{\lambda^{(1)\prime}}\widehat{w_{\lambda^{(2)\prime}}}=s_{(\beta,\beta)}(1,1)z_+(\underline{\lambda}),
\end{aligned}$$

同样地, 有

$$
\begin{aligned}
z_-\left(\underline{\lambda}\right)^2 &= v(m,m)(w_{m,m}-1)v(m,m)(w_{m,m}-1)z_{\underline{\lambda}}w_{\lambda^{(1)\prime}}\widehat{w_{\lambda^{(2)\prime}}}z_{\underline{\lambda}}w_{\lambda^{(1)\prime}}\widehat{w_{\lambda^{(2)\prime}}}\\
&= s_{\lambda^{(2)}}(1)s_{\lambda^{(1)}}(1)v(m,m)(w_{m,m}-1)v(m,m)(w_{m,m}-1)z_{\underline{\lambda}}w_{\lambda^{(1)\prime}}\widehat{w_{\lambda^{(2)\prime}}}\\
&= -s_{\lambda^{(2)}}(1)s_{\lambda^{(1)}}(1)v(m,m)(w_{m,m}-1)w_{m,m}v(m,m)(w_{m,m}-1)z_{\underline{\lambda}}w_{\lambda^{(1)\prime}}\widehat{w_{\lambda^{(2)\prime}}}\\
&= -s_{\lambda^{(2)}}(1)s_{\lambda^{(1)}}(1)(w_{m,m}-1)v(m,m)w_{m,m}v(m,m)(w_{m,m}-1)z_{\underline{\lambda}}w_{\lambda^{(1)\prime}}\widehat{w_{\lambda^{(2)\prime}}}\\
&= -2^{2m-1}s_{\lambda^{(2)}}(1)s_{\lambda^{(1)}}(1)(w_{m,m}-1)v(m,m)(w_{m,m}-1)z_{\underline{\lambda}}w_{\lambda^{(1)\prime}}\widehat{w_{\lambda^{(2)\prime}}}\\
&= -2^{2m-1}s_{\lambda^{(2)}}(1)s_{\lambda^{(1)}}(1)v(m,m)(w_{m,m}-1)^2z_{\underline{\lambda}}w_{\lambda^{(1)\prime}}\widehat{w_{\lambda^{(2)\prime}}}\\
&= -2^{2m-1}s_{\lambda^{(2)}}(1)s_{\lambda^{(1)}}(1)v(m,m)(-2)(w_{m,m}-1)z_{\underline{\lambda}}w_{\lambda^{(1)\prime}}\widehat{w_{\lambda^{(2)\prime}}}\\
&= 2^{2m}s_{\lambda^{(2)}}(1)s_{\lambda^{(1)}}(1)v(m,m)(w_{m,m}-1)z_{\underline{\lambda}}w_{\lambda^{(1)\prime}}\widehat{w_{\lambda^{(2)\prime}}} = s_{(\beta,\beta)}(1,1)z_-\left(\underline{\lambda}\right).
\end{aligned}
$$

下面验证$z_+\left(\underline{\lambda}\right)$和$z_-\left(\underline{\lambda}\right)$是相互正交的:

$$
\begin{aligned}
z_+\left(\underline{\lambda}\right)z_-\left(\underline{\lambda}\right) &= v(m,m)(w_{m,m}+1)v(m,m)(w_{m,m}-1)z_{\underline{\lambda}}w_{\lambda^{(1)\prime}}\widehat{w_{\lambda^{(2)\prime}}}z_{\underline{\lambda}}w_{\lambda^{(1)\prime}}\widehat{w_{\lambda^{(2)\prime}}}\\
&= s_{\lambda^{(2)}}(1)s_{\lambda^{(1)}}(1)v(m,m)(w_{m,m}+1)v(m,m)(w_{m,m}-1)z_{\underline{\lambda}}w_{\lambda^{(1)\prime}}\widehat{w_{\lambda^{(2)\prime}}}\\
&= s_{\lambda^{(2)}}(1)s_{\lambda^{(1)}}(1)v(m,m)(w_{m,m}+1)(w_{m,m}-1)v(m,m)z_{\underline{\lambda}}w_{\lambda^{(1)\prime}}\widehat{w_{\lambda^{(2)\prime}}} = 0.
\end{aligned}
$$

同理可证$z_-\left(\underline{\lambda}\right)z_+\left(\underline{\lambda}\right)=0$.

定义$S_+^{\underline{\lambda}} := z_+\left(\underline{\lambda}\right)K[W(D_n)]$, $S_-^{\underline{\lambda}} := z_-\left(\underline{\lambda}\right)K[W(D_n)]$. 注意到

$$z\left(\underline{\lambda}\right) = 2^{-1}\left(z_+\left(\underline{\lambda}\right)+z_-\left(\underline{\lambda}\right)\right),$$

$$z_+\left(\underline{\lambda}\right) = 2s_{(\beta,\beta)}(1,1)^{-1}z\left(\underline{\lambda}\right)z_+\left(\underline{\lambda}\right),$$
$$z_-\left(\underline{\lambda}\right) = 2s_{(\beta,\beta)}(1,1)^{-1}z\left(\underline{\lambda}\right)z_-\left(\underline{\lambda}\right).$$

由此知$S_+^{\underline{\lambda}}$、$S_-^{\underline{\lambda}}$是$S^{\underline{\lambda}}\downarrow_{D_n}$的 2 个$K[W(D_n)]$-子模, 并且$S^{\underline{\lambda}}\downarrow_{D_n} = S_+^{\underline{\lambda}}\oplus S_-^{\underline{\lambda}}$.

最后注意到, 作为$K[\mathfrak{S}_{(m,m)}]$的 Specht 模的生成元, $0\neq z_{\underline{\lambda}}w_{\lambda^{(1)\prime}}\widehat{w_{\lambda^{(2)\prime}}}\in K[\mathfrak{S}_{(m,m)}]$, 而$w_{m,m}$是$\mathfrak{S}_{(m,m)}$在$\mathfrak{S}_n$中的极小长度的右陪集. 利用文献 [14](引理 1.18)$v(m,m,)K[W(D_n)]$的标准基, 易见$z_+\left(\underline{\lambda}\right)$, $z_-\left(\underline{\lambda}\right)$都是非零元素, 从而$S_+^{\underline{\lambda}}$, $S_-^{\underline{\lambda}}$是$S^{\underline{\lambda}}\downarrow_{D_n}$的 2 个非零的$K[W(D_n)]$-子模. 应用定理 1, 可以推断$S_+^{\underline{\lambda}}$, $S_-^{\underline{\lambda}}$必定是$S^{\underline{\lambda}}\downarrow_{D_n}$的 2 个互不同构的单$K[W(D_n)]$-子模, 并且$s_{(\beta,\beta)}(1,1)^{-1}z_+(\underline{\lambda})$是$K[W(D_n)]$的对应于单模$S_+^{\underline{\lambda}}$的本原幂元, $s_{(\beta,\beta)}(1,1)^{-1}z_-(\underline{\lambda})$是$K[W(D_n)]$的对应于单模$S_-^{\underline{\lambda}}$的本原幂等元.

4 结论与展望

本研究精确构造了D_n型外尔群的群代数$K[W(D_n)]$的本原幂等元, 并给出了证明. 由于并未给出$K[W(D_n)]$的本原幂等元的一个完全集, 因而尚不能得出$K[W(D_n)]$的中心本原幂等元的类似生成元构造, 期待在未来的工作中能够做到这一点, 并且把本研究的主要结果推广, 用来构造半单的D_n型的 Iwahori-Hecke 代数的本原幂等元、中心本原幂等元以及半正规基. 关于A型、B型, 以及更一般的半单分圆 Hecke 代数的结构与表示理论, 参见文献 [17−22].

5 参考文献

[1] CURTIS C W, REINER I. Methods of representation theory: with applications to finite groups and orders[M]. New York: John Wiley & Sons, 1981: 204

[2] NEUNHÖFFER M, SCHEROTZKE S. Formulas for primitive idempotents in Frobenius algebras and an application to decomposition maps[J]. An Electronic Journal of the American Mathematical Society, 2008, 12: 170

[3] HOEFSMIT P N. Representations of Hecke algebras of finite groups with BN-pairs of classical type[D]. Vancouver: University of British Columbia, 1974

[4] MURPHY G E. The idempotents of the symmetric group and Nakayama 's conjecture[J]. Journal of Algebra, 1983, 81: 258

[5] JUCYS A A. On the Young operators of symmetric groups[J]. Lithuanian Journal of Physics, 1966(6): 163

[6] RAM A. Seminormal representations of Weyl groups and Iwahori-Hecke algebras[J]. Proceedings of the London Mathematical Society, 1997, 75(3): 99

[7] OGIEVETSKY O V, D'ANDECY L P. Fusion procedure for Coxeter groups of type B and complex reflection groups $G(m,1,n)$ [J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 2014, 142(9): 2929

[8] DIPPER R, JAMES G D. Representations of Hecke algebras of general linear groups[J]. Proceedings of the London Mathematical Society, 1986, 52(3): 20

[9] DIPPER R, JAMES G D. Blocks and idempotents of Hecke algebras of general linear groups[J]. Proceedings of the London Mathematical Society, 1987, 54(3): 57

［10］ DIPPER R, JAMES G D. Representations of Hecke algebras of type B_n[J]. Journal of Algebra, 1992, 146: 454

［11］ DIPPER R, JAMES G D, MURPHY E. Hecke algebras of type B_n at roots of unity[J]. Proceedings of the London Mathematical Society, 1995, 70(3): 505

［12］ MATHAS A. Matrix units and generic degrees for the Ariki-Koike algebras[J]. Journal of Algebra, 2004, 281: 695

［13］ CHLOUVERAKI M, JACON N. Schur elements for the Ariki-Koike algebra and applications[J]. Journal of Algebraic Combinatorics, 2012, 35: 291

［14］ PALLIKAROS C. Representations of Hecke algebras of type D_n[J]. Journal of Algebra, 1994, 169: 20

［15］ HU J. A Morita equivalence theorem for Hecke algebras of type D_n when n is even[J]. Manuscripta Mathematica, 2002, 108: 409

［16］ HU J. On the decomposition numbers of the Hecke algebra of type D_n when n is even[J]. Journal of Algebra, 2009, 321: 1016

［17］ ARIKI S. Representation theory of a Hecke algebra of $G(r,p,n)$[J]. Journal of Algebra, 1995, 177: 164

［18］ ARIKI S, KOIKE K. A Hecke algebra of $(\mathbb{Z}/r\mathbb{Z})\wr\mathfrak{S}_n$ and construction of its irreducible representations[J]. Advances in Mathematics, 1994, 106: 216

［19］ BROUÉ M, MALLE G. Zyklotomische Heckealgebren[J]. Astérisque, 1993, 212: 119

［20］ HU J. The number of simple modules for the Hecke algebras of type $G(r,p,n)$ (with an appendix by Xiaoyi Cui)[J]. Journal of Algebra, 2009, 321(11): 3375

［21］ MATHAS A. The representation theory of the Ariki-Koike and cyclotomic q-Schur algebras[M]//SHOJI T, KASHIWARA M, KAWANAKA N, et al. Representation theory of algebraic groups and quantum groups. Tokyo: Advanced Studies in Pure Mathematics, 2004: 261

［22］ RAM A , RAMAGGE J. Affine Hecke algebras, cyclotomic Hecke algebras and Clifford theory[C]//A tribute to C S Seshadri. Basel: Birkhäuser, 2003: 428

On the primitive idempotents of the Weyl group of type D_n

HU Jun SUN Huanmei† WANG Shixuan

(School of Mathematical and Statistics, Beijing Institute of Technology, 100081, Beijing, China)

Abstract Let $4\leqslant n\in\mathbf{N}$ and $W(D_n)$ the Weyl group of Type D_n. Let K be a field and group algebra $K[W(D_n)]$ is split semisimple on the field K. for each simple module U of $K[W(D_n)]$, we explicitly construct a quasi-idempotent $z_U\in K[W(D_n)]$ (i.e., $z_U^2=c_Uz_U$ for some $c_U\in K^\times$ such that $c_U^{-1}z_U$ is a primitive idempotent and $z_UK[W(D_n)]\cong U$ as a right $K[W(D_n)]$-module. The main results of this paper generalize the construction of primitive idempotents by Dipper and James on semi-simple group algebras of type A and B Weyl groups.

Keywords Weyl group; group algebra; primitive idempotent

【责任编辑: 陆有忠】