

# 强场中真空正负电子对产生的低密度近似<sup>\*</sup>

李烈娟<sup>1)</sup> 麦丽开·麦提斯迪克<sup>1)</sup> 王 莉<sup>2)</sup> 谢柏松<sup>1,2)†</sup>

(1)北京师范大学核科学与技术学院, 100875, 北京; (2)北京市科学技术研究院辐射技术研究所, 100875, 北京)

**摘要** 在空间均匀含时的强外场下真空正负电子对产生的研究中, 从散射势转变点的角度, 严格证明了源于量子 Vlasov 方程的低密度近似方法(low density approximation, LDA)与半经典的 WKB (Wentzel-Kramers-Brillouin)方法等价. 通过对典型例子进行数值计算和说明, 对这 2 种方法的等价性进行了检验. 当有较多转变点时, WKB 积分变得烦琐, 相较而言, LDA 更具有计算优势. 本研究将量子动力学过程和量子隧穿过程联系起来, 有助于深入理解强场下真空中正负电子对的产生过程.

**关键词** 强场物理; 正负电子对产生; 低密度近似

**中图分类号** O413

**DOI:** 10.12202/j.0476-0301.2022134

## 0 引言

在强的电场或磁场作用下, 量子电动力学 (quantum electrodynamics, QED)真空具有各种非线性物理现象, 如真空极化、真空双折射及真空失稳衰变为正负电子对等<sup>[1-5]</sup>. Sauter<sup>[6]</sup>通过精确求解 Dirac 方程, 计算了量子隧穿的透射系数, 提出在一定场强条件下真空通过隧穿效应可以产生正负电子对. Heisenberg 等<sup>[7]</sup>基于旋量 QED 的单圈有效拉氏量, 推导出弱电场下真空正负电子对的产生率并给出临界场强  $E_{cr}$ . 随后, Schwinger<sup>[8]</sup>用固有时方法对单圈有效拉氏量的虚部进行更加精确的计算, 得到了常数电场下粒子对的产生率  $\Gamma \approx \exp(-\pi E_{cr}/E)$ , 其中临界场强  $E_{cr} \approx 1.3 \times 10^{16} \text{ V} \cdot \text{cm}^{-1}$ , 相应的激光强度  $I \approx 4.3 \times 10^{29} \text{ W} \cdot \text{cm}^{-2}$ . 因此, 强场作用下真空通过隧穿效应产生正负电子对的过程也被称为 Schwinger 机制或者 Schwinger 效应. 真空正负电子对的产生除了隧穿效应之外, 真空负能带中的负能电子通过吸收多个光子产生粒子对, 即多光子吸收过程.

随着激光技术的不断发展, 激光强度有望达到  $10^{25} \sim 10^{26} \text{ W} \cdot \text{cm}^{-2}$ , 但仍低于实验上可观测正负电子对产生的临界激光强度. 因此, 人们采用不同的理论方法来研究不同外场结构下粒子对的产生, 以降低正负电子对产生的阈值和提高粒子对的产生率. 常用的理论方法有 2 种: 一种是半经典近似方法, 如广义 WKB 近似<sup>[9-10]</sup>和世界线瞬子技术<sup>[11-12]</sup>; 另一种是

量子动力学方法 (quantum kinetic theory, QKT), 如量子 Vlasov 方程 (quantum Vlasov equation, QVE)<sup>[13-15]</sup>、低密度近似<sup>[16]</sup>和 Dirac-Heisenberg-Wigner (DHW)形式<sup>[17-18]</sup>. Brezin 等<sup>[9]</sup>通过 WKB 近似研究了在空间均匀时变电场下粒子对的产生, 并给出了在  $\gamma \ll 1$  和  $\gamma \gg 1$  的不同区域粒子对的产生率, 此时  $\gamma$  表示绝热参数, 其定义为  $\gamma = m\omega/eE$ , 其中,  $E$  和  $\omega$  表示外电场的场强和频率. Hebenstreit 等<sup>[13]</sup>研究了具有亚周期结构的短激光脉冲中正负电子对的产生, 发现动量谱对外加电场的参数非常敏感. Schützhold 等<sup>[19]</sup>提出了正负电子对产生的动力学辅助机制, 结果表明, 将慢变的强激光脉冲与快变的弱激光脉冲叠加, 可以大幅度提高正负电子对的产量. 近年来, 不同理论方法之间的关系也得到了广泛的研究, 这些研究不仅可以从不同的理论角度对研究结果进行理解, 而且可以相互验证. 如: Dumlu<sup>[20]</sup>讨论了标量和旋量 QED 的 QVE 解与半经典散射方法之间的关系; Hebenstreit 等<sup>[13]</sup>研究发现对均匀的单分量时变电场, 旋量 QED 中的 Wigner 函数可以简化为 QVE; Strobel 等<sup>[21]</sup>利用 WKB 方法和世界线瞬子技术计算, 并比较了在标量 QED 中多分量时变电场下粒子对的产生率; Li 等<sup>[22]</sup>从理论和数值方面研究了量子计算场论 (computational quantum field theory, CQFT)与 QKT 在空间均匀时变电场下正负电子对产生研究中的等价性. 这些研究结果给出了一些方法的优点以及不同方法之间的内在联系, 为深入研究真空正负电子对产生提供了更

<sup>\*</sup> 国家自然科学基金资助项目 (11875007)

<sup>†</sup> 通信作者: 谢柏松 (1965—), 男, 研究员, 博士生导师. 研究方向: 强场物理、等离子体物理. E-mail: bsxie@bnu.edu.cn

收稿日期: 2022-04-29

多优化和适用的理论方法.

本文给出了一个简单而严谨的理论证明,证明了 LDA 与 WKB 这 2 种方法在空间均匀含时的强外场下正负电子对产生的研究中是等价的. 同时,对 3 个不同外电场结构下正负电子对产生的 3 个典型例子进行了说明,对应电场分别具有 1 对、2 对和 3 对转变点. 与 WKB 方法相比, LDA 是一种获取动量谱信息和产生粒子数更便捷的方法,特别是在 WKB 框架中出现较多转变点使得计算烦琐的情况下. 本研究采用自然单位 ( $\hbar = c = 1$ ), 以及用电子质量  $m$  表示所有的量.

## 1 理论推导

均匀含时电场中真空正负电子对产生问题可以看作是量子力学中的一维垒上散射问题, 因此, 利用 WKB 方法很容易得到隧穿效应产生的正负电子对的动量分布函数  $N$ . 对于旋量 1/2 费米子的情况, 动量分布函数的近似表达式为<sup>[23]</sup>

$$N \approx \sum_{t_i} e^{-2K_i} + \sum_{t_i \neq t_j} 2\cos(2\theta_{(i,j)})(-1)^{i-j} e^{-K_i - K_j}, \quad (1)$$

式中:  $t_i$  和  $t_j$  是使得粒子能量为 0 的时间点, 即  $\omega(\mathbf{p}, t) = 0$  时的时间点, 通常这些时间点被称为转变点, 因为当时间经过转变点时, 粒子的波函数经历了从振荡波到衰减(增长)的转变, 反之亦然;  $K_i = \left| \int_{t_i}^{t_i} \omega(\mathbf{p}, t) dt \right|$  表示第  $i$  个转变点的作用; 余弦函数的因子  $\theta_{(i,j)} = \int_{s_i}^{s_j} \omega(\mathbf{p}, t) dt$  表示包含了第  $i$  个和第  $j$  个转变点之间的干涉信息的项;  $s_i$ 、 $s_j$  是转变点  $t_i$ 、 $t_j$  对应的实部. 在有 2 对转变点 ( $t_1, t_1^*$ ) 和 ( $t_2, t_2^*$ ) 的情况下, 只出现 1 个干涉项, 则产生粒子的动量分布函数为

$$N \approx e^{-2K_1} + e^{-2K_2} - 2\cos(2\theta_{(1,2)})e^{-K_1 - K_2}. \quad (2)$$

另一方面, 通过精确的非微扰量子动力学方法对正负电子对产生进行了广泛的研究<sup>[24]</sup>, 以获得产生粒子对的动量分布函数. 对于任意线极化均匀时变电场, 假设矢势  $A^\mu(t) = (0, 0, 0, A(t))$ , 则相应的电场为  $E(t) = -\dot{A}(t)$ . 在低密度近似下, 准粒子的动量分布函数表达式为

$$f_{\text{low}}(\mathbf{p}, t) = \frac{1}{4} \left| \int_{-\infty}^t dt' \lambda(\mathbf{p}, t') e^{i\theta(t,t')} \right|^2, \quad (3)$$

式中:  $\mathbf{p} = (\mathbf{p}_\perp, p_\parallel)$  是正则动量;  $\lambda(\mathbf{p}, t) = eE(t)\epsilon_\perp/\omega^2(\mathbf{p}, t)$  和  $\theta(t, t') = 2 \int_{t'}^t dt \omega(\mathbf{p}, t)$  是与粒子能量有关的角度. 粒子总能量

$$\omega(\mathbf{p}, t) = \sqrt{\epsilon_\perp^2(\mathbf{p}) + (p_\parallel - eA(t))^2}, \quad (4)$$

式中:  $\epsilon_\perp = (m^2 + \mathbf{p}_\perp^2)^{1/2}$  是横向能量;  $p_\parallel$  是纵向正则动量. 显然, 外场在  $t_0 \rightarrow -\infty$  时是打开的, 而真正的粒子是在外电场关闭时才能被观察到, 所以动量分布函数可写成

$$f_{\text{low}}(\mathbf{p}) = \frac{1}{4} \left| \int_{-\infty}^{\infty} dt \lambda(\mathbf{p}, t) e^{i\theta(t)} \right|^2. \quad (5)$$

现在证明 LDA 和 WKB 这 2 种方法的等价性, 即式(1)和(5)除了指数项前面的预因子略有不同外, 其他均相同. 现将式(5)中的积分表达式表示为

$$Q = \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{eE(t)}{\omega^2(\mathbf{p}, t)} \epsilon_\perp e^{i\theta(t)}, \quad (6)$$

该积分的主要贡献来自  $\omega(\mathbf{p}, t) = 0$  的极点, 它们是转变点  $t_i$ . 考虑  $\omega^2(\mathbf{p}, t) = 0$  时, 即  $p_\parallel - eA(t) = \pm i\epsilon_\perp$ , 结合  $E(t) = d(p_\parallel - eA(t))/dt$ , 从而式(6)可以被表示为

$$Q = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{\pm i\omega} e^{i\theta(\omega)}. \quad (7)$$

进一步, 知道  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{\omega \pm i\epsilon} = P\left(\frac{1}{\omega}\right) \mp i\pi\delta(\omega)$ . 因此, 积分与每个极点的  $\theta(\omega = 0)$  相关联, 即转变点  $t_i$  贡献 1 项  $Q(\infty) \approx \pi e^{i\theta(t_i)}$ , 其中,  $\theta(t_i) = 2 \int_{t_i}^{\infty} \omega(\mathbf{p}, t) dt$ , 并且在推导过程中, 使所有积分取  $t = \infty$ . 因此, 可以得到每个转变点的近似表达式

$$Q(\infty) \approx \pi \sum_{t_i} e^{2i \int_{t_i}^{\infty} \omega(\mathbf{p}, t) dt} = \pi \sum_{t_i} e^{2i \int_{t_i}^{\infty} \omega(\mathbf{p}, t) dt} e^{-2i \int_{-\infty}^{t_i} \omega(\mathbf{p}, t) dt}, \quad (8)$$

由于最后应用式(5),  $\pi$  之前的符号  $\pm$  的模方是 1, 因此计算时它已被忽略. 值得注意的是, 转变点  $t_i$  是复数导致式(8)中的第 2 项  $\int_{-\infty}^{t_i} \omega(\mathbf{p}, t) dt$  是复数, 但是第 1 个指数项中的  $\int_{-\infty}^{\infty} \omega(\mathbf{p}, t) dt$  始终是实的. 由于  $|e^{2i \int_{-\infty}^{\infty} \omega(\mathbf{p}, t) dt}| = 1$ , 所以在最终得到  $f_{\text{low}}(\mathbf{p}, t) = \frac{1}{4} |Q(\infty)|^2$  时可以将其忽略. 现在仅考虑第 2 项, 则

$$Q(\infty) \approx \pi \sum_{t_i} e^{-2i \int_{-\infty}^{t_i} \omega(\mathbf{p}, t) dt}. \quad (9)$$

由于  $\omega(\mathbf{p}, t)$  沿实轴和虚轴的积分分别是实和虚的, 我们可以将指数分成相位和实部. 现在把  $s_i = \text{Re}(t_i)$  看作是转变点  $t_i$  的实部. 因此, 表达式可以写为

$$Q(\infty) \approx \pi e^{-2i \int_{-\infty}^{t_i} \omega(\mathbf{p}, t) dt} \left( \sum_{t_i} e^{-i\theta} e^{-2 \int_{s_i}^{t_i} \omega(\mathbf{p}, t) dt} \right), \quad (10)$$

式中,  $\theta_i = 2 \int_{s_i}^{\infty} \omega(\mathbf{p}, t) dt$  是通过沿  $t_i$  和  $t_i$  转变点之间的实轴对  $\omega(\mathbf{p}, t)$  积分获得的相位. 因此, 通过将式(10)代入式(5), 可以得到产生粒子的动量分布函数

$$f_{\text{low}}(\mathbf{p}) = \frac{\pi^2}{4} \left( \sum_{t_i=t_j} e^{-2K_i} + \sum_{t_i \neq t_j} 2\cos\theta_{(i,j)} e^{-K_i - K_j} \right), \quad (11)$$

式中  $K_i = \left| \int_{t_i}^{t_j} \omega(\mathbf{p}, t) dt \right|$  和  $\theta_{(i,j)} = 2 \int_{t_i}^{t_j} \omega(\mathbf{p}, t) dt$ . 注意的是, 对于旋量费米子, 当得到  $Q(\infty)$  时, 表达式会被修正, 因为复能量函数  $\omega(\mathbf{p}, t) = 0$  中的黎曼面切割具有不同的分支, 因此, 与  $t_i$  相关的转变点处积分的极点贡献有 1 个交替符号, 得到

$$Q(\infty) \approx \pi \sum_{t_i} (-1)^i e^{-2i \int_{t_i}^{\infty} \omega(\mathbf{p}, t) dt}. \quad (12)$$

然后, 将旋量 QED 的动量分布函数修正为

$$f_{\text{low}}(\mathbf{p}) = \frac{\pi^2}{4} \left( \sum_{t_i=t_j} e^{-2K_i} + \sum_{t_i \neq t_j} 2\cos\theta_{(i,j)} (-1)^{i-j} e^{-K_i - K_j} \right). \quad (13)$$

可以看到式(11)和(13)分别是产生的标量和旋量粒子的动量分布函数, 它们的干涉项符号不同. 此外, 式(13)是通过 LDA 得到的产生粒子的动量分布函数, 与利用 WKB 得到的式(1)相比, 除主要的指数项的预因子略有不同之外, 其他完全相同.

## 2 数值模拟

以上从理论方面证明了 LDA 和 WKB 在时间相关的空间均匀强外场下正负电子对产生的研究中的等价性. 接下来, 通过数值模拟检验这 2 种方法的等价性. Dumlu 等<sup>[23]</sup>利用 WKB 近似研究了在具有 1 对、2 对和 3 对转变点的外电场下产生粒子对的动量谱, 它们所对应的电场形式分别为

$$E(t) = \frac{E_0}{(1 + \omega^2 t^2)^{3/2}}, \quad (14)$$

$$E(t) = -\frac{2E_0 \omega t}{(1 + \omega^2 t^2)^2}, \quad (15)$$

$$E(t) = \frac{E_0(1 - (3\omega_1^2 + 2\omega_2^2)t)}{(1 + \omega_2^2 t^2)^{5/2}}. \quad (16)$$

数值计算中, 选取的电场形式在式(14)~(16)给出, 场参数与文献[23]中的一致, 即场强  $E_0 = 0.1$ , 频率  $\omega = \omega_1 = 0.1$ ,  $\omega_2 = 1/15$ . 文献[23]中利用 WKB 方法, 数值模拟如式(14)~(16)所表示的电场中粒子对产生, 得到的旋量 QED 情况下产生粒子的动量谱分别对应文献[23]中图 3、图 6 和图 9.

本文利用 LDA 从数值上获得了在空间均匀含时强外场作用下产生正负电子对的动量谱. 图 1、图 2 和图 3 分别表示有 1 对、2 对和 3 对转变点的外场下产生正负电子对的动量谱, 其中黑色实线是低密度近

似方法得到的数值解, 红色虚线表示文献[23]中图 3、图 6 和图 9 所示的解析解, 对应的外电场形式由式(14)、(15)和(16)给出. 从图 1~3 可以看出, 通过低密度近似方法得到的数值结果与参考文献[23]中运用 WKB 得到的结果除了前因子所产生的差异, 动量峰所处位置一样, 动量分布几乎相同.

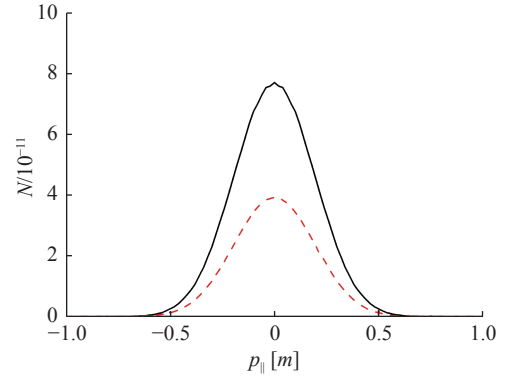


图 1 具有 1 对转变点的外电场下产生正负电子对的动量谱

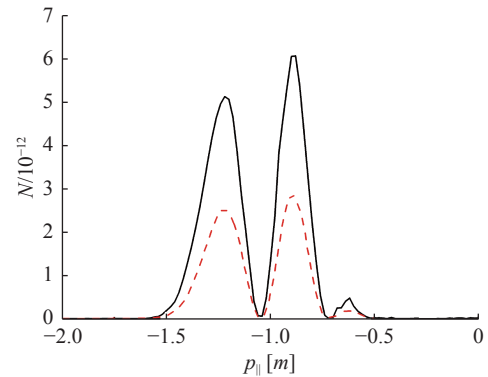


图 2 具有 2 对转变点的外电场下产生正负电子对的动量谱

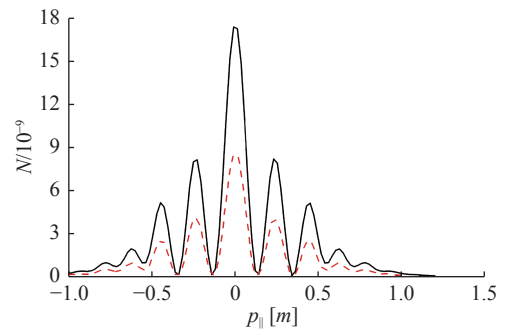


图 3 具有 3 对转变点的外电场下产生正负电子对的动量谱

## 3 结论

本文主要研究了空间均匀含时的强外场下正负电子对产生. 首先, 从散射势转变点的角度出发, 用

LDA 方法得到产生的标量和旋量粒子的动量分布函数. 通过将产生的旋量粒子的动量分布函数与 WKB 方法得到的结果进行对比, 发现除了指数项的预因子略有不同之外, 其他完全相同. 然后, 通过对典型的具有 1 对、2 对和 3 对转变点的含时外电场下正负电子对产生进行了数值模拟, 得到产生粒子的动量谱. 结果表明, 用 LDA 方法与用 WKB 方法得到的产生粒子的动量谱基本一致.

对于转变点较多的情况, 通过 LDA 方法能够更加快速、定性地得到外场下产生粒子的动量谱, 而 WKB 积分具有一定的复杂性, 所以 LDA 方法作为一种等效方法, 在研究空间均匀含时强场下真空正负电子对的产生过程中更有计算优势. 在量子隧穿过程的研究中, 结合量子动力学方法可以得到一些有意义的结果, 为以后正负电子对产生的研究提供理论参考.

#### 4 参考文献

- [1] DIRAC P A M. The Quantum Theory of the Electron[J]. Proc Roy Soc Lond A, 1928, 117(778): 610
- [2] ADLER S L, SCHUBERT C. Photon splitting in a strong magnetic field: recalculation and comparison with previous calculations[J]. Physical Review Letters, 1996, 77(9): 1695
- [3] DUNNE G V. The Heisenberg-Euler effective action: 75 years on[J]. International Journal of Modern Physics A, 2012, 27(15): 1260004
- [4] BULA C, MCDONALD K T, PREBYS E J, et al. Observation of nonlinear effects in Compton scattering[J]. Physical Review Letters, 1996, 76(17): 3116
- [5] JAFFE R L. Casimir effect and the quantum vacuum[J]. Physical Review D, 2005, 72(2): 021301
- [6] SAUTER F. Über das verhalten eines elektrons im homogenen elektrischen feld nach der relativistischen theorie diracs[J]. Zeitschrift Für Physik, 1931, 69(11/12): 742
- [7] HEISENBERG W, EULER H. Consequences of Dirac 's theory of positrons[J]. Zeitschrift für Physik, 1936, 98: 714
- [8] SCHWINGER J S. On gauge invariance and vacuum polarization[J]. Physical Review, 1951, 82(5): 664
- [9] BREZIN E, ITZYKSON C. Pair production in vacuum by an alternating field[J]. Physical Review D, 1970, 2(7): 1191
- [10] KIM S P, PAGE D N. Schwinger pair production in electric and magnetic fields[J]. Physical Review D, 2006, 73(6): 065020
- [11] XIE B S, MELIKE M, SAYIPJAMAL D. Electron-positron pair production in an elliptic polarized time varying field[J]. Chinese Physics Letters, 2012, 29(2): 021102
- [12] KIM S P, PAGE D N. Schwinger pair production via instantons in strong electric fields[J]. Physical Review D, 2002, 65(10): 105002
- [13] HEBENSTREIT F, ALKOFER R, DUNNE G V, et al. Momentum signatures for Schwinger pair production in short laser pulses with a sub-cycle structure[J]. Physical Review Letters, 2009, 102(15): 150404
- [14] NURIMAN A, XIE B S, LI Z L, et al. Enhanced electron-positron pair creation by dynamically assisted combinational fields[J]. Physics Letters B, 2012, 717(4/5): 465
- [15] XIE B S, LI Z L, TANG S. Electron-positron pair production in ultrastrong laser fields[J]. Matter and Radiation at Extremes, 2017, 2(5): 225
- [16] BLASCHKE D B, KÄMPFER B, PANFEROV A D, et al. Influence of laser pulse parameters on the properties of e-e+ plasmas created from vacuum[J]. Contributions to Plasma Physics, 2013, 53(2): 165
- [17] LI L J, MOHAMEDSEDIK M, XIE B S. Enhanced dynamically assisted pair production in spatial inhomogeneous electric fields with the frequency chirping[J]. Physical Review D, 2021, 104(3): 036015
- [18] MOHAMEDSEDIK M, LI L J, XIE B S. Schwinger pair production in inhomogeneous electric fields with symmetrical frequency chirp[J]. Physical Review D, 2021, 104(1): 016009
- [19] SCHÜTZHOLD R, GIES H, DUNNE G. Dynamically assisted Schwinger mechanism[J]. Physical Review Letters, 2008, 101(13): 130404
- [20] DUMLU C K. Quantum kinetic approach and the scattering approach to vacuum pair production[J]. Physical Review D, 2009, 79(6): 065027
- [21] STROBEL E, XUE S S. Semiclassical pair production rate for time-dependent electrical fields with more than one component: WKB-approach and world-line instantons[J]. Nuclear Physics B, 2014, 886: 1153
- [22] LI Z L, GONG C, LI Y J. Study of pair production in inhomogeneous two-color electric fields using the computational quantum field theory[J]. Physical Review D, 2021, 103(11): 116018
- [23] DUMLU C K, DUNNE G V. Interference effects in schwinger vacuum pair production for time-dependent laser pulses[J]. Physical Review D, 2011, 83(6): 065028
- [24] SCHMIDT S M, BLASCHKE D, RÖPKE G, et al. A quantum kinetic equation for particle production in the Schwinger mechanism[J]. International Journal of Modern Physics E, 1998, 7(6): 709

# Low density approximation of electron-positron pair production in strong field

LI Liejuan<sup>1)</sup> Melike MOHAMEDSEDIK<sup>1)</sup> WANG Li<sup>2)</sup> XIE Baisong<sup>1, 2)</sup>

(1) College of Nuclear Science and Technology, Beijing Normal University, 100875, Beijing, China;

2) Institute of Radiation Technology, Beijing Academy of Science and Technology, 100875, Beijing, China)

**Abstract** Electron-positron pair production in time-dependent homogenous strong external electric field is investigated. For turning points of scattering potential, low-density approximation (LDA) arising from quantum Vlasov equation is proven to be equivalent to semi-classical WKB (Wentzel-Kramers-Brillouin) method. Typical examples are used to confirmed numerically the equivalency of these two methods. When there are too many turning points, WKB integrals become tedious, then LDA is a more convenient calculation technique. Our work by the combination of quantum kinetic process with quantum tunneling process will facilitate understanding of electron-positron pair production in the vacuum under strong fields.

**Keywords** strong field physics; electron-positron pair production; low density approximation

【责任编辑: 武 佳】