胞腔范畴的一个等价定义 *

王　沛†
(北京联合大学师范学院, 100011, 北京)

摘要　推广了代数中胞腔理想的概念到范畴的层次,并且通过研究范畴的理想链,给出了胞腔范畴的一个等价定义.

关键词　胞腔代数;胞腔范畴;胞腔理想;胞腔基
中图分类号　O154.1　　**DOI:** 10.12202/j.0476-0301.2021149

0　引言

1996 年, Graham 等[1] 引入了胞腔代数的概念. 这类代数具有 1 组性质非常好的基, 称为胞腔基. 利用这组基, 研究者们可以研究此类代数的表示. 胞腔范畴是胞腔代数的一种范畴化推广, 它是 Westbury[2] 仿照胞腔代数中胞腔基的定义给出的. 胞腔范畴包含了许多数学与物理中的重要范畴, 例如, Temperley-Lieb 范畴[3−4]、partition 范畴[5−6], 以及 Kuperberg[7] 通过秩为2的单李代数构造的图范畴等, 它们在纽结理论、量子场论、子因子理论中有着重要的应用.

1　胞腔范畴的定义

定义 1[2]　令 K 是 1 个域, $\mathcal{A}$ 是 1 个带有对合 $*$ ($*$ 是 $\mathcal{A}$ 上的对偶函子, 且 $(-)^{**}=\mathrm{id}_{\mathcal{A}}$.) 的 K-线性范畴, 则 $\mathcal{A}$ 被称为一个胞腔范畴, 如果 $\mathcal{A}$ 有胞腔组 $(\Lambda,M,C,*)$, 这里 Λ 是一个偏序集, M 为指标映射, 即对任意 $\lambda\in\Lambda$, 任意 $\mathcal{A}$ 中对象 n, 都存在 1 个有限指标集 $M(n,\lambda)$ 与之对应, 对于 $\mathcal{A}$ 中的每一个对象 m、n, 记从 m 到 n 的所有态射组成的集合 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(m,n)$ 都有 1 个单射

$$C: M(m,\lambda)\times M(n,\lambda)\to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(m,n),$$

$$C:(S,T)\longmapsto C^{\lambda}_{S,T}.$$

并且满足下面的公理.

公理 1　对于任意 $\mathcal{A}$ 中对象 m、n, 映射

$$C:\coprod_{\lambda\in\Lambda} M(m,\lambda)\times M(n,\lambda)\to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(m,n)$$

的像是 K-线性空间 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(m,n)$ 的 1 组基.

公理 2　对任意 $\mathcal{A}$ 中对象 m、n, 以及任意 $\lambda\in\Lambda$、$S\in M(m,\lambda)$ 与 $T\in M(n,\lambda)$, 有等式

$$(C^{\lambda}_{S,T})^{*}=C^{\lambda}_{T,S}.$$

公理 3　对任意 $\mathcal{A}$ 中对象 p、n、m, 以及任意 $\lambda\in\Lambda$、$a\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(p,m)$、$S\in M(m,\lambda)$ 与 $T\in M(n,\lambda)$, 满足

$$aC^{\lambda}_{S,T}\equiv\sum_{S'\in M(p,\lambda)} r_a(S,S')C^{\lambda}_{S',T} \mod \mathcal{A}^{(<\lambda)},$$

式中 $r_a(S',S)\in K$, 与 T 无关, $\mathcal{A}^{(<\lambda)}$ 是由集合

$$\{C^{\mu}_{S,T}\mid \mu<\lambda:\ S\in M(p,\mu), T\in M(n,\mu)\},$$

K-线性张成的理想.

对于公理 3, 将 $*$ 作用到等式, 得

公理3′　$$C^{\lambda}_{T,S}a^{*}\equiv\sum_{S'\in M(p,\lambda)} r_a(S,S')C^{\lambda}_{T,S'} \mod \mathcal{A}^{(<\lambda)}.$$

由定义可知: 胞腔代数可视为只有 1 个对象的胞腔范畴; 反之, 胞腔范畴中每个自同态代数均是胞腔代数. 可以通过范畴中的Hom集研究自同态代数间的关系[8], 这个定义为研究"塔"型的胞腔代数[9] 及其泛化结构[10] 带来了方便.

胞腔代数的胞腔基使得它具有很好的组合性质, 这类代数还有很好的结构与同调方面的性质. 这得益于 Koenig 等[11] 从环论的角度用某种理想链的形式, 给出了胞腔代数的一个等价定义. 在这个定义的基础上, 他们在文献 [12] 中给出了重复膨胀的概念. 膨胀的方法很好地刻画了胞腔代数的结构, 同时也是证明了一个代数具有胞腔性的有力的工具[13−16]. 借鉴

* 国家自然科学基金资助项目(11901033);北京市教育委员会科技计划一般项目(KM202011417012)
† 通信作者: 王沛(1984—), 男, 理学博士, 讲师. 研究方向: 代数表示论. E-mail: ldwangpei@buu.edu.cn
收稿日期: 2021-05-31

Koenig 等从环论的角度给出胞腔代数另一种定义的方式,本研究将通过范畴的理想链给出胞腔范畴的另一种定义,并证明它们的等价性. 等价的定义不仅更为精细地刻画了胞腔范畴的结构,而且可以通过函子很容易得到所有自同态代数的胞腔模,从而得到所有的单模.

2 指标集及等价定义

许多胞腔范畴的对象集上会有 1 个线性序,因此,本文所考虑的胞腔范畴$\mathcal{A}$,其对象集$O_{\mathrm{bj}}(\mathcal{A})$上具有线性序"$\leqslant$". 不仅如此,这些范畴的指标集还满足某些性质.

定义 2 令$(I,\leqslant)$是一个偏序集,称$(I\leqslant^{\bullet})$是$(I,\leqslant)$的一个全序化. 如果$\leqslant^{\bullet}$是I上的全序关系,且对任意a、$b\in I$,如果$a\leqslant b$,则有$a\leqslant^{\bullet}b$.

特别地,当I是有限集时,$(I\leqslant^{\bullet})$自然成为一个良序集.

定义 3 令$(I,\leqslant)$是一个良序集,I的一个子集S称为I的一个片段. 如果对任意x、$y\in I$,满足$y\leqslant x$,且$x\in S$,则有$y\in S$.

令$\mathcal{A}$是一个胞腔范畴,利用对象集上的全序关系,对指标集做如下假设.

假设 1 指标强保序性. 对任意$n\leqslant m$,其中n、$m\in O_{\mathrm{bj}}(\mathcal{A})$,若$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(n,m)\neq 0$(或等价的$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(m,n)\neq 0$),则$\Lambda_n\subseteq\Lambda_m$,且存在$\Lambda_m$的一个全序化,使得$\Lambda_n$在这个全序化下是$\Lambda_m$的一个片段,称$\Lambda_n$是$\Lambda_m$的强保序子集.

假设 2 指标不相容. 若$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(n,m)=0$(或等价的$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(m,n)=0$),则$\Lambda_m\cap\Lambda_n=\varnothing$.

注 这 2 个假设是合理的. 很多胞腔图范畴的例子是满足这 2 个假设的. 例如,Temperley-Lieb 范畴[3],它的指标集$\Lambda=\mathbb{N}$,对任意对象$n\in\mathbb{N}$,自同态代数A_n的指标集为$\Lambda_n=\{0,1,\cdots,n-4,n-2,n\}$. 当$\mathrm{Hom}(n,m)\neq 0$时,一定有$m\equiv n\ (\mathrm{mod}\ 2)$,此时$\Lambda_n$是$\Lambda_m$的片段;反之,$\Lambda_m$是$\Lambda_n$的片段. 当$\mathrm{Hom}(n,m)=0$时,$\Lambda_m\cap\Lambda_n=\varnothing$.

在给出胞腔范畴的另一个定义之前,首先引入范畴的胞腔理想的概念.

定义 4 令K是一个域,$\mathcal{A}$是一个具有对合$*$的K-线性范畴. 范畴$\mathcal{A}$的一个双边理想J称为胞腔理想,如果其满足以下条件.

1)$(J)^*=J$,即对任意$a\in J(m,n)$,有$(a)^*\in J(n,m)$,且对任意$b\in J(m,n)$,总存在$c\in J(n,m)$,使得$(c)^*=b$.

2)存在$\mathcal{A}$的左理想Δ,使得$\Delta\subset J$,且满足:

a)对任意$n\in O_{\mathrm{bj}}(\mathcal{A})$,记$\Delta(n):=\Delta(n,n)$,则$\Delta(n)$为有限维$K$-线性空间,且对任意$m\in O_{\mathrm{bj}}(\mathcal{A})$,如果$\Delta(m,n)\neq 0$,则有$A_n$-模同构$\Delta(n)\simeq\Delta(m,n)$.

b)存在函子$J(-,-)$到函子$\Delta(-)\otimes_K(\Delta(-))^*$的自然同构$\Psi$. 对任意$m$、$n\in O_{\mathrm{bj}}(\mathcal{A})$,满足如图 1 所示交换图.

$$\begin{tikzcd}
J(n,m) \arrow[r, "\Psi_{n,m}"] \arrow[d, "*"'] & \Delta(n)\otimes_K(\Delta(m))^* \arrow[d, "x\otimes y\to(y)^*\otimes(x)^*"] \\
J(m,n) \arrow[r, "\Psi_{m,n}"] & \Delta(m)\otimes_K(\Delta(n))^*
\end{tikzcd}$$

图 1 交换图

这里$\Psi_{n,m}$是作为左A_n-右A_m-双模同构,$\Psi_{m,n}$作为左A_m-右A_n-双模同构.

现在通过胞腔理想给出胞腔范畴的一个新的定义.

定义 5 令K是一个域,$\mathcal{A}$是一个具有对合$*$的K-线性范畴. 那么$\mathcal{A}$被称为一个胞腔范畴,如果存在一个偏序集Λ,以及存在 1 个以Λ为指标集的子函子集

$$\{J_\lambda\mid J_\lambda\text{ 为 }\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(-,-)\text{ 的子函子},\ \lambda\in\Lambda\},$$

使得下述条件得到满足:

1)对任意(m,n),其中m、$n\in O_{\mathrm{bj}}(\mathcal{A})$,存在唯一$\Lambda$的有限子集$\Lambda_{(m,n)}$,使得$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(m,n)=\coprod\limits_{\lambda\in\Lambda_{(m,n)}}J_\lambda(m,n)$.

2)$\Lambda_{(m,n)}$是Λ中的全序子集,即$\Lambda_{(m,n)}$中元素可由Λ中的序排成一个有限序列

$$\lambda_1^{(m,n)},\lambda_2^{(m,n)},\cdots,\lambda_k^{(m,n)}.$$

3)有关该序列,若令$J'_{\lambda_j^{(m,n)}}=\coprod\limits_{i=1}^{j}J_{\lambda_i^{(m,n)}}$,则$J'_{\lambda_j^{(m,n)}}$为$\mathcal{A}$的双边理想,且对任意$j=1,\cdots,k$,$J_{\lambda_j^{(m,n)}}$为$\mathcal{A}/J'_{\lambda_{j-1}^{(m,n)}}$的胞腔理想.

3 定理及证明

定理 1 在指标集假设 1 和假设 2 下,定义 1 与定义 5 是等价的.

在给出定理的证明之前,首先证明下面的引理.

引理 1 令$\mathcal{A}$是定义 5 意义下的胞腔范畴,$J_{\lambda_1}^{(n)}$是全序集Λ_n中的最小元,则$\mathcal{A}/J_{\lambda_1}^{(n)}$依然是定义 5 意义下的胞腔范畴.

证明 对任意k、$l\in O_{\mathrm{bj}}(\mathcal{A})$,令$k\leqslant l$,指标集$\Lambda_{(k,l)}=\Lambda_k=\{\lambda_i^{(k)}\}_{i=1}^r$. 若$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(n,k)=0$,则由指标不相容条件,有$\Lambda_k\cap\Lambda_n=\varnothing$;若$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(n,k)\neq 0$,由假设条件 1,有$\Lambda_n$中指标序列是$\Lambda_k$中指标序列的片段,或者反之.

因此,无论哪种情况,均有$\lambda_1^{(k)}=\lambda_1^{(n)}$,即

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}/J_{\lambda_1^{(n)}}}(k,l)=\begin{cases}\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(k,l), & \text{当 }\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(n,k)=0\text{ 时},\\ \coprod\limits_{i=2}^{r}J_{\lambda_i^{(k)}}(k,l), & \text{当 }\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(n,k)\neq 0\text{ 时}.\end{cases}$$

因此,当$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(n,k)=0$时,$J_{\lambda_1^{(k)}},\cdots,J_{\lambda_r^{(k)}}$为满足定义 5 的子函子序列;当$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(n,k)\neq 0$时,$J_{\lambda_2^{(k)}},\cdots,J_{\lambda_r^{(k)}}$为满足要求的序列.

下面给出 2 个胞腔范畴定义的等价性的证明.

证明 i（**定义 5 ⇒ 定义 1**）　取n、$m \in O_{\mathrm{bj}}\mathcal{A}$, 满足: $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(n,m) \neq 0$, 令$n \leqslant m$, 则有$\Lambda_{(n,m)} = \Lambda_n = \{\lambda_j^{(n)}\}_{j=1}^k$.

对k做归纳法.

当$k=1$时, 由定义 5 中的 3), $\lambda_1^{(n)}$是$\mathcal{A}$的胞腔理想, 因此存在$\mathcal{A}$的左理想$\Delta_{\lambda_1^{(n)}}$, 使得$\Delta_{\lambda_1^{(n)}} \subset J_{\lambda_1^{(n)}}$. 因为$\Delta_{\lambda_1^{(n)}}(n)$是有限维的, 故可取一组$K$-基$\{C_S^{(n,\lambda_1^{(n)})} \mid S \in M(n,\lambda_1^{(n)})\}$, 式中, $M(n,\lambda_1^{(n)})$是对应n及$\lambda_1^{(n)}$的指标集.

同理, 可取$\Delta_{\lambda_1^{(n)}}(m)$的一组$K$-基$\{C_T^{(m,\lambda_1^{(n)})} \mid T \in M(m,\lambda_1^{(n)})\}$.

若记$C^{\lambda_1^{(n)}}_{(n,S),(m,T)}$为$C_S^{(n,\lambda_1^{(n)})} \otimes (C_T^{(m,\lambda_1^{(n)})})^*$在$\Psi_{n,m}$下的原象, 则

$$\{C^{\lambda_1^{(n)}}_{(n,S),(m,T)} \mid S \in M(n,\lambda_1^{(n)}),\ T \in M(m,\lambda_1^{(n)})\}$$

为$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(n,m) = J_{\lambda_1^{(n)}}(n,m)$的一组$K$-基. 显然满足定义 1 中的条件公理 1.

由定义 4 中的交换图, 对任意$C^{\lambda_1^{(n)}}_{(n,S),(m,T)} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(n,m)$, 有

$$\begin{aligned}(C^{\lambda_1^{(n)}}_{(n,S),(m,T)})^* &= \Psi_{m,n}^{-1} \circ \tau \circ ((-)^* \otimes (-)^*) \circ \Psi_{n,m}(C^{\lambda_1^{(n)}}_{(n,S),(m,T)}) = \\ &\Psi_{m,n}^{-1} \circ \tau \circ ((-)^* \otimes (-)^*)(C_S^{(n,\lambda_1^{(n)})} \otimes (C_T^{(m,\lambda_1^{(n)})})^*) = \\ &\Psi_{m,n}^{-1}(C_T^{(m,\lambda_1^{(n)})} \otimes (C_S^{(n,\lambda_1^{(n)})})^*) = C^{\lambda_1^{(n)}}_{(m,T),(n,S)}.\end{aligned}$$

即满足定义 1 中的公理 2.

对任意基元素$C^{\lambda_1^{(n)}}_{(n,S),(m,T)}$, 以及任意$a \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(p,n)$、$p \in O_{\mathrm{bj}}(\mathcal{A})$, 因为$\Delta_{\lambda_1^{(n)}}$为$\mathcal{A}$的左理想, 因此有

$$aC_S^{(n,\lambda_1^{(n)})} \otimes (C_T^{(m,\lambda_1^{(n)})})^* = \sum_{X \in M(p,\lambda_1^{(n)})} r_a(S,X) C_X^{(p,\lambda_1^{(n)})} \otimes (C_T^{(m,\lambda_1^{(n)})})^*,$$

式中$r_a(S,X) \in K$, 由a、S及X决定. 对上式 2 边取$\Psi_{p,m}^{-1}$, 定义 1 中的公理成立.

假设$k>1$时, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(n,m)$有一组满足定义 1 的$K$-基.

当$k+1$时, 根据引理 1, $\mathcal{A}/J^{(n)}_{\lambda_1}$是定义 5 意义下的胞腔范畴. 由归纳假设

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}/J_{\lambda_1^{(n)}}}(n,m) = \coprod_{i=2}^{k} J_{\lambda_i^{(n)}}(n,m),$$

有一组满足定义 1 的基

$$\bigcup_{i=2}^{k} \{C^{\lambda_i^{(n)}}_{(n,S),(m,T)} \mid S \in M(n,\lambda_i^{(n)}),\ T \in M(m,\lambda_i^{(n)})\}.$$

令$i=1$, 可得

$$\bigcup_{i=1}^{k} \{C^{\lambda_i^{(n)}}_{(n,S),(m,T)} \mid S \in M(n,\lambda_i^{(n)}),\ T \in M(m,\lambda_i^{(n)})\},$$

为$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(n,m)$的一组满足定义 1 的基.

证明 ii（**定义 1 ⇒ 定义 5**）　对任意$\lambda \in \Lambda$, 定义$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(-,-)$的子函子$J_\lambda$.

对任意n、$m \in O_{\mathrm{bj}}(\mathcal{A})$, 令

$$J_\lambda(n,m) := K - \mathrm{span}\{C^{\lambda}_{(n,U),(m,V)} \mid U \in M(n,\lambda), V \in M(m,\lambda)\}.$$

显然, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(n,m) = \coprod_{\lambda \in \Lambda(m,n)} J_\lambda(n,m)$.

令$n \leqslant m$, 则$\Lambda_{(n,m)} = \Lambda_n$. 因$\Lambda_n$是有限偏序集, 故可全序化, 即$\Lambda_n$中指标可排成序列$\lambda_1^{(n)}, \cdots, \lambda_k^{(n)}$, 且指标在序列中的序保持$\Lambda_n$中的序.

若令$J'_{\lambda_j^{(n)}} := \coprod_{i=1}^{j} J_{\lambda_i^{(n)}}$, 首先证明$J'_{\lambda_j^{(n)}}$是$\mathcal{A}$的理想.

任取n'、m'、$p \in O_{\mathrm{bj}}(\mathcal{A})$满足$J'_{\lambda_j^{(n)}}(n',m') \neq 0$, 且$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(p,n') \neq 0$. 对任意的$a \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(p,n')$及$J'_{\lambda_j^{(n)}}(n',m')$中基元素$C^{\lambda_l^{(n)}}_{(n',S),(m',T)}$、$l \leqslant j$, $S \in M(n',\lambda_l^{(n)})$, $T \in M(m',\lambda_l^{(n)})$, 由定义 1 中条件公理 3, 有

$$aC^{\lambda_l^{(n)}}_{(n',S),(m',T)} = \sum_{X \in M(p,\lambda_l^{(n)})} r_a(S,X) C^{\lambda_l^{(n)}}_{(p,X),(m',T)} + r',$$

式中$r' \in \mathcal{A}^{(<\lambda_l^{(n)})}$.

要证明$aC^{\lambda_l^{(n)}}_{(n',S),(m',T)} \in J'_{\lambda_j^{(n)}}(p,m')$. 由以上等式, 只需证明$r' \in J'_{\lambda_{l-1}^{(n)}}(p,m')$.

因为$J_{\lambda_l^{(n)}}(n',m') \neq 0$, 所以$\lambda_l^{(n)} \in \Lambda_{\min\{n',m'\}}$, 从而有$\Lambda_{\min\{n',m'\}} \cap \Lambda_n \neq \varnothing$. 由指标不相容性推出$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\min\{n',m'\},n) \neq 0$. 再由指标集的强保序性, 得$\Lambda_{\min\{n',m'\}}$是$\Lambda_n$的强保序子集, 或者反之, Λ_n是$\Lambda_{\min\{n',m'\}}$的强保序子集. 同理, 指标集$\Lambda_{\min\{p,m'\}}$与Λ_n也有相同的结论. 因此由$r' \in \mathcal{A}^{(<\lambda_l^{(n)})}$及$r' \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(p,m')$, 可以得到$r' \in J'_{\lambda_{l-1}^{(n)}}(p,m')$, 从而$aC^{\lambda_l^{(n)}}_{(n',S),(m',T)} \in J'_{\lambda_j^{(n)}}(p,m')$. 这就证明了$J'_{\lambda_j^{(n)}}$是$\mathcal{A}$的左理想. 对于$J'_{\lambda_j^{(n)}}$是$\mathcal{A}$的右理想, 考虑公理3′, 并用类似的方法证明.

对$j=1,2,\cdots,k$, 证明$J'_{\lambda_j^{(n)}}$是$\mathcal{A}/J'_{\lambda_{j-1}^{(n)}}$的胞腔理想.

首先, 类似于上面的证法, $J'_{\lambda_j^{(n)}}$是$\mathcal{A}/J'_{\lambda_{j-1}^{(n)}}$的理想.

由公式$(C^{\lambda_j^{(n)}}_{S,T})^* = C^{\lambda_j^{(n)}}_{T,S}$, 得$(J_{\lambda_j^{(n)}})^* = J_{\lambda_j^{(n)}}$, 即满足胞腔理想定义中的条件 1).

对条件 2), 首先定义$\mathcal{A}/J'_{\lambda_{j-1}^{(n)}}$的左理想$\Delta_{\lambda_j^{(n)}}$.

对任意n'、$m' \in O_{\mathrm{bj}}(\mathcal{A})/J'_{\lambda_{j-1}^{(n)}}$, 令

$$\Delta_{\lambda_j^{(n)}}(n',m') := \begin{cases} K - \mathrm{span}\{C^{\lambda_j^{(n)}}_{(n',S),(m',T_0)}\}_{S \in M(n',\lambda_j^{(n)})}, & \text{当 } \lambda_j^{(n)} \in \Lambda_{\min\{n',m'\}} \text{ 时}, \\ 0, \quad \text{当 } \lambda_j^{(n)} \notin \Lambda_{\min\{n',m'\}} \text{ 时}, \end{cases}$$

式中$T_0 \in M(m',\lambda_j^{(n)})$为一个固定的指标.

显然$\Delta_{\lambda_j^{(n)}} \subset J_{\lambda_j^{(n)}}$为$\mathcal{A}/J'_{\lambda_{j-1}^{(n)}}$的左理想, 且当$\Delta_{\lambda_j^{(n)}}(n',m') \neq 0$时, 有$A_{n'}$-模同构$\Delta_{\lambda_j^{(n)}}(n') \simeq \Delta_{\lambda_j^{(n)}}(n',m')$.

令$S_0 \in M(n',\lambda_j^{(n)})$及$T_0 \in M(m',\lambda_j^{(n)})$分别为$\Delta_{\lambda_j^{(n)}}(n')$及$\Delta_{\lambda_j^{(n)}}(m')$中的固定指标. 当$J_{\lambda_j^{(n)}}(n',m') \neq 0$时, 定义$J_{\lambda_j^{(n)}}(n',m')$到$\Delta_{\lambda_j^{(n)}}(n') \otimes (\Delta_{\lambda_j^{(n)}}(m'))^*$的映射

$$\Psi_{n',m'} : C^{\lambda_j^{(n)}}_{(n',S),(m',T)} \mapsto C^{\lambda_j^{(n)}}_{(n',S),(n',S_0)} \otimes C^{\lambda_j^{(n)}}_{(m',S),(m',T_0)}.$$

显然该映射满足定义 4 中的条件, 因此$J'_{\lambda_j^{(n)}}$是$\mathcal{A}/J'_{\lambda_{j-1}^{(n)}}$的

胞腔理想. 证毕.

4 参考文献

[1] GRAHAM J J, LEHRER G I. Cellular algebras[J]. Inventiones Mathematicae, 1996, 123: 1

[2] WESTBURY B W. Invariant tensors and cellular categories[J]. Journal of Algebra, 2009, 321: 3563

[3] GRAHAM J J, LEHRER G I. The representation theory of affine Temperley-Lieb algebras[J]. L'Enseignement Mathématique, 1998, 44: 173

[4] WESTBURY B W. The representation theory of the Temperley-Lieb algebras[J]. Mathematische Zeitschrift, 1995, 219(4): 539

[5] JONES V. The Potts Model and the symmetric group[C]// Proceedings of the Tanaguchi Symposium on Operator Algebras, July 6-10, 1993. Kyuzeso, Japan: World Scientific, c1994:259

[6] MARTIN P P. Temperley-Lieb algebras for non-planar statistical mechanics: the partition algebra construction[J]. Journal of Knot Theory and Its Ramifications, 1994, 3(1): 51

[7] KUPERBERG G. Spiders for rank 2 Lie algebras[J]. Communications in Mathematical Physics, 1996, 180(1): 109

[8] WANG P. Morita context functors on cellular categories[J]. Communications in Algebra, 2019, 47(4): 1773

[9] WANG P. Inductions and restrictions on towers of cellularly stratified diagram algebras[J]. Communications in Algebra, 2019, 47(12): 4958

[10] WANG P. The Grothendieck group of a tower of the Temperley-Lieb algebras[J]. Journal of Algebra and Its Applications, 2019, 18(7): 1950136

[11] KOENIG S, XI C C. On the structure of cellular algebras[C]// Eighth International Conference on Representations of Algebras, August 4−10, 1996. Geiranger, Norway: American Mathematical Society, c1998: 365

[12] KOENIG S, XI C C. Cellular algebras: inflations and Morita equivalences[J]. Journal of the London Mathematical Society, 1999, 60(2): 700

[13] BOWMAN C. Brauer algebras of type *C* are cellularly stratified[J]. Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 2012, 153(1): 1

[14] KOENIG S, XI C C. A characteristic free approach to Brauer algebras[J]. Transactions of the American Mathematical Society, 2001, 353: 1489

[15] XI C C. On the quasi-heredity of Birman-Wenzl algebras[J]. Advances in Mathematics, 2000, 154: 280

[16] XI C C. Partition algebras are cellular[J]. Compositio Mathematica, 1999, 119(1): 99

An equivalent definition of cellular category

WANG Pei†

(Teachers' College, Beijing Union University, 100011, Beijing, China)

Abstract In this paper, we introduce the concept of cell ideals in a category version, and give an equivalent definition of cellular categories in terms of chains of two-sided ideals of categories under certain conditions of index.

Keywords cellular algebra; cellular category; cellular ideal; cellular basis

【责任编辑: 陆有忠】