

带脉冲和强 Allee 效应的集团内捕食系统的周期解*

艾 姣 王凯华[†]

(海南师范大学数学与统计学院, 571158, 海南海口)

摘要 建立了具有周期系数的带脉冲和强 Allee 效应的集团内捕食模型;证明了模型的持久性;利用 Mawhin 重合度理论与分析工具,研究了该模型周期解的存在性;讨论了周期解的稳定性;得到了正周期解存在、全局稳定的充分条件,并通过数值模拟对结果的有效性进行了验证.

关键词 集团内捕食;脉冲;Allee 效应;周期解

中图分类号 O175.1

DOI: 10.12202/j.0476-0301.2022008

0 引言

1989年,Polis等^[1]首次提出了集团内捕食(intraguild predation, IGP)的概念,指出自然界存在捕食者与被捕食者以同一物种为食的现象,即捕食者与被捕食者之间除了捕食关系,还存在竞争关系.一个简单的IGP食物网模型由捕食者(IG捕食者)、被捕食者(IG食饵),以及IG捕食者和IG食饵共享的基底食饵这3个营养模块组成(图1).

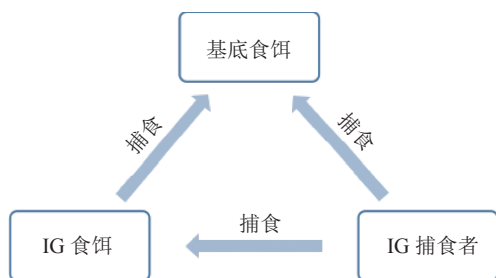


图1 IGP模型示意

由于系统中IG捕食者以不同营养水平的生物(IG食饵和基底食饵)为食,形成了一种杂食性^[2-4]捕食现象,并且与IG食饵之间产生竞争关系,因此研究集团内捕食系统对于了解复杂食物网持续存在机制具有重要意义.杂食性情况在自然界普遍存在,且非常重要,因此有关集团内捕食系统的动力学研究受到了众多学者的广泛关注^[5-11].例如:Anderson等^[5]研究了集团内捕食系统的IG捕食者的密度依赖现象,结果表明随着IG捕食者种群密度的增加,IG捕食者和IG食饵之间潜在的相遇率也呈非线性增加,这将最

终决定二者之间发生竞争还是捕食关系;Rabago等^[8]考虑到自然条件下捕食者从捕食到繁殖存在妊娠等导致的时间滞后,因此建立了带有时滞的IGP模型,并给出了所有非负平衡点的存在性、稳定性,以及Hopf分岔存在的条件;Kang等^[9]考虑了IG捕食者为专或泛捕食者时集团内捕食系统的动力学性质,得到模型持续生存或消亡的充分条件.

在IGP模型的诸多研究中,一般假设基底食饵是Logistic增长的.尽管Logistic增长方式可较好地描述种群演化规律,并得到了普遍应用,但在实际情况中,低密度生物种群的增长率与Logistic增长函数所呈现出来的规律并不一致.当种群密度很低时,种群单位增长率与种群密度之间呈正相关,这种生物现象被称为Allee效应^[11-14].

具有Allee效应的简单单种群演化模型为

$$X'(t) = rX(K - X)(X - K_0), \quad (1)$$

式中: $X(t)$ 表示 t 时刻的种群密度; r 为种群内增长率($r > 0$); K 为密度制约($K > 0$); $X - K_0$ 是对Logistic函数的修改,且满足 $|K_0| < K$, K_0 为Allee阈值.当 $0 < K_0 < K$ 时,为强Allee效应,此时 K_0 表示种群的阈值水平,低于该阈值的种群会逐渐趋于灭亡,而高于该阈值的种群则会持续存在;若 $K_0 \leq 0$,则为弱Allee效应^[15],弱Allee效应的种群没有临界阈值,只会增加种群灭绝的可能性.

考虑基底食饵受强Allee效应的IGP食物网模型^[16]为

* 国家自然科学基金资助项目(61962018)

[†] 通信作者:王凯华(1980—),男,博士,教授.研究方向:生物数学,动力系统. E-mail: kaihuawang@hainan.edu.cn

收稿日期:2022-01-21

$$\begin{cases} R'(t) = rR\left(1 - \frac{R}{K}\right)(R - K_0) - b_1RP - b_2RQ, \\ P'(t) = P(e_1b_1R - b_3Q - m_1P - d_p), \\ Q'(t) = Q(e_2b_2R + e_3b_3P - m_2Q - d_q), \end{cases} \quad (2)$$

式中: $R(t)$ 、 $P(t)$ 和 $Q(t)$ 分别为 t 时刻的基底食饵、IG 食饵和 IG 捕食者的种群密度; r 、 K 分别为基底食饵 R 的内禀增长率和环境承载能力; b_1 、 b_2 分别为 IG 食饵 P 和 IG 捕食者 Q 对基底食饵 R 的捕食率; b_3 为 IG 捕食者对 IG 食饵的捕食率; e_1 、 e_2 分别为 IG 食饵和 IG 捕食者将消耗的基底食饵转化为繁殖能力的速率; e_3 是 IG 捕食者 Q 从 IG 食饵 P 那里得到的转化率; d_p 、 d_q 分别为 IG 食饵 P 和 IG 捕食者 Q 的死亡率; m_1 、 m_2 为密度制约. 所有参数均为正值. 为了使模型更具合理性, 式(2)相较于文献[16], 对 IG 食饵和 IG 捕食者增加了密度制约.

为简化式(2), 令: $x_1 = \frac{R}{K}$ 、 $x_2 = P$ 、 $x_3 = Q$ 、 $\tau = rKt$, 可得

$$\begin{cases} x'_1 = x_1(x_1 - \theta)(1 - x_1) - \alpha x_1 x_2 - \beta x_1 x_3, \\ x'_2 = \gamma_1 x_2(x_1 - a_1 x_3 - \delta_1 x_2 - d_1), \\ x'_3 = \gamma_2 x_3(x_1 + a_2 x_2 - \delta_2 x_3 - d_2), \end{cases} \quad (3)$$

式中: $\theta(0 < \theta < 1)$ 、 α 、 β 、 a_1 、 a_2 、 d_1 、 d_2 、 γ_i 、 δ_i 分别为 $\frac{K_0}{K}$ 、 $\frac{b_1}{rK}$ 、 $\frac{b_2}{rK}$ 、 $\frac{b_3}{e_1 b_1 K}$ 、 $\frac{e_3 b_3}{e_2 b_2 K}$ 、 $\frac{d_p}{e_1 b_1 K}$ 、 $\frac{d_q}{e_2 b_2 K}$ 、 $\frac{e_i b_i}{r}$ 、 $\frac{m_i}{e_i b_i K}$ ($i = 1, 2$).

本研究给出了受强 Allee 效应影响的集团内捕食的食物网模型. 自然界中某些生物或环境因素, 如气候、食物供应、交配习惯等呈现季节性周期变化, 这会导致模型产生周期系数. 此外, 诸如释放天敌和喷洒农药、人工投放或捕获物种、生态环境的剧烈变化等短暂扰动作用, 会使种群数量发生跳跃式变化, 还需要用脉冲微分方程^[17-19]加以刻画, 因此, 有必要建立具有周期系数和脉冲扰动的 IGP 模型, 使之具有更好的适用性, 同时对其动力学性质特别是脉冲效应对模型的影响进行研究.

本研究对式(3)增加周期系数和脉冲效应后可得

$$\left. \begin{cases} x'_1(t) = x_1(t)(x_1(t) - \theta(t))(1 - x_1(t)) - \\ \quad \alpha(t)x_1(t)x_2(t) - \beta(t)x_1(t)x_3(t), \\ x'_2(t) = \gamma_1(t)x_2(t)(x_1(t) - a_1(t)x_3(t) - \delta_1(t)x_2(t) - d_1(t)), \\ x'_3(t) = \gamma_2(t)x_3(t)(x_1(t) + a_2(t)x_2(t) - \delta_2(t)x_3(t) - d_2(t)), \\ \Delta x_i(t) = x_i(t_k^+) - x_i(t_k^-) = p_i^k x_i(t_k^-), \\ \quad t = t_k, \quad k \in \mathbb{Z}^+, \quad i = 1, 2, 3. \end{cases} \right\} t \neq t_k, \quad (4)$$

式(4)中所有参数的意义与式(3)保持一致, 并满足如下条件:

H₁) $\theta(t)$ 、 $\alpha(t)$ 、 $\beta(t)$ 、 $\gamma_i(t)$ 、 $a_i(t)$ 、 $d_i(t)$ 、 $\delta_i(t)$

($i = 1, 2$) 均是定义在 \mathbb{R} 上正的 ω -周期函数;

H₂) 常数 p_k^i 、 $t_k \in \mathbb{R}$, $t_k < t_{k+1}$, $1 + p_k^i > 0$, 且存在常数 $q \in \mathbb{Z}^+$, 使得 $p_{k+q}^i = p_k^i$ 、 $t_{k+q} = t_k + \omega$ ($k \in \mathbb{Z}^+$, $i = 1, 2, 3$).

1 基本概念和引理

令: $J \subset \mathbb{R}$, 记 $P_C(J, \mathbb{R}^3)$ 表示映射 $\phi: J \rightarrow \mathbb{R}^3$ 构成的空间; ϕ 对于任意的 $t \in J$ 、 $t \neq t_k$ 连续, 且当 $t = t_k \in J$ 时左连续, 并属于第 1 类间断点. 再令:

$$\begin{aligned} P'_C(J, \mathbb{R}^3) &= \{\phi(t) | \phi, \phi' \in P_C(J, \mathbb{R}^3)\}, \\ P_{C\omega} &= \{\phi(t) \in P_C([0, \omega], \mathbb{R}^3) | \phi(t + \omega) = \phi(t)\}, \\ P'_{C\omega} &= \{\phi(t) \in P'_C([0, \omega], \mathbb{R}^3) | \phi(t + \omega) = \phi(t)\}. \end{aligned}$$

引理 1 假设 $\phi \in P'_{C\omega}$, 则^[18]

$$\left| \sup_{s \in [0, \omega]} \phi(s) - \inf_{s \in [0, \omega]} \phi(s) \right| \leq \frac{1}{2} \left(\int_0^\omega |\phi'(s)| ds + \sum_{k=1}^p |\Delta \phi(t_k)| \right).$$

设 $f(t)$ 是 ω -周期函数, 为讨论方便, 定义

$$\bar{f} = \frac{1}{\omega} \int_0^\omega f(s) ds, \quad f^L = \min_{s \in [0, \omega]} f(s), \quad f^M = \max_{s \in [0, \omega]} f(s).$$

2 持久性

给定函数 $a(t)$ 、 $b(t) \in P_{C\omega}$, $b(t) > 0$. 考虑脉冲扰动系统:

$$\begin{cases} x'(t) = a(t)x(t) - b(t)x^2(t), \quad t \neq t_k, \\ x(t_k^+) = (1 + p_k)x(t_k^-), \quad t = t_k, \end{cases} \quad (5)$$

式中: $p_{k+q} = p_k$ 为常数, 且有 $1 + p_k > 0$; $k \in \mathbb{Z}^+$.

引理 2 式(5)存在唯一正周期解的充要条件是^[19]

$$\bar{a} > \frac{1}{\omega} \ln \left(\prod_{i=1}^q \frac{1}{1 + p_i} \right).$$

引理 3 考虑函数 $a(t)$ 、 $b(t) \in P_{C\omega}$, $b(t) > 0$. 设 $u(t) \in P'_C(J, \mathbb{R})$, $u_0 > 0$, $\phi_{[a,b]}$ 为^[19]

$$\begin{cases} u'(t) = a(t)u(t) - b(t)u(t)^2, \quad t \neq t_k, \\ u(t_k^+) = (1 + p_k)u(t_k^-), \quad t = t_k, \\ u(t_0^+) = u_0 \end{cases}$$

的唯一正 ω -周期解. 如果

$$\begin{cases} u'(t) \geq a(t)u(t) - b(t)u(t)^2, \quad t \neq t_k, \\ u(t_k^+) \geq (1 + p_k)u(t_k^-), \quad t = t_k, \\ u(t_0^+) \geq u_0, \end{cases} \quad (6)$$

则对于任意的 $t > t_0$, 都有 $u(t) \geq \phi_{[a,b]}$. 同理, 如果

$$\begin{cases} u'(t) \leq a(t)u(t) - b(t)u(t)^2, \quad t \neq t_k, \\ u(t_k^+) \leq (1 + p_k)u(t_k^-), \quad t = t_k, \\ u(t_0^+) \leq u_0, \end{cases} \quad (7)$$

则对于任意的 $t > t_0$, 都有 $u(t) \leq \phi_{[a,b]}$.

定义 1 若存在正常数 $0 < \sigma < \delta$, 使得对于式 (4) 正解的任意分量都有

$$\sigma \leq \liminf_{x \rightarrow \infty} x_i(t) \leq \limsup_{x \rightarrow \infty} x_i(t) \leq \delta, i = 1, 2, 3,$$

则式 (4) 是持久的.

定理 1 若式 (4) 在满足 $H_1)$ 、 $H_2)$ 的条件下, 同时满足

$$H_3) \frac{1}{\omega} \sum_{k=1}^q \ln(1 + p_k^i) > \max\{\bar{\theta} + \overline{\alpha\phi_{[A_1, \gamma_1, \delta_1]}} + \overline{\beta\phi_{[A_2, \gamma_2, \delta_2]}}},$$

$\overline{\gamma_1 a_1 \phi_{[A_1, \gamma_1, \delta_1]}} + \overline{\gamma_1 d_1}, \overline{\gamma_2 d_2}\}$, 则式 (4) 是持久的. 其中 A_1 、 A_2 的定义参见证明过程.

证明 对于式 (4), 显然有

$$x_1'|_{x_1=1} = -\alpha x_2 - \beta x_3 \leq 0,$$

$$x_1'|_{x_1>1} = x_1(x_1 - \theta)(1 - x_1) - \alpha x_1 x_2 - \beta x_1 x_3 < 0.$$

由此可得 $\limsup_{x \rightarrow \infty} x_1(t) \leq 1$, 因此存在 $t_0 > 0$, 使得 $t > t_0$ 时满足:

$$x_1'(t) \leq (1 - \theta(t))x_1(t) - (1 - \theta(t))x_1^2(t), t \neq t_k, k \in \mathbb{Z}^+,$$

$$x_1(t_k^+) = (1 + p_k^1)x_1(t_k^-), t = t_k, k \in \mathbb{Z}^+.$$

由引理 3 可知: 存在 $t_1 > t_0$, 当 $t > t_1$ 时满足 $x_1(t) \leq \phi_{[1-\theta, 1-\theta]}$. 由此可得

$$x_2'(t) \leq \phi_{[1-\theta, 1-\theta]}\gamma_1(t)x_2(t) - \gamma_1(t)\delta_1(t)x_2^2(t), t \neq t_k, k \in \mathbb{Z}^+,$$

$$x_2(t_k^+) = (1 + p_k^2)x_2(t_k^-), t = t_k, k \in \mathbb{Z}^+.$$

故存在 $t_2 > t_1$, 当 $t > t_2$ 时满足 $x_2(t) \leq \phi_{[A_1, \gamma_1, \delta_1]}$, 其中 $A_1 = \gamma_1 \phi_{[1-\theta, 1-\theta]}$. 类似地, 有

$$x_3'(t) \leq (\phi_{[1-\theta, 1-\theta]} + \phi_{[A_1, \gamma_1, \delta_1]} a_2(t))\gamma_2(t)x_3(t) - \gamma_2(t)\delta_2(t)x_3^2(t), t \neq t_k, k \in \mathbb{Z}^+,$$

$$x_3(t_k^+) = (1 + p_k^3)x_3(t_k^-), t = t_k, k \in \mathbb{Z}^+.$$

故存在 $t_3 > t_2$, 当 $t > t_3$ 时满足 $x_3(t) \leq \phi_{[A_2, \gamma_2, \delta_2]}$, 其中 $A_2 = (\phi_{[1-\theta, 1-\theta]} + \phi_{[A_1, \gamma_1, \delta_1]} a_2)\gamma_2$. 综上, 令: $\delta = \max\{\sup \phi_{[1-\theta, 1-\theta]}, \sup \phi_{[A_1, \gamma_1, \delta_1]}, \sup \phi_{[A_2, \gamma_2, \delta_2]}\}$, 则当 $t > t_3$ 时, $x_i(t) \leq \delta, i = 1, 2, 3$.

当 $t > t_3$ 时,

$$\left. \begin{aligned} x_1'(t) &\geq (-\theta(t) - \phi_{[A_1, \gamma_1, \delta_1]}\alpha(t) - \phi_{[A_2, \gamma_2, \delta_2]}\beta(t))x_1(t) - x_1^2(t), \\ x_2'(t) &\geq (-\phi_{[A_1, \gamma_2, \delta_2]}\gamma_1(t)a_1(t) - \gamma_1(t)d_1(t))x_2(t) - \gamma_1(t)\delta_1(t)x_2^2(t), \\ x_3'(t) &\geq -\gamma_2(t)d_2(t)x_3(t) - \gamma_2(t)\delta_2(t)x_3^2(t), \\ x_i(t_k^+) &\geq (1 + p_k^i)x_i(t_k^-), t = t_k, k \in \mathbb{Z}^+. \end{aligned} \right\} t \neq t_k,$$

同理, 由引理 3, 存在 $t_4 > t_3$, 使得当 $t > t_4$ 时满足: $x_1 \geq \phi_{[A_3, 1]}$, $x_2 \geq \phi_{[A_4, \gamma_2, \delta_2]}$, $x_3 \geq \phi_{[-\gamma_2 d_2, \gamma_2 \delta_2]}$, 其中 $A_3 = -(\theta + \alpha\phi_{[A_1, \gamma_1, \delta_1]} + \beta\phi_{[A_2, \gamma_2, \delta_2]})$, $A_4 = -\gamma_1(a_1\phi_{[A_2, \gamma_2, \delta_2]} + d_1)$. 定义: $\sigma = \min\{\inf \phi_{[A_3, 1]}, \inf \phi_{[A_4, \gamma_2, \delta_2]}, \inf \phi_{[-\gamma_2 d_2, \gamma_2 \delta_2]}\}$; 则当 $t > t_4$ 时有 $x_i(t) \geq \sigma > 0, i = 1, 2, 3$. 则可得

$$0 < \sigma \leq \liminf_{x \rightarrow \infty} x_i(t) \leq \limsup_{x \rightarrow \infty} x_i(t) \leq \delta < \infty, i = 1, 2, 3.$$

因此, 式 (4) 是持久的. 证毕.

3 正周期解的存在性

为了证明式 (4) 存在周期解, 需要介绍重合度理论的相关知识^[18, 20-21]. 设 X, Y 为赋范线性空间, $L: \text{dom } L \subset X \rightarrow Y$ 为线性算子, $N: X \rightarrow Y$ 是连续算子. 若 $\dim \ker L = \text{codim Im } L < \infty$ 且 $\text{Im } L$ 是 Y 的闭子集, 则称 L 是指标为 0 的 Fredholm 算子^[18]. 此时, 存在连续投影算子 $P: X \rightarrow X, Q: Y \rightarrow Y$, 使得 $\text{Im } P = \ker L, \text{Im } L = \ker Q = \text{Im}(I - Q)$, 故 $L|_{\text{dom } L \cap \ker P}: (I - P)X \rightarrow \text{Im } L$ 存在逆算子, 记为 K_p . 假设 Ω 是 X 的一个有界开子集, 若满足 $(Q \circ N)(\bar{\Omega})$ 有界, 且 $K_p \circ (I - Q) \circ N: \bar{\Omega} \rightarrow X$ 紧, 则称 N 在 $\bar{\Omega}$ 上是 L -紧的. 由于 $\text{Im } Q$ 同构于 $\ker L$, 则存在同构映射 $J: \text{Im } Q \rightarrow \ker L$.

引理 4 设 $L: \text{dom } L \subset X \rightarrow Y$ 是指标为 0 的 Fredholm 算子, $N: \bar{\Omega} \rightarrow Y$ 在 $\bar{\Omega}$ 上 L -紧, 如果满足^[21]:

$$1) Lx \neq \lambda Nx, \text{ 其中 } \lambda \in (0, 1), x \in \text{dom } L \cap \partial\Omega;$$

$$2) QNx \neq 0, x \in \ker L \cap \partial\Omega;$$

$$3) \text{Brouwer 度 } \deg(JQN|_{\ker L \cap \partial\Omega}) \neq 0.$$

则在 $\text{dom } L \cap \bar{\Omega}$ 上, $Lx = Nx$ 至少存在 1 个解.

定理 2 若式 (4) 符合条件 $H_1) \sim H_3)$, 且同时满足如下条件:

$$H_4) \frac{1}{4} + \frac{1}{\omega} \sum_{k=1}^q \ln(1 + p_k^1) > 0;$$

$$H_5) \overline{\gamma_1 d_1} - \frac{1}{\omega} \sum_{k=1}^q \ln(1 + p_k^2) > 0;$$

$$H_6) \frac{\gamma_2 \delta_2^M}{\beta^L} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{\omega} \sum_{k=1}^q \ln(1 + p_k^1) \right) + \overline{\gamma_2 d_2} - \frac{1}{\omega} \sum_{k=1}^q \ln(1 + p_k^3) > 0;$$

$$H_7) \overline{\gamma_1 e^{E_1}} - \overline{\gamma_1 a_1 e^{C_1}} - \overline{\gamma_1 d_1} + \frac{1}{\omega} \sum_{k=1}^q \ln(1 + p_k^2) > 0;$$

$$H_8) \frac{1}{\omega} \sum_{k=1}^q \ln(1 + p_k^3) + \overline{\gamma_2 e^{E_2}} - \overline{\gamma_2 d_2} > 0.$$

则式 (4) 至少存在 1 个正的 ω -周期解 (此处 C_3, E_1 的定义详见证明过程).

证明 令: $x_i(t) = e^{y_i(t)}, i = 1, 2, 3$, 则式 (4) 可化为

$$\left. \begin{aligned} y_1'(t) &= (e^{y_1(t)} - \theta(t))(1 - e^{y_1(t)}) - \alpha(t)e^{y_2(t)} - \beta(t)e^{y_3(t)} \triangleq f_1(t), \\ y_2'(t) &= \gamma_1(t)(e^{y_1(t)} - a_1(t)e^{y_3(t)} - \delta_1(t)e^{y_2(t)}) - d_1(t) \triangleq f_2(t), \\ y_3'(t) &= \gamma_2(t)(e^{y_1(t)} + a_2(t)e^{y_2(t)} - \delta_2(t)e^{y_3(t)}) - d_2(t) \triangleq f_3(t), \\ \Delta y_i(t_k^+) &= \ln(1 + p_k^i) := \xi_k, \\ &t = t_k, k \in \mathbb{Z}^+, i = 1, 2, 3. \end{aligned} \right\} t \neq t_k, \quad (8)$$

为了运用引理 4, 令:

$$X = \{x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))^T | x_i(t) \in P_{C_\omega}, i = 1, 2, 3\},$$

并赋以范数

$\|\mathbf{x}\| = \|(x_1(t), x_2(t), x_3(t))^T\| = \sum_{i=1}^3 \|x_i(t)\| = \sum_{i=1}^3 \max_{0 \leq t \leq \omega} |x_i(t)|$,
 则 X 是 Banach 空间. 此外, 令

$$Y = \{\mathbf{y} = (y', \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_q)\} = X \times \mathbb{R}^{3q},$$

式中: $\mathbf{y}(t) = (y_1(t), y_2(t), y_3(t))^T \in P'_{C\omega}$; $\xi_k = (\xi_k^1, \xi_k^2, \xi_k^3)^T = (\Delta y_1(t_k), \Delta y_2(t_k), \Delta y_3(t_k))^T$ ($k = 1, 2, \dots, q$), 并规定范数 $\|\mathbf{y}\| = \|y'\| + \sum_{i=1}^q \|\xi_i\|$, 则 Y 也是 Banach 空间.

令 $L: \text{dom } L \subset X \rightarrow Y$ 为

$$L(\mathbf{y}(t)) = \left(\begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \\ y_3'(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Delta y_1(t_1) \\ \Delta y_2(t_1) \\ \Delta y_3(t_1) \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \Delta y_1(t_q) \\ \Delta y_2(t_q) \\ \Delta y_3(t_q) \end{pmatrix} \right),$$

式中 $\text{dom } L = \{\mathbf{y}(t) = (y_1, y_2, y_3)^T \in X | \mathbf{y}(t) \in P'_{C\omega}\}$. 此外, 定义 $N: X \rightarrow Y$ 为

$$N(\mathbf{y}(t)) = \left(\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \ln(1+p_1^1) \\ \ln(1+p_1^2) \\ \ln(1+p_1^3) \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \ln(1+p_q^1) \\ \ln(1+p_q^2) \\ \ln(1+p_q^3) \end{pmatrix} \right).$$

再定义 2 个投影算子 $P: X \rightarrow X$, $Q: Y \rightarrow Y$ 分别为

$$P(\mathbf{y}(t)) = \frac{1}{\omega} \left(\int_0^\omega y_1(t) dt, \int_0^\omega y_2(t) dt, \int_0^\omega y_3(t) dt \right)^T,$$

$$Q \left(\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi_1^1 \\ \xi_1^2 \\ \xi_1^3 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \xi_q^1 \\ \xi_q^2 \\ \xi_q^3 \end{pmatrix} \right) = \left(\begin{pmatrix} \int_0^\omega f_1(t) dt + \sum_{k=1}^q \xi_k^1 \\ \int_0^\omega f_2(t) dt + \sum_{k=1}^q \xi_k^2 \\ \int_0^\omega f_3(t) dt + \sum_{k=1}^q \xi_k^3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

显然

$\text{Im } L =$

$$\left\{ \left(\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi_1^1 \\ \xi_1^2 \\ \xi_1^3 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \xi_q^1 \\ \xi_q^2 \\ \xi_q^3 \end{pmatrix} \right) \in Y \left. \begin{matrix} \int_0^\omega f_1(t) dt + \sum_{k=1}^q \xi_k^1 \\ \int_0^\omega f_2(t) dt + \sum_{k=1}^q \xi_k^2 \\ \int_0^\omega f_3(t) dt + \sum_{k=1}^q \xi_k^3 \end{matrix} \right\} = \ker Q,$$

且有

$$\ker L = \{\mathbf{x} \in X | \mathbf{x} = (l_1, l_2, l_3)^T \in \mathbb{R}^3\} = \text{Im } P.$$

因此, $\text{Im } L$ 是 Y 的闭子集, 且 $\dim \ker L = \text{codim Im } L$. 根据讨论可以得 L 是指标为 0 的 Fredholm 算子. 另外, 还可以得到逆算子 $K_p: \text{Im } L \rightarrow \ker P \cap \text{dom } L$ 为

$$K_p \left(\begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \\ y_3'(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi_1^1 \\ \xi_1^2 \\ \xi_1^3 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \xi_q^1 \\ \xi_q^2 \\ \xi_q^3 \end{pmatrix} \right) = \left(\begin{matrix} \int_0^\omega f_1(s) ds + \sum_{0 < t_i < t} \xi_k^1 - \sum_{k=1}^q \xi_k^1 - \frac{1}{\omega} \int_0^\omega \int_0^t f_1(s) ds dt \\ \int_0^\omega f_2(s) ds + \sum_{0 < t_i < t} \xi_k^2 - \sum_{k=1}^q \xi_k^2 - \frac{1}{\omega} \int_0^\omega \int_0^t f_2(s) ds dt \\ \int_0^\omega f_3(s) ds + \sum_{0 < t_i < t} \xi_k^3 - \sum_{k=1}^q \xi_k^3 - \frac{1}{\omega} \int_0^\omega \int_0^t f_3(s) ds dt \end{matrix} \right).$$

由此可得

$$(Q \circ N)(\mathbf{y}(t)) = \left(\begin{matrix} \int_0^\omega f_1(t) dt + \sum_{k=1}^q \ln(1+p_k^1) \\ \frac{1}{\omega} \int_0^\omega f_2(t) dt + \sum_{k=1}^q \ln(1+p_k^2) \\ \int_0^\omega f_3(t) dt + \sum_{k=1}^q \ln(1+p_k^3) \end{matrix} \right), \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

此外还有

$$K_p(I-Q)N(\mathbf{y}(t)) = \left(\begin{matrix} \int_0^t f_1(s) ds + \sum_{0 < t_i < t} \ln(1+p_k^1) \\ \int_0^t f_2(s) ds + \sum_{0 < t_i < t} \ln(1+p_k^2) \\ \int_0^t f_3(s) ds + \sum_{0 < t_i < t} \ln(1+p_k^3) \end{matrix} \right) + \left(\begin{matrix} \int_0^\omega f_1(t) dt + \sum_{k=1}^q \ln(1+p_k^1) \\ \left(\frac{1}{2} - \frac{t}{\omega} \right) \int_0^\omega f_2(t) dt + \sum_{k=1}^q \ln(1+p_k^2) \\ \int_0^\omega f_3(t) dt + \sum_{k=1}^q \ln(1+p_k^3) \end{matrix} \right) -$$

$$\frac{1}{\omega} \left(\begin{matrix} \int_0^\omega \int_0^t f_1(s) ds dt + \sum_{k=1}^q \ln(1+p_k^1) \\ \int_0^\omega \int_0^t f_2(s) ds dt + \sum_{k=1}^q \ln(1+p_k^2) \\ \int_0^\omega \int_0^t f_3(s) ds dt + \sum_{k=1}^q \ln(1+p_k^3) \end{matrix} \right).$$

显然 $Q \circ N$ 与 $K_p \circ (I-Q) \circ N$ 均连续, 且对任意的有界开子集 $\Omega \in X$, $(Q \circ N)(\overline{\Omega})$ 有界. 又根据 Arzela-Ascoli 定理, 易见 $K_p \circ (I-Q) \circ N$ 列紧, 因此, N 在 $\overline{\Omega}$ 上 L -紧.

再找出满足引理 4 的有界开子集 Ω . 对于 $Ly = \lambda Ny$,

$\lambda \in (0, 1)$, 有

$$\begin{aligned} y'_i(t) &= \lambda f_i(t), \quad t \neq t_k, \quad i = 1, 2, 3, \\ \Delta y_i(t_k^+) &= \lambda \ln(1 + p_k^i), \quad t = t_k, \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned} \tag{9}$$

式中 $f_i(t)$ 的定义可见式 (8).

设 $\mathbf{y}(t) = (y_1(t), y_2(t), y_3(t))^T \in \mathbf{X}$ 是式 (9) 对某个 λ , 且 $\lambda \in (0, 1)$ 的周期解. 对式 (9) 在区间 $[0, \omega]$ 上进行积分, 可得

$$\int_0^\omega f_i(t) dt + \sum_{k=1}^q \ln(1 + p_k^i) = 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

即

$$\begin{aligned} \int_0^\omega (e^{y_1(t)} - \theta(t))(1 - e^{y_1(t)}) dt + \sum_{k=1}^q \ln(1 + p_k^1) = \\ \int_0^\omega (\alpha(t)e^{y_2(t)} + \beta(t)e^{y_3(t)}) dt, \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned} \int_0^\omega \gamma_1(t) e^{y_1(t)} dt + \sum_{k=1}^q \ln(1 + p_k^2) = \\ \int_0^\omega \gamma_1(t) (a_1(t)e^{y_2(t)} + \delta_1(t)e^{y_3(t)} + d_1(t)) dt, \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} \int_0^\omega \gamma_2(t) (e^{y_1(t)} + a_2(t)e^{y_2(t)}) dt + \sum_{k=1}^q \ln(1 + p_k^3) = \\ \int_0^\omega \gamma_2(t) (\delta_2(t)e^{y_3(t)} + d_2(t)) dt. \end{aligned} \tag{12}$$

对 $\theta \in (0, 1)$, 有 $(e^{y_1(t)} - \theta(t))(1 - e^{y_1(t)}) \leq \frac{1}{4}$. 根据式 (9) ~ (12) 可得

$$\begin{aligned} \int_0^\omega |y'_1(t)| dt \leq \frac{\omega}{2} + \sum_{k=1}^q \ln(1 + p_k^1) + \\ \sum_{k=1}^q |\ln(1 + p_k^1)| \triangleq A_1, \end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned} \int_0^\omega |y'_2(t)| dt \leq 2 \int_0^\omega \gamma_1(t) e^{y_1(t)} dt + \\ \sum_{k=1}^q \ln(1 + p_k^2) + \sum_{k=1}^q |\ln(1 + p_k^2)|, \end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned} \int_0^\omega |y'_3(t)| dt \leq 2 \int_0^\omega \gamma_2(t) (e^{y_1(t)} + a_2(t)e^{y_2(t)}) dt + \\ \sum_{k=1}^q \ln(1 + p_k^3) + \sum_{k=1}^q |\ln(1 + p_k^3)|. \end{aligned} \tag{15}$$

由于 $\mathbf{y} = (y_1(t), y_2(t), y_3(t))^T$, 故存在 $\xi_i, \eta_i \in [0, \omega], i = 1, 2, 3$, 有

$$y_i(\xi_i) = \inf_{t \in [0, \omega]} y_i(t), y_i(\eta_i) = \sup_{t \in [0, \omega]} y_i(t). \tag{16}$$

于是, 根据式 (10)、(12) 和 (15) 可得

$$\begin{aligned} \int_0^\omega \gamma_2(t) e^{y_1(\xi_1)} dt + \sum_{k=1}^q \ln(1 + p_k^3) \leq \\ \frac{\gamma_2^M \delta_2^M}{\beta^L} \left(\frac{\omega}{4} + \sum_{k=1}^q \ln(1 + p_k^1) \right) + \overline{\gamma_2} d_2 \omega, \end{aligned}$$

$$\int_0^\omega \alpha(t) e^{y_2(\xi_2)} dt \leq \frac{\omega}{4} + \sum_{k=1}^q \ln(1 + p_k^1),$$

$$\int_0^\omega \beta(t) e^{y_3(\xi_3)} dt \leq \frac{\omega}{4} + \sum_{k=1}^q \ln(1 + p_k^1).$$

化简后可得

$$\begin{aligned} y_1(\xi_1) \leq \ln \frac{1}{\gamma_2} + \ln \left(\frac{\gamma_2^M \delta_2^M}{\beta^L} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{\omega} \sum_{k=1}^q \ln(1 + p_k^1) \right) + \right. \\ \left. \overline{\gamma_2} d_2 - \frac{1}{\omega} \sum_{k=1}^q \ln(1 + p_k^3) \right) \triangleq B_1, \end{aligned} \tag{17}$$

$$y_2(\xi_2) \leq \ln \frac{1}{\alpha} + \ln \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{\omega} \sum_{k=1}^q \ln(1 + p_k^1) \right) \triangleq B_2, \tag{18}$$

$$y_3(\xi_3) \leq \ln \frac{1}{\beta} + \ln \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{\omega} \sum_{k=1}^q \ln(1 + p_k^1) \right) \triangleq B_3. \tag{19}$$

结合式 (13)、(17), 以及引理 1, 可得

$$\begin{aligned} y_1(t) \leq y_1(\xi_1) + \frac{1}{2} \left(\int_0^\omega |y'_1(t)| dt + \sum_{k=1}^q |\ln(1 + p_k^1)| \right) \leq \\ B_1 + \frac{A_1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^q |\ln(1 + p_k^1)| \triangleq C_1. \end{aligned} \tag{20}$$

由式 (14)、(20) 可得

$$\begin{aligned} \int_0^\omega |y'_2(t)| dt \leq 2 \overline{\gamma_1} \omega e^{C_1} + \sum_{k=1}^q \ln(1 + p_k^2) + \\ \sum_{k=1}^q |\ln(1 + p_k^2)| \triangleq A_2. \end{aligned} \tag{21}$$

类似式 (20) 的推导, 有

$$y_2(t) \leq B_2 + \frac{A_2}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^q |\ln(1 + p_k^2)| \triangleq C_2. \tag{22}$$

类似地, 由式 (15)、(20) 和 (22) 可得

$$\begin{aligned} \int_0^\omega |y'_3(t)| dt \leq 2 \overline{\gamma_2} \omega e^{C_1} + 2 \overline{\gamma_2} a_2 \omega e^{C_2} + \sum_{k=1}^q \ln(1 + p_k^3) + \\ \sum_{k=1}^q |\ln(1 + p_k^3)| \triangleq A_3. \end{aligned} \tag{23}$$

于是, 由式 (19)、(23), 以及引理 1 可得

$$y_3(t) \leq B_3 + \frac{A_3}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^q |\ln(1+p_k^3)| \triangleq C_3, \quad (24)$$

另一方面,由式(11)、(16)可得

$$\int_0^\omega \gamma_1(t) e^{y_1(t)} dt \geq \overline{\gamma_1 d_1} \omega - \sum_{k=1}^q \ln(1+p_k^2). \quad (25)$$

化简后可得

$$y_1(\eta_1) \geq \ln \frac{1}{\overline{\gamma_1}} + \ln \left(\overline{\gamma_1 d_1} - \frac{1}{\omega} \sum_{k=1}^q \ln(1+p_k^2) \right) \triangleq D_1. \quad (26)$$

结合式(13)、(26),以及引理1可得

$$y_1(t) \geq y_1(\eta_1) - \frac{1}{2} \left(\int_0^\omega |y_1'(t)| dt + \sum_{k=1}^q |\ln(1+p_k^1)| \right) \geq D_1 - \frac{A_1}{2} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^q |\ln(1+p_k^1)| \triangleq E_1. \quad (27)$$

于是由式(11)、(12)、(16)、(24),以及式(27),有

$$\overline{\gamma_1 a_1} \omega e^{C_3} + \int_0^\omega \gamma_1(t) \delta_1(t) e^{y_1(t)} dt + \overline{\gamma_1 d_1} \omega \geq \overline{\gamma_1} \omega e^{E_1} + \sum_{k=1}^q \ln(1+p_k^2), \quad (28)$$

$$\int_0^\omega \gamma_2(t) \delta_2(t) e^{y_2(t)} dt \geq \overline{\gamma_2} \omega e^{E_2} + \sum_{k=1}^q \ln(1+p_k^3) - \overline{\gamma_2 d_2} \omega. \quad (29)$$

$$(Q \circ N)(y) = \begin{pmatrix} (e^{y_1} - \bar{\theta})(1 - e^{y_1}) - (\bar{\alpha} e^{y_2} + \bar{\beta} e^{y_3}) + \frac{1}{\omega} \sum_{k=1}^q \ln(1+p_k^1) \\ \overline{\gamma_1} e^{y_1} - \overline{\gamma_1 a_1} e^{y_3} - \overline{\gamma_1 \delta_1} e^{y_2} - \overline{\gamma_1 d_1} + \frac{1}{\omega} \sum_{k=1}^q \ln(1+p_k^2) \\ \overline{\gamma_2} e^{y_1} + \overline{\gamma_2 a_2} e^{y_2} - \overline{\gamma_2 \delta_2} e^{y_3} - \overline{\gamma_2 d_2} + \frac{1}{\omega} \sum_{k=1}^q \ln(1+p_k^3) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0,$$

对于 $y \in \ker L \cap \Omega$, 有

$$(J \circ Q \circ N)(y) = \begin{pmatrix} (e^{y_1} - \bar{\theta})(1 - e^{y_1}) - (\bar{\alpha} e^{y_2} + \bar{\beta} e^{y_3}) + \frac{1}{\omega} \sum_{k=1}^q \ln(1+p_k^1) \\ \overline{\gamma_1} e^{y_1} - \overline{\gamma_1 a_1} e^{y_3} - \overline{\gamma_1 \delta_1} e^{y_2} - \overline{\gamma_1 d_1} + \frac{1}{\omega} \sum_{k=1}^q \ln(1+p_k^2) \\ \overline{\gamma_2} e^{y_1} + \overline{\gamma_2 a_2} e^{y_2} - \overline{\gamma_2 \delta_2} e^{y_3} - \overline{\gamma_2 d_2} + \frac{1}{\omega} \sum_{k=1}^q \ln(1+p_k^3) \end{pmatrix}.$$

由此直接计算可得 $\deg(JQN|_{\ker L \cap \Omega}) \neq 0$. 至此, Ω 满足引理4的所有条件,因此式(8)至少存在1个 ω -周期解,即式(4)至少存在1个正的 ω -周期解. 证毕.

4 全局稳定性

由定理1可知式(4)是持久的,因此给出满足 $0 < m <$

化简后可得

$$y_2(\eta_2) \geq \ln \frac{1}{\overline{\gamma_1 \delta_1}} + \ln \left(\overline{\gamma_1} e^{E_1} - \overline{\gamma_1 a_1} e^{C_3} - \overline{\gamma_1 d_1} + \frac{1}{\omega} \sum_{k=1}^q \ln(1+p_k^2) \right) \triangleq D_2, \quad (30)$$

$$y_3(\eta_3) \geq \ln \frac{1}{\overline{\gamma_2 \delta_2}} + \ln \left(\overline{\gamma_2} e^{E_2} - \overline{\gamma_2 d_2} + \frac{1}{\omega} \sum_{k=1}^q \ln(1+p_k^3) \right) \triangleq D_3, \quad (31)$$

联立(21)、(23)、(30)、(31),以及引理1可得

$$y_i(t) \geq y_i(\eta_i) - \frac{1}{2} \left(\int_0^\omega |y_i'(t)| dt + \sum_{k=1}^q |\ln(1+p_k^i)| \right) \geq D_i - \frac{A_i}{2} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^q |\ln(1+p_k^i)| \triangleq E_i, \quad (32)$$

式中 $i = 2, 3$. 从而有

$$\max_{t \in [0, \omega]} |y_i(t)| \leq \max\{|C_i|, |E_i|\} \triangleq G_i, i = 1, 2, 3.$$

由此可知 G_i 的取值与 λ 的选取无关,因此,存在常数 $G_0 > 0$, 有 $\max\{G_i\} \leq G_0$. 令: $r > G_0$, $\Omega = \{y \in X : \|y\| < r\}$, 则 Ω 满足引理4的条件1). 当 $y = (y_1, y_2, y_3)^T \in \partial \Omega \cap \ker L = \partial \Omega \cap \mathbb{R}^3$, y 是 \mathbb{R}^3 中的常值向量且 $\|y\| = r$, 则有

σ 的任意常数 m , 令 $u_i = \frac{x_i}{m}$, 则式(4)等价于

$$\left. \begin{aligned} u_1'(t) &= u_1(t)(mu_1(t) - \theta(t))(1 - mu_1(t)) - \alpha(t)mu_1(t)u_2(t) - \beta(t)mu_1(t)u_3(t), \\ u_2'(t) &= \gamma_1(t)u_2(t)(mu_1(t) - a_1(t)mu_3(t) - \delta_1(t)mu_2(t) - d_1(t)), \\ u_3'(t) &= \gamma_2(t)u_3(t)(mu_1(t) + a_2(t)mu_2(t) - \delta_2(t)mu_3(t) - d_2(t)), \\ u_i(t_k^+) &= (1 + p_k^i)u_i(t_k), \quad t = t_k, \quad k \in \mathbb{Z}^+, \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned} \right\} t \neq t_k, \quad (33)$$

定理3 若式(33)在符合条件 $H_1) \sim H_8)$ 下,还满足:

$H_9) 2\delta - (1 + \theta(t) + \gamma_1(t) + \gamma_2(t)) > 0;$

$H_{10}) \alpha(t) + \gamma_1(t)\delta_1(t) - \gamma_2(t)a_2(t) > 0;$

则式(4)存在全局稳定的正周期解.

证明 设 $u(t) = (u_1(t), u_2(t), u_3(t))$ 为式(33)的正周期解, $v(t) = (v_1(t), v_2(t), v_3(t))$ 为式(33)的任意其他解,

根据定理 1 可知: 存在 $t_0 > 0$, 使得对于任意的 $t \geq t_0$, 都有 $1 < \frac{\sigma}{m} \leq u_i(t)$, $v_i(t) \leq \frac{\delta}{m}$. 考虑 Lyapunov 函数

$$W(t) = \sum_{i=1}^3 |\ln u_i(t) - \ln v_i(t)|.$$

当 $t > t_0$ 且 $t \neq t_k$ 时, 对 $W(t)$ 求右导数, 可得

$$D^+W(t) \leq -m((m|u_i(t) + v_i(t)| - (1 + \theta(t) + \gamma_1(t) + \gamma_2(t))|u_1(t) - v_1(t)| + (\alpha(t) + \gamma_1(t)\delta_1(t) - \gamma_2(t)a_2(t))|u_2(t) - v_2(t)| + (\beta(t) + \gamma_2(t)\delta_2(t) + \gamma_1(t)a_1(t))|u_3(t) - v_3(t)|) \leq -m((2\delta - (1 + \theta(t) + \gamma_1(t) + \gamma_2(t))|u_1(t) - v_1(t)| + (\alpha(t) + \gamma_1(t)\delta_1(t) - \gamma_2(t)a_2(t))|u_2(t) - v_2(t)| + (\beta(t) + \gamma_2(t)\delta_2(t) + \gamma_1(t)a_1(t))|u_3(t) - v_3(t)|). \quad (34)$$

当 $t = t_k$ 时, 有

$$W(t_k^+) = \sum_{i=1}^3 |\ln(1 + p_k^i)u_i(t_k) - \ln(1 + p_k^i)v_i(t_k)| = \sum_{i=1}^3 \left| \ln \frac{u_i(t_k)}{v_i(t_k)} \right| = W(t_k). \quad (35)$$

由式 (34) 和 (35) 可得

$$D^+W(t) < 0, \quad t \neq t_k; \quad \Delta W(t_k) \leq 0, \quad t = t_k.$$

定义

$$\eta = \max\{2\delta - 1 - \theta(t) - \gamma_1(t) - \gamma_2(t), \alpha(t) + \gamma_1(t)\delta_1(t) - \gamma_2(t)a_2(t), \beta(t) + \gamma_2(t)\delta_2(t) + \gamma_1(t)a_1(t)\},$$

对 $D^+W(t)$ 在 $[t_0, t]$ 上积分, 有

$$\int_{t_0}^t \eta m \sum_{i=1}^3 |u_i(s) - v_i(s)| ds \leq W(t_0) - W(t).$$

因此

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t \sum_{i=1}^3 |u_i(s) - v_i(s)| ds \leq \frac{W(t_0)}{\eta m} < +\infty.$$

由此可得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |u_i(t) - v_i(t)| = 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

因此, 式 (33) 是全局稳定的. 又因为 $x_i(t) = mu_i(t)$, $i = 1, 2, 3$, 故式 (4) 也是全局稳定的. 证毕.

5 数值模拟

本章将通过数值模拟来验证上章所获得结果的有效性. 对式 (4), 取 $t_k = k\pi$, $\theta = 0.001 + 0.0001 \sin t$, $\alpha = 0.3 + 0.01 \sin t$, $\beta = 0.2 + 0.01 \sin t$, $\gamma_1 = 0.09 + 0.01 \sin t$, $\gamma_2 = 0.08 + 0.01 \sin t$, $a_1 = 0.4 + 0.05 \sin t$, $a_2 = 0.3 + 0.05 \sin t$, $d_1 = 0.5 + 0.1 \sin t$, $d_2 = 0.6 + 0.1 \sin t$, $\delta_1 = \delta_2 = 1.5$, $p_k^1 = p_k^2 = p_k^3 = 0.1$.

故此, 式 (4) 满足定理 2、3 的全部条件, 因此存在稳定的 2π -周期解. 其初始值 $x = (x_1(t), x_2(t), x_3(t)) = (0.6, 0.5, 0.4)$ 时的数值模拟结果见图 2.

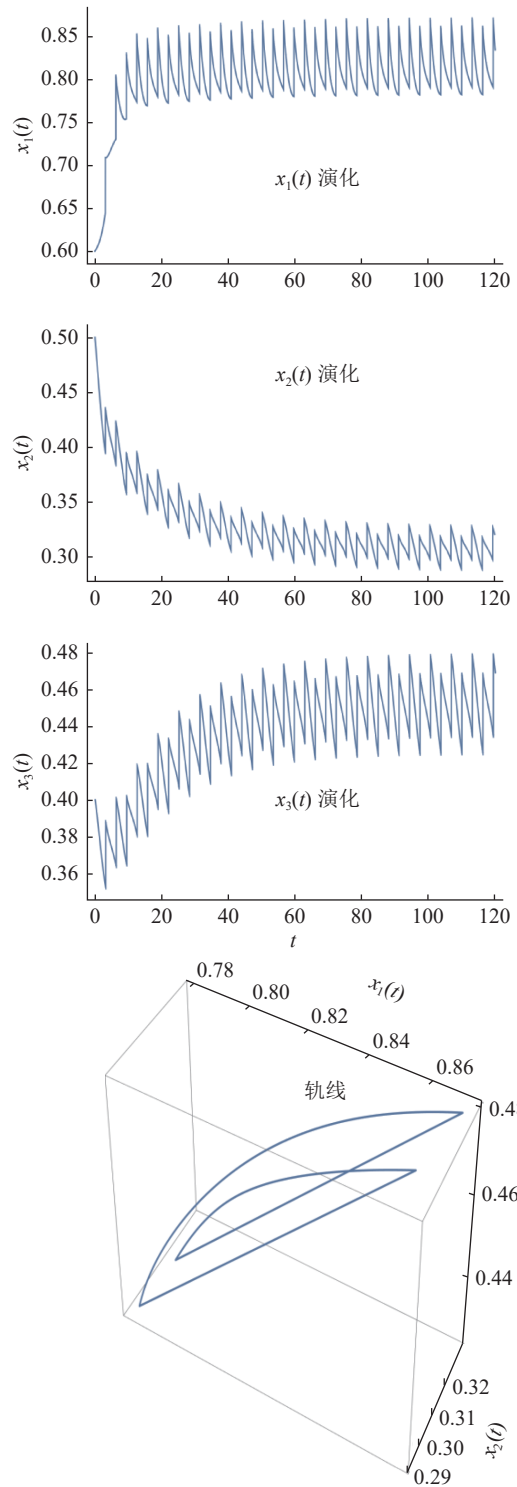


图 2 式 (4) 2π -周期解的 $x_1(t)$ 、 $x_2(t)$ 、 $x_3(t)$ 演化和轨线

从数值结果看, 脉冲效应对系统的影响效果显著. 当取 $t_k = 2k$ 时, 定理的条件 H_2) 不满足, 系统的周期解消失, 产生了类似文献 [22] 的奇怪吸引子 (图 3).

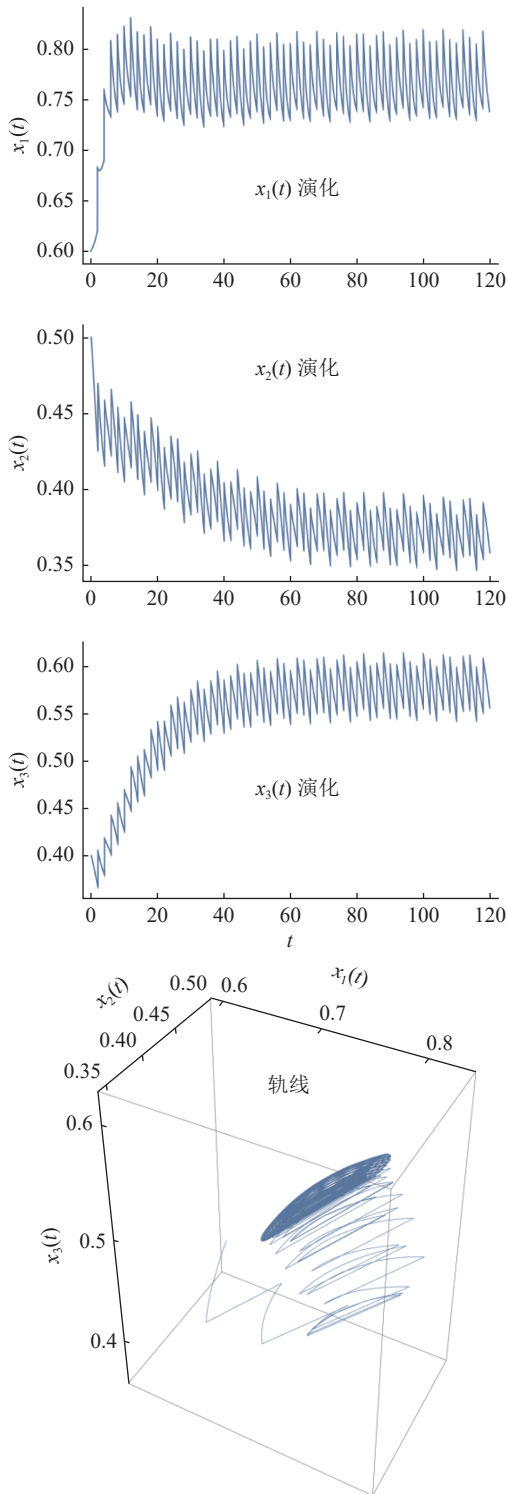


图 3 式 (4) 奇怪吸引子的 $x_1(t)$ 、 $x_2(t)$ 、 $x_3(t)$ 演化和轨线

6 结语

集团内捕食 (IGP) 系统因其既具有捕食关系又具有竞争关系而得到广泛的研究. 在基底食饵受强 Allee 效应的 IGP 食物网模型的基础上, 本文增加了周期系数和脉冲效应, 使得模型能刻画诸如气候、食物供应、交配习惯等按季节周期性变化和释放天敌、

喷洒农药、人工投放或捕获、生态环境剧变等短时扰动现象, 具有更好的适用性. 研究了所得模型周期解的持久性; 利用 Mawhin 重合度理论与分析工具, 研究了模型正周期解的存在性; 讨论了模型的稳定性. 得到了正周期解存在和全局稳定的充分条件. 这表明: 该 IGP 系统在一定条件下, 基底食饵、IG 捕食者、IG 食饵三者共存且呈周期性变化, 此时系统无某一物种灭绝, 能维持一定的生态平衡. 之后, 通过数值模拟对所得理论结果的有效性进行了验证. 模拟结果显示: 在满足定理的条件下, 模型最终趋于 1 个正的周期解, 且脉冲效应的作用十分明显.

7 参考文献

- [1] POLIS G A, MYERS C A, HOLT R D. The ecology and evolution of intraguild predation: potential competitors that eat each other[J]. *Annual Review of Ecology and Systematics*, 1989, 20(1): 297
- [2] HSU S B, RUAN S, YANG T H. Analysis of three species Lotka-Volterra food web models with omnivory[J]. *Journal of Mathematical Analysis & Applications*, 2015, 426(2): 659
- [3] RUAN S. Persistence and coexistence in zooplankton-phytoplankton-nutrient models with instantaneous nutrient recycling[J]. *Journal of Mathematical Biology*, 1993, 31(6): 633
- [4] HAUTIER L, MARTIN G S, CALLIER P, et al. Alkaloids provide evidence of intraguild predation on native coccinellids by *Harmonia axyridis* in the field[J]. *Biological Invasions*, 2011, 13(8): 1805
- [5] ANDERSON T L, SEMLITSCH R D. High intraguild predator density induces thinning effects on and increases temporal overlap with prey populations[J]. *Population Ecology*, 2014, 56(2): 265
- [6] RYAN D, CANTRELL R S. Avoidance behavior in intraguild predation communities: a cross-diffusion model[J]. *Discrete and Continuous Dynamical Systems: Series A*, 2014, 35(4): 1641
- [7] HAN R J, DAI B X, CHEN Y M. Pattern formation in a diffusive intraguild predation model with nonlocal interaction effects[J]. *AIP Advances*, 2019, 9(3): 35
- [8] RABAGO J F T, COLLERA J. Hopf bifurcation in a delayed intraguild predation model[J]. *Southeast Asian Bulletin of Mathematics*, 2018, 42(5): 691
- [9] KANG Y, WEDEKIN L. Dynamics of an intraguild predation model with generalist or specialist predator[J]. *Journal of Mathematical Biology*, 2013, 67(5): 1227
- [10] JI J P, WANG L. Competitive exclusion and coexistence in

- an intraguild predation model with Beddington-De Angelis functional response[J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2022, 107: 106192
- [11] TRIPATHI J P, MANDAL P S, POONIA A, et al. A widespread interaction between generalist and specialist enemies: the role of intraguild predation and Allee effect[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2021, 89(Part 1): 105
- [12] BEREĆ L, ANGULO E, COURCHAMP F. Multiple Allee effects and population management[J]. *Trends in Ecology & Evolution*, 2007, 22(4): 185
- [13] COURCHAMP F, BEREĆ L, GASCOIGNE J. Allee effects in ecology and conservation[M]. *Illustrated Edition*. New York: Oxford University Press, 2009
- [14] MOORING M S, FITZPATRICK T A, NISHIHARA T T, et al. Vigilance, predation risk, and the Allee effect in desert bighorn sheep[J]. *Journal of Wildlife Management*, 2004, 68(3): 519
- [15] PAL P J, SAHA T. Qualitative analysis of a predator-prey system with double Allee effect in prey[J]. *Chaos Solitons and Fractals*, 2015, 73(5): 36
- [16] BAI D Y, KANG Y, RUAN S G, et al. Dynamics of an intraguild predation food web model with strong Allee effect in the basal prey[J]. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 2021, 58: 103206
- [17] LASHMIKANTHAM V, BAINO D D, SIMENOV P. *Theory of impulsive differential equations*[M]. Singapore: World Scientific Publishing Company, 1989
- [18] WANG Q, DING M M, WANG Z J, et al. Existence and attractivity of a periodic solution for an n-species Gilpin-Ayala impulsive competition system[J]. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 2010, 11(4): 2675
- [19] ZHANG S W, TAN D J, CHEN L S. The periodic n-species Gilpin-Ayala competition system with impulsive effect[J]. *Chaos Solitons & Fractals*, 2005, 26(2): 507
- [20] FAN X M, JIANG F Q, ZHANG H N. Dynamics of multi-species competition-predator system with impulsive perturbations and Holling type III functional responses[J]. *Nonlinear Analysis*, 2011, 74(10): 3363
- [21] GAINES R E, MAWHIN J L. *Coincidence degree and nonlinear differential equations*[M]. New York: Springer-Verlag, 1977
- [22] ZHANG J, GUI Z J. Periodic solutions of nonautonomous cellular neural networks with impulses and delays[J]. *Nonlinear Analysis Real World Applications*, 2009, 10(3): 1891

Periodic solution for intraguild predation system with impulsive and strong Allee effect

AI Jiao WANG Kaihua

(School of Mathematics and Statistics, Hainan Normal University, 571158, Haikou, Hainan, China)

Abstract With strong Allee effect and a periodic coefficient, an impulsive intraguild predation model is established. Persistence of the model is proved. Existence of periodic solutions is studied using Mawhin's coincidence degree theory and analysis tools. The stability of periodic solutions is discussed. Sufficient conditions are obtained for existence and global stability of positive periodic solutions. Validity of theoretical results is verified by numerical simulations.

Keywords intraguild predation; impulses; Allee effect; periodic solution

【责任编辑: 陆有忠】