

非 Kerr 光纤中亮孤子的稳定性与相互作用

胡唯伊¹, 王运涛², 徐友才^{1,2}, 张世全¹

(1. 四川大学数学学院, 成都 610064;

2. 天府工程数值模拟与软件工程创新中心, 成都 610207)

摘要: 非 Kerr 光纤中的亮孤子的演化可以用具有三次-五次竞争非线性项的非线性薛定谔方程来描述. 为数值求解该方程的初值问题, 本文将无界区域截断为有界区域, 根据亮孤子在远场的渐近行为构造了合理的边界条件, 从而将该初值问题转换为初边值问题. 对这个初边值问题, 本文分别提出了 Crank-Nicolson 有限差分 (Crank-Nicolson Finite Difference, CNFD) 格式和时间分裂有限差分 (Time-Splitting Finite Difference, TSFD) 格式. 这两种格式在空间和时间维度上都具有二阶精度, 其中 CNFD 格式是全隐格式, 可以守恒离散能量和质量, TSFD 是线性隐式格式, 可以守恒离散质量. 在以数值算例验证两种方法的计算效率后, 本文用 TSFD 格式研究了非 Kerr 光纤中亮孤子的稳定性与相互作用.

关键词: 亮孤子; 薛定谔方程; 三次-五次非线性; 非 Kerr 光纤

中图分类号: O241.82 **文献标志码:** A **DOI:** 10.19907/j.0490-6756.2024.011001

Stability and interaction of bright solitons in non-Kerr fiber

HU Wei-Yi¹, WANG Yun-Tao², XU You-Cai^{1,2}, ZHANG Shi-Quan¹

(1. School of Mathematics, Sichuan University, Chengdu 610064, China;

2. Tianfu Engineering-Oriented Numerical Simulation & Software Innovation Center, Chengdu 610207, China)

Abstract: Dynamical behaviors of bright solitons can be described by the nonlinear Schrödinger equation (NLSE) with cubic-quintic competing nonlinear terms. In this paper, to numerically solve the initial value problem of the NLSE, two difference schemes are proposed. Firstly, we transfer the initial value problem into the initial value problem with boundary conditions, truncate the unbounded region into a bounded region and construct a reasonable boundary condition based on the asymptotic behaviors of bright solitons in the far field. Then we design the Crank-Nicolson finite difference (CNFD) and time-splitting finite difference (TSFD). The CNFD scheme is fully implicit and can conserve discrete energy and mass. Meanwhile, the TSFD scheme is linear implicit and can only conserve discrete mass. Finally, after the performance of the two schemes is compared by some examples, we explore the stability and interaction of bright solitons by using the TSFD scheme.

Keywords: Bright soliton; Schrödinger equation; Cubic-quintic nonlinearity; Non-Kerr fiber
(2010 MSC 65M60)

收稿日期: 2023-02-16

基金项目: 国家重大专项(GJXM92579); 四川省自然科学基金(2023NSFSC0075)

作者简介: 胡唯伊(1998-), 女, 硕士研究生, 主要研究方向为微分方程数值解. E-mail: huweiyi2020@163.com

通讯作者: 徐友才. E-mail: xyc@scu.edu.cn

1 引言

本文的目标是研究非 Kerr 光纤中的亮孤子演化. 此类亮孤子的演化可以用含三次-五次非线性项的薛定谔方程 (Cubic-Quintic Nonlinear Schrödinger Equation, CQ-NLSE) 的初值问题来描述, 即

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + (\alpha_1 |\psi|^2 - \alpha_2 |\psi|^4) \psi = 0 \quad (1)$$

$$\psi(x, 0) = \psi_0(x), \quad x \in \mathbf{R}, t \geq 0 \quad (2)$$

其中 t 代表时间, x 是空间坐标, ψ 是复值波函数.

$$\psi_b(x, t) = \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} \sqrt{\frac{4\omega}{\sqrt{1-\omega/\omega_0} \cosh(2\sqrt{\omega}(Ax - A^2vt)) + 1}} e^{i(0.5v(Ax - 0.5vAt) + \varphi_0 + A^2\omega t)} \quad (3)$$

其中 $A = \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}$, $\omega_0 = \frac{3}{16}$, $0 < \omega < \omega_0$, ω 是背景场频率, ω_0 是频率可以取到的上限.

CQ-NLSE 应用广泛, 特别是在非线性光学中. 该方程还具有多种重要的守恒性质, 其中的质量(或非线性光学中的波能)和能量(或非线性光学中的哈密顿量)守恒分别为

$$N(t) := \int_{\mathbf{R}} |\psi(x, t)|^2 dx, \quad t \geq 0 \quad (4)$$

$$E(t) := \int_{\mathbf{R}} \left[|\partial_x \psi(x, t)|^2 - \frac{1}{2} \alpha_1 |\psi(x, t)|^4 + \frac{1}{3} \alpha_2 |\psi(x, t)|^6 \right] dx \quad (5)$$

CQ-NLSE 的基本性质及其应用已有大量研究. 文献[6]研究了它的动态行为. 文献[7]将其用于描述模拟光脉冲材料系统中的传播现象. 文献[8]研究其行波解. 近年来, 许多有影响力的工作致力于在一定条件下构造 CQ-NLSE 的解析解, 如 Serkin 等的开创性工作[9].

一般情形的 CQ-NLSE 难以求得解析解, 从而寻找高效的数值解法成为关键. 文献[10]及其参考文献已经介绍了一些数值方法. 这些方法都需要取 Dirichlet 边界条件, 并在时间和空间方向上对截断问题进行离散. 在空间方向, 可以用有限差分法, 谱方法[11]及有限元法[12,13]等进行离散. 在时间方向可以用 Euler 方法[12], Crank-Nicolson 方法[14], 4 阶 Runge-Kutta 方法[15-17], Milne-Simpson[18]方法, Douglas[12]方法及时间分裂法[19]等进行离散.

该方程是一个完全可积系统[1]. 方程中的非线性项同时包含吸引势和排斥势, 描述了较小强度的自聚焦($\alpha_1 > 0$)和较大强度的自散焦($\alpha_2 > 0$)之间的竞争关系. 值得注意的是, CQ 非线性项可被用于刻画双掺杂光纤中的脉冲传播, 此时 CQ 参数的取值和符号可以根据两种掺杂剂的特性进行调整[2]. 此外, 在玻色-爱因斯坦凝聚态[3,4]中, CQ 非线性项可以描述原子间的二体和三体相互作用[5].

当 $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$ 时, 描述单个亮孤子演化的 CQ-NLSE 有如下的解析解:

为求解远场衰减为零的亮孤子的演化, 本文提出了两种数值方法. 在比较了它们的计算效率之后, 我们进一步研究了亮孤子的稳定性及相互作用.

后文的安排如下. 在第 2 节中我们提出两种差分格式, 分析两种格式的质量、能量守恒. 在第 3 节中, 我们通过数值算例来比较两种格式的效率. 在第 4 节中, 我们研究亮孤子的稳定性及相互作用. 最后, 在第 5 节中, 我们总结所得结果.

2 差分格式

2.1 边界条件

假设方程(1)的初值条件 ψ_0 满足

$$\psi_0(x) \rightarrow A_{\pm}^0, \quad x \rightarrow \pm\infty,$$

其中 A_{-}^0, A_{+}^0 是复值常数. 将上式代入方程(1), 分离变量后可得任意时刻的亮孤子的演化满足

$$\psi(x, t) \rightarrow A_{\pm}(t), \quad x \rightarrow \pm\infty, \quad t \geq 0.$$

将其代入(1)式得

$$i A'_{\pm}(t) = -(\alpha_1 |A_{\pm}(t)|^2 - \alpha_2 |A_{\pm}(t)|^4) A_{\pm}(t), \quad t > 0,$$

其中初值条件 $A_{\pm}(0) = A_{\pm}^0$. 上式乘上它的共轭, 再减去它的共轭, 则对 $\rho_{\pm}(t) := |A_{\pm}(t)|^2$ 有 $\rho'_{\pm}(t) = 0, t > 0$, 从而

$$\rho_{\pm}(t) = \rho_{\pm}(0) = |A_{\pm}^0|^2 \quad (6)$$

及

$$\psi(x, t) = A_{\pm}^0 e^{i(\alpha_1 |A_{\pm}^0|^2 - \alpha_2 |A_{\pm}^0|^4)vt/2}, \quad x \rightarrow \pm\infty, \quad t \geq 0.$$

因亮孤子解初始值在远场衰减为 0, 则初值 $A_{\pm}^0 =$

0, 从而 $\psi(x, t) \rightarrow 0, x \rightarrow \infty, t \geq 0$. 所以, 对任意时刻 t , 亮孤子解在远场都衰减为 0. 这样, 通过选择齐次 Dirichlet 边界条件, 将原问题在有界区间 (L_1, L_2) 上进行截断, 我们将原问题化为以下的初边值问题:

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + (\alpha_1 |\psi|^2 - \alpha_2 |\psi|^4) \psi = 0,$$

$$\psi(x, 0) = \psi_0(x), \psi(L_1, t) = \psi(L_2, t) = 0, t > 0$$

(7)

为了离散问题(7), 我们选择时间步长 $\tau > 0$, 网格大小 $h = \frac{L_2 - L_1}{J}$, 其中 J 为正偶数, 并将网格点和时间点表示为

$x_j := L_1 + jh, j = 0, \dots, J; t_n := n\tau, n = 0, 1, \dots$. 令 $\psi_j^n = \psi(t_n, x_j), j = 0, 1, \dots, J, n = 0, 1, 2, \dots$. 定义有限差分算子

$$\delta_x^+ \psi_j^n = \frac{\psi_{j+1}^n - \psi_j^n}{h},$$

$$\delta_x^2 \psi_j^n = \frac{\psi_{j+1}^n - 2\psi_j^n + \psi_{j-1}^n}{h^2},$$

及

$$\delta_t^+ \psi_j^n = \frac{\psi_j^{n+1} - \psi_j^n}{\tau}, 1 \leq j \leq J - 1.$$

2.2 Crank-Nicolson 有限差分格式

首先, 我们用 Crank-Nicolson 有限差分 (CNFD) 格式, 即用二阶中心差分格式对方程(7) 进行空间离散, 用 Crank-Nicolson 格式对其进行时间离散, 得到以下的差分格式:

$$i \delta_t^+ \psi_j^n = -\frac{1}{2} [(\delta_x^2 \psi^{n+1})_j + (\delta_x^2 \psi^n)_j] -$$

$$\frac{\psi_j^{n+1} + \psi_j^n}{2} G(|\psi_j^{n+1}|^2, |\psi_j^n|^2), \psi_j^0 = \psi_0(x_j),$$

$$1 \leq j \leq J - 1$$

(8)

其中

$$G(\rho_1, \rho_2) := \int_0^1 f(\theta \rho_1 + (1 - \theta) \rho_2) d\theta,$$

$$f(\rho) = \alpha_1 \rho - \alpha_2 \rho^2.$$

我们有

$$G(\rho_1, \rho_2) = \frac{1}{2} \alpha_1 \rho_1 + \frac{1}{2} \alpha_1 \rho_2 - \frac{1}{3} \alpha_2 \rho_1^2 -$$

$$\frac{1}{3} \alpha_2 \rho_2^2 - \frac{1}{3} \alpha_2 \rho_1 \rho_2.$$

采用 Dirichlet 边界条件, 我们将边界条件离散化为 $\psi_0^n = \psi_J^n = 0, n \geq 0$.

CNFD 离散差分格式具有如下的守恒性质:

定理 2.1 CNFD 格式(8) 守恒离散质量与能

量, 即 $N^n \equiv N^0, E^n \equiv E^0$, 这里的离散质量和离散能量的定义为

$$N^n := h \sum_{j=0}^{J-1} |\psi_j^n|^2, n \geq 0$$

(9)

$$E^n := h \sum_{j=0}^{J-1} [|\delta_x^+ \psi_j^n|^2 - \frac{1}{2} \alpha_1 |\psi_j^n|^4 +$$

$$\frac{1}{3} \alpha_2 |\psi_j^n|^6]$$

(10)

证明 (i) 对于质量守恒, 在(8) 式两边同时乘以 $\bar{\psi}_j^{n+\frac{1}{2}} := \frac{1}{2} (\bar{\psi}_j^{n+1} + \bar{\psi}_j^n)$ 可得

$$i \bar{\psi}_j^{n+\frac{1}{2}} \delta_t^+ \psi_j^n = -\frac{1}{2} \bar{\psi}_j^{n+\frac{1}{2}} \delta_x^2 (\psi_j^{n+1} + \psi_j^n) -$$

$$\bar{\psi}_j^{n+\frac{1}{2}} \psi_j^{n+\frac{1}{2}} G(|\psi_j^{n+1}|^2, |\psi_j^n|^2),$$

其中, 对于任意 $n \geq 0, \bar{\psi}_j^n$ 为 ψ_j^n 的共轭, 其共轭形式为

$$-i \psi_j^{n+\frac{1}{2}} \delta_t^+ \bar{\psi}_j^n = -\frac{1}{2} \psi_j^{n+\frac{1}{2}} \delta_x^2 (\bar{\psi}_j^{n+1} + \bar{\psi}_j^n) -$$

$$\bar{\psi}_j^{n+\frac{1}{2}} \psi_j^{n+\frac{1}{2}} G(|\psi_j^{n+1}|^2, |\psi_j^n|^2).$$

以上两式相减, 得

$$i \delta_t^+ |\psi_j^n|^2 = \frac{1}{4} [(\psi_j^{n+1} + \psi_j^n) \delta_x^2 (\bar{\psi}_j^{n+1} + \bar{\psi}_j^n) -$$

$$(\bar{\psi}_j^{n+1} + \bar{\psi}_j^n) \delta_x^2 (\psi_j^{n+1} + \psi_j^n)].$$

所以

$$\delta_t^+ \sum_{j=0}^{J-1} (|\psi_j^n|^2 + |\psi_{j+1}^n|^2) =$$

$$-i \sum_{j=0}^{J-1} (\psi_j^{n+\frac{1}{2}} \delta_x^2 \bar{\psi}_j^{n+\frac{1}{2}} - \bar{\psi}_j^{n+\frac{1}{2}} \delta_x^2 \psi_j^{n+\frac{1}{2}} +$$

$$\psi_j^{n+\frac{1}{2}} \delta_x^2 \bar{\psi}_{j+1}^{n+\frac{1}{2}} - \bar{\psi}_{j+1}^{n+\frac{1}{2}} \delta_x^2 \psi_j^{n+\frac{1}{2}}) = 0.$$

由边界条件 $\psi_0^n = \psi_J^n = 0$ 得到 $\delta_t^+ N^n = 0$, 由此可推得

$$N^{n+1} = h \sum_{j=0}^{J-1} |\psi_j^{n+1}|^2 = h \sum_{j=0}^{J-1} |\psi_j^n|^2 = N^n, n \geq 0.$$

(ii) 对于能量守恒, 在(8) 式两边同时乘以 $\bar{\psi}_j^n$ 得

$$i \delta_t^+ \bar{\psi}_j^n \delta_t^+ \psi_j^n = -\frac{1}{2} \delta_t^+ \bar{\psi}_j^n \delta_x^2 (\psi_j^{n+1} + \psi_j^n) -$$

$$\delta_t^+ \bar{\psi}_j^n \psi_j^{n+\frac{1}{2}} G(|\psi_j^{n+1}|^2, |\psi_j^n|^2).$$

其共轭形式为

$$-i \delta_t^+ \psi_j^n \delta_t^+ \bar{\psi}_j^n = -\frac{1}{2} \delta_t^+ \psi_j^n \delta_x^2 (\bar{\psi}_j^{n+1} + \bar{\psi}_j^n) -$$

$$\delta_t^+ \psi_j^n \bar{\psi}_j^{n+\frac{1}{2}} G(|\psi_j^{n+1}|^2, |\psi_j^n|^2).$$

以上两式相加, 得

$$\delta_x^2 \psi_j^{n+\frac{1}{2}} \delta_t^+ \bar{\psi}_j^n + \delta_x^2 \bar{\psi}_j^{n+\frac{1}{2}} \delta_t^+ \psi_j^n =$$

$$-\frac{\alpha_1}{2\tau} (|\psi_j^{n+1}|^4 - |\psi_j^n|^4) + \frac{\alpha_2}{3\tau} (|\psi_j^{n+1}|^6 - |\psi_j^n|^6) \cdot$$

$$(|\psi_j^{n+1}|^4 + |\psi_j^n|^4 + |\psi_j^n|^2 |\psi_j^{n+1}|^2) =$$

$$-\frac{\alpha_1}{2\tau} (|\psi_j^{n+1}|^4 - |\psi_j^n|^4) + \frac{\alpha_2}{3\tau} (|\psi_j^{n+1}|^6 - |\psi_j^n|^6).$$

所以

$$\delta_t^+ \left(-\frac{1}{2} \alpha_1 |\psi_j^n|^4 + \frac{1}{3} \alpha_2 |\psi_j^n|^6 \right) = \delta_x^2 \psi_j^{n+\frac{1}{2}} \delta_t^+ \bar{\psi}_j^n + \delta_x^2 \bar{\psi}_j^{n+\frac{1}{2}} \delta_t^+ \psi_j^n.$$

简单计算可得

$$\delta_t^+ \sum_{j=0}^{J-1} \left(-\frac{\alpha_1}{4} |\psi_j^n|^4 - \frac{\alpha_1}{4} |\psi_{j+1}^n|^4 + \frac{\alpha_2}{6} |\psi_j^n|^6 + \frac{\alpha_2}{6} |\psi_{j+1}^n|^6 \right) = - \sum_{j=0}^{J-1} \delta_t^+ |\delta_x^+ \psi_j^n|^2.$$

由边界条件 $\psi_0^n = \psi_J^n = 0$ 可得

$$\delta_t^+ \sum_{j=0}^{J-1} \left(-\frac{\alpha_1}{2} |\psi_j^n|^4 + \frac{\alpha_2}{3} |\psi_j^n|^6 \right) = - \sum_{j=0}^{J-1} \delta_t^+ |\delta_x^+ \psi_j^n|^2.$$

由此可推出

$$E^{n+1} = h \sum_{j=0}^{J-1} \left[|\delta_x^+ \psi_j^{n+1}|^2 - \frac{\alpha_1}{2} |\psi_j^{n+1}|^4 + \frac{\alpha_2}{3} |\psi_j^{n+1}|^6 \right] = h \sum_{j=0}^{J-1} \left[|\delta_x^+ \psi_j^n|^2 - \frac{\alpha_1}{2} |\psi_j^n|^4 + \frac{\alpha_2}{3} |\psi_j^n|^6 \right] = E^n.$$

证毕.

2.3 时间分裂有限差分格式

在时间分裂有限差分(TSFD)格式中,我们先用 Strang 时间分裂法将方程(7)的线性部分与非线性部分分开计算,然后利用 CNFD 方法离散线性部分,具体过程如下.

从时刻 $t = t_n$ 到 $t = t_{n+1}$,先对长度为 τ 的时间跨度求解:

$$i \partial_t \psi(x, t) = -(\alpha_1 |\psi(x, t)|^2 - \alpha_2 |\psi(x, t)|^4) \psi(x, t), L_1 \leq x \leq L_2, t_n \leq t \leq t_{n+1} \quad (11)$$

然后,对于同一时间跨度 τ 求解

$$i \partial_t \psi(x, t) = -\partial_{xx} \psi(x, t) \psi(L_1, t) = \psi(L_2, t) = 0, L_1 \leq x \leq L_2, t_n \leq t \leq t_{n+1} \quad (12)$$

对方程的非线性部分,即(11)式中,由于密度 $|\psi(x, t)|^2$ 不变(参见(6)式),所以我们令

$$|\psi^n|^2 = |\psi(x, t_n)|^2.$$

容易求得

$$\psi(x, t) = e^{i\langle t-t_n \rangle \langle \alpha_1 |\psi^n|^2 - \alpha_2 |\psi^n|^4 \rangle} \psi(x, t_n),$$

$$L_1 \leq x \leq L_2, t_n \leq t \leq t_{n+1} \quad (13)$$

对于方程(7)的线性部分,即(12)式,我们通过 CNFD 方法将其离散化.这样,方程(7)的全离散格式为:

$$\begin{cases} \psi_j^{(1)} = e^{\frac{i\tau}{2} (\alpha_1 |\psi_j^n|^2 - \alpha_2 |\psi_j^n|^4)} \psi_j^n, \\ i \frac{\psi_j^{(2)} - \psi_j^{(1)}}{\tau} = -\frac{1}{2} \delta_x^2 (\psi_j^{(2)} + \psi_j^{(1)}), \\ \psi_j^{n+1} = e^{\frac{i\tau}{2} (\alpha_1 |\psi_j^{(2)}|^2 - \alpha_2 |\psi_j^{(2)}|^4)} \psi_j^{(2)}, \\ 1 \leq j \leq J-1, n \geq 0 \end{cases} \quad (14)$$

中间步骤的边界条件为 $\psi_0^{(2)} = \psi_J^{(2)} = 0$.

TSFD 离散格式具有如下守恒性质.

定理 2.2 格式(14)守恒离散质量 $N^n \equiv N^0$.

证明 在格式(14)中的第二式

$$i \frac{\psi_j^{(2)} - \psi_j^{(1)}}{\tau} = -\frac{1}{2} \delta_x^2 (\psi_j^{(2)} + \psi_j^{(1)}), \quad 0 \leq j \leq J, n \geq 0$$

两边同时乘以 $\frac{1}{2} (\bar{\psi}_j^{(2)} + \bar{\psi}_j^{(1)})$,得

$$\frac{i}{2} \frac{|\psi_j^{(2)}|^2 - |\psi_j^{(1)}|^2}{\tau} = -\frac{1}{4} (\bar{\psi}_j^{(2)} + \bar{\psi}_j^{(1)}) \delta_x^2 (\psi_j^{(2)} + \psi_j^{(1)}).$$

上式取共轭,有

$$-\frac{i}{2} \frac{|\psi_j^{(2)}|^2 - |\psi_j^{(1)}|^2}{\tau} = -\frac{1}{4} (\psi_j^{(2)} + \psi_j^{(1)}) \delta_x^2 (\bar{\psi}_j^{(2)} + \bar{\psi}_j^{(1)}).$$

两式相减得

$$i \frac{|\psi_j^{(2)}|^2 - |\psi_j^{(1)}|^2}{\tau} = \frac{1}{4} [(\psi_j^{(2)} + \psi_j^{(1)}) \delta_x^2 (\bar{\psi}_j^{(2)} + \bar{\psi}_j^{(1)}) - (\bar{\psi}_j^{(2)} + \bar{\psi}_j^{(1)}) \delta_x^2 (\psi_j^{(2)} + \psi_j^{(1)})].$$

所以

$$\frac{1}{\tau} \sum_{j=0}^{J-1} (|\psi_j^{(2)}|^2 + |\psi_{j+1}^{(2)}|^2 - |\psi_j^{(1)}|^2 - |\psi_{j+1}^{(1)}|^2) = 0.$$

进而有

$$\sum_{j=0}^{J-1} (|\psi_j^{(2)}|^2 + |\psi_{j+1}^{(2)}|^2) = \sum_{j=0}^{J-1} (|\psi_j^{(1)}|^2 + |\psi_{j+1}^{(1)}|^2).$$

由格式(14)中的第一和第三式得

$$|\psi_j^{(1)}|^2 = |\psi_j^n|^2, |\psi_j^{(2)}|^2 = |\psi_j^{n+1}|^2.$$

结合边界条件可得

$$\begin{aligned}
 N^{n+1} &= h \sum_{j=0}^{J-1} |\psi_j^{n+1}|^2 = \\
 h \sum_{j=0}^{J-1} |\psi_j^{(2)}|^2 &= h \sum_{j=0}^{J-1} |\psi_j^{(1)}|^2 = \\
 h \sum_{j=0}^{J-1} |\psi_j^n|^2 &= N^n, n \geq 0.
 \end{aligned}$$

证毕.

3 差分格式的计算效率

为比较两种差分格式, 我们取 $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 1, L_1 = -100, L_2 = 100, \varphi_0 = 0.2\pi, \omega = 0.2\omega_0, v = 0.1, \omega_0 = 3/16$. 本文的所有计算均在型号为 Intel(R) Xeon(R) Gold 6132 CPU @ 2.60 GHz 的服务器上进行.

首先, 我们对 CNFD 格式和 TSFD 格式的计算精度. 为了比较误差和收敛阶, 我们将初值条件设定为 $\psi_0(x) = \psi_0(x, t=0)$. 此外, 为了量化数值解的精度, 我们使用数值解 ψ_j^n 和精确解 $\psi_b(x_j, t_n)$ 之间的 l^∞ 范数误差

$$e_\infty(t_n) := \max_{0 \leq j \leq J} |\psi_b(x_j, t_n) - \psi_j^n|, n \geq 0 \tag{15}$$

计算结果参见表 1 和表 2.

表 1 示出了计算时长 $t_n = T = 30$ 下两种格式在不同的空间网格 h 和时间步长 τ 下的空间和时间误差, 其中表格的上半部分是非常小的时间步长 $\tau = 10^{-3}$ 时在不同网格大小 h 下的空间误差分析, 表格的下半部分是小的网格尺寸 $h = 0.01$ 时在不同时间步长 τ 下进行的时间误差分析.

表 1 两种差分格式的时空误差

Tab.1 Spatial and temporal errors for the two difference schemes

h	$h_0=2$	h_0	h_0	h_0	h_0
CNFD	1.02E-2	2.4E-3	6.01E-4	1.50E-4	3.75E-5
TSFD	1.02E-2	2.4E-3	6.01E-4	1.50E-4	3.75E-5
τ	$\tau_0=2$	τ_0	τ_0	τ_0	τ_0
CNFD	2.52E-4	6.29E-5	1.56E-5	3.75E-6	8.00E-7
TSFD	6.05E-4	1.51E-4	3.78E-5	9.56E-6	2.54E-6

分析表 1 可知:

(i) CNFD 格式和 TSFD 格式在空间和时间上都是二阶精度的;

(ii) 一般来说, 对于固定的网格尺寸 h , CNFD 和 TSFD 格式具有相同的空间离散误差;

(iii) 对于固定的时间步长 τ , TSFD 格式的时间离散误差小于 CNFD 格式, 即 TSFD 格式具有更高精度.

表 2 示出了计算时长 $t_n = T = 30$ 下两种格式在不同的空间网格 h 和时间步长 τ 下的计算耗时, 其中表格的上半部分是时间步长 $\tau = 10^{-3}$ 时在不同网格大小 h 下进行的比较, 下半部分是网格尺寸 $h = 0.01$ 时在不同时间步长 τ 下进行的比较.

表 2 两种差分格式的计算耗时

Tab.2 Time consumptions for the two difference schemes

h	$h_0=2$	h_0	h_0	h_0	h_0
CNFD	18.19	36.92	1.38E+3	1.81E+3	2.82E+3
TSFD	4.51	8.22	279.78	540.17	586.56
τ	$\tau_0=2$	τ_0	τ_0	τ_0	τ_0
CNFD	10.05	16.87	55.44	98.12	171.36
TSFD	1.69	2.75	5.98	11.65	23.36

分析表 2 可知, 在相同的空间网格和时间步长下, CNFD 格式的计算时间明显多于 TSFD 格式, 计算效率较低. 因此, 在很小的空间网格尺寸下, 从计算效率方面考虑应选择 TSFD 格式.

为研究两种差分格式的守恒性, 我们用两种差分格式计算了质量和能量与其初值的差值, 其中网格大小取 $h = 0.1$, 时间步长取 $\tau = 0.1$, 结果见图 1 和图 2. 可以看到, 所得结果验证了上节中的理论分析: CNFD 格式同时守恒质量和能量, TSFD 格式仅守恒质量, 不守恒能量. 因此, 在守恒性方面, CNFD 格式更好.

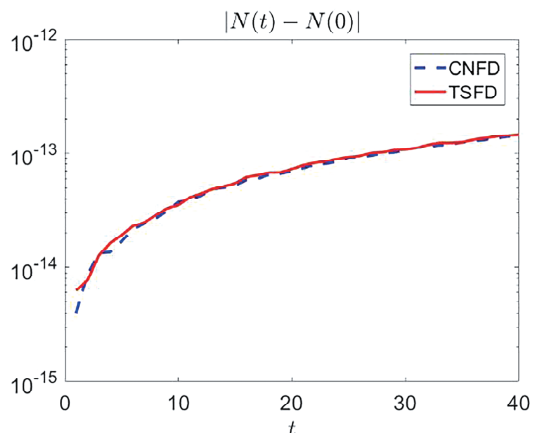


图 1 两种格式计算的绝对质量差值
Fig.1 Absolute value of the mass differences calculated by the two schemes

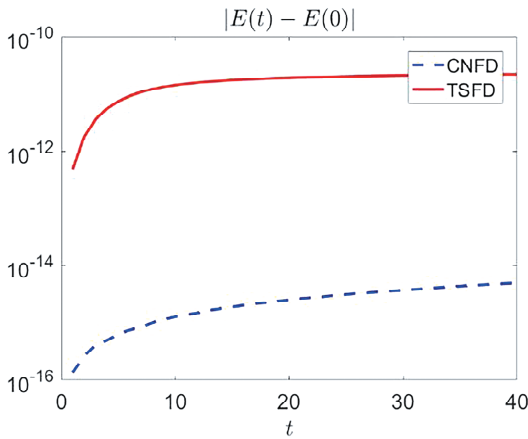


图 2 差分格式计算出的绝对能量差值

Fig. 2 Absolute value of the energy differences calculated by the two schemes

4 亮孤子的稳定性及相互作用

本节中我们利用 TSFD 格式对亮孤子的稳定性和两个亮孤子间的相互作用进行研究.

首先,为研究亮孤子的稳定性,我们选择初始条件为具有扰动的亮孤子 $\psi_0(x-x_0)$, 其中

$$\psi_0(x) = \sqrt{\frac{4\omega}{1 + \sqrt{1 - \frac{\omega}{\omega_0}} \cosh(2\sqrt{\omega}\alpha x)}} e^{i(0.5\omega x + \varphi_0)} + \epsilon e^{-(x+x_1)^2} \quad (16)$$

$x_0 = 50, x_1 = 10$. 为了在区间 $\Omega = [L_1, L_2]$ 上数值求解,我们取网格大小 $h = 0.01$, 时间步长 $\tau = 10^{-3}$.

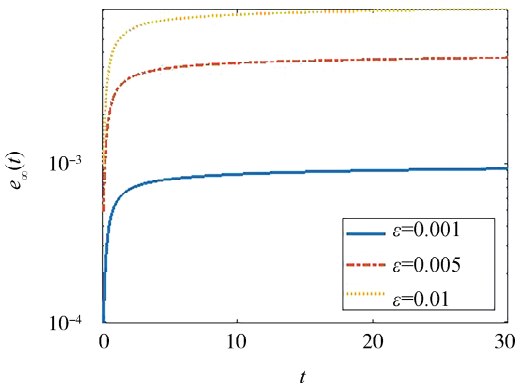


图 3 不同初值扰动下的误差演化

Fig. 3 Evolution of the errors for different perturbations of the initial value

图 3 示出了方程 (7) 的数值解与其对应的解析解在参数扰动下的误差随时间的演化 $e_\infty(t)$. 可以看到,数值解是动态稳定的.

其次,为研究两个亮孤子间的相互作用,我们取初始条件为

$$\psi_0(x) = \sqrt{\frac{4\omega}{1 + \sqrt{1 - \frac{\omega}{\omega_0}} \cosh(2\sqrt{\omega}\alpha(x+x_0))}} e^{i(0.5v_1\alpha(x+x_0) + \varphi_0)} + \sqrt{\frac{4\omega}{1 + \sqrt{1 - \frac{\omega}{\omega_0}} \cosh(2\sqrt{\omega}\alpha(x-x_0))}} e^{i(0.5v_2\alpha(x-x_0) + \varphi_0)} \quad (17)$$

其中 $x_0 > 0$ 被设定为使得两个亮孤子最初以 $x_0 = \pm x_0$ 为中心, $v_1 \geq 0$ 和 $v_2 \leq 0$ 分别是左行孤子和右行孤子的速度. 我们在 $\Omega = [L_1, L_2]$ 上数值地求解该问题,网格尺寸取 $h = 0.05$, 时间步长取 $\tau = 0.05$. 我们四个算例来研究不同速度和初始间隔距离下的亮孤子之间的相互作用. 对于快速移动的亮孤子,取

- (a) $v_1 = 3, v_2 = -3, x_0 = 10$;
- (b) $v_1 = 3, v_2 = -3, x_0 = 50$.

对于慢速移动的亮孤子,取

- (c) $v_1 = 1, v_2 = -1, x_0 = 10$;
- (d) $v_1 = 1, v_2 = -1, x_0 = 50$.

所得结果见图 4.

图 4 展示了两个亮孤子的碰撞过程,可以得出以下结论:

- (1) 两个最初分离良好的亮孤子的相互作用是吸引的,相互作用后两个孤子完全分离;
- (2) 在两个亮孤子相遇前或完全分离后,两个亮孤子匀速运动,密度分布均匀,且在交互过程中会产生振荡,速度越大振荡越强.

5 结 论

本文对具有三次-五次非线性项的非线性薛定谔方程初边值问题提出了两种差分格式,并对比了它们的计算效率. CNFD 格式在时间和空间方向都具有二阶精度. 因其是全隐格式,计算过程更耗时,计算量更大. TSFD 格式在时间和空间方向也都具有二阶精度. 对于固定的网格尺寸 h , 时间步长 τ 取不同值时 TSFD 格式的离散误差小于 CNFD 格式,因而 TSFD 格式在时间维度上具有更高精度. 同时,因 TSFD 格式是线性隐式格式,计算效率较高,计算时间明显低于 CNFD 格式,因而计算效率更好. 另一方面, CNFD 格式可以守恒离散能量和质量而 TSFD 格式只守恒离散质量,所以在守恒性上 CNFD 格式更好.

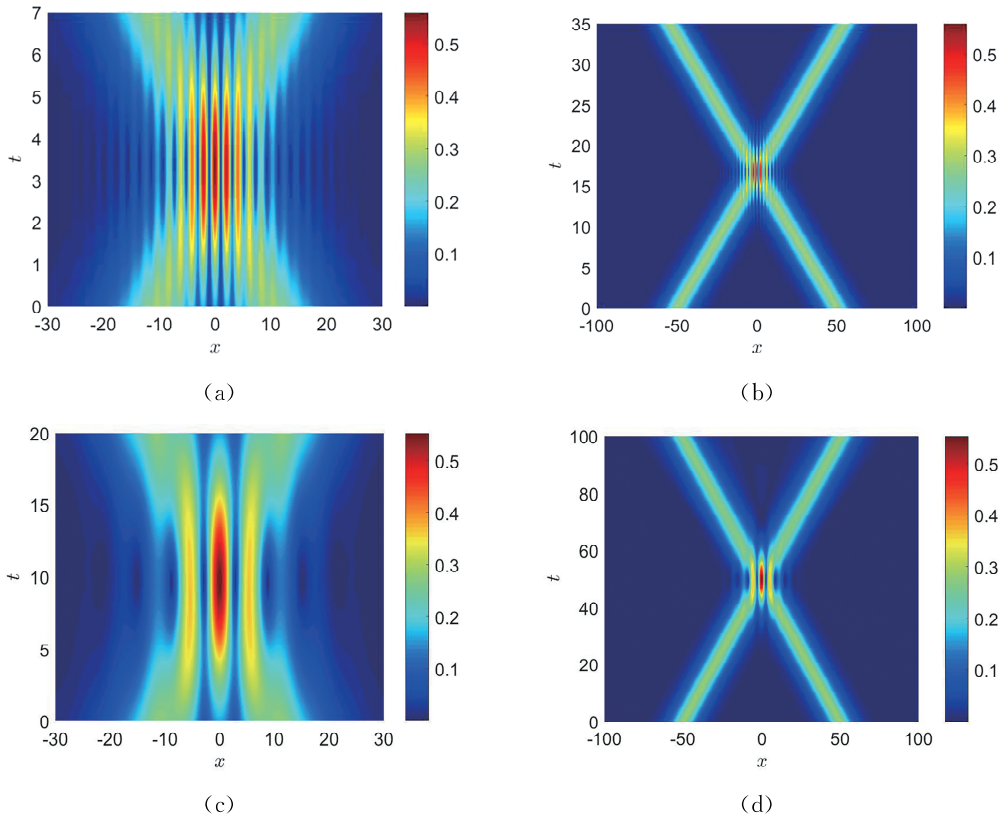


图 4 亮孤子密度的演化行为
Fig. 4 Dynamical behaviors of the density of bright solitons

然后,我们利用 TSFD 格式研究了非克尔光纤中亮孤子的稳定性与相互作用. 结果表明:首先,亮孤子的演化是动态稳定的;其次,两个亮孤子在碰撞后可以完全分离,分离后仍保持匀速运动,密度分布均匀,且亮孤子的速度越快则碰撞后产生的振荡越强烈.

参考文献:

- [1] Pelinovsky D, Kivshar Y, Afanasjev V. Instability-induced dynamics of dark solitons [J]. *Phys Rev*, 1996, 54: 2015.
- [2] Khater A, Callebaut D, Seadawy A. General soliton solutions of an N -dimensional complex Ginzburg-Landau equation [J]. *Phys Scr*, 2000, 62: 353.
- [3] Khater A, Seadawy A, Helal M. General soliton solutions of an N -dimensional nonlinear Schrödinger equation [J]. *Nuov Ciment B*, 2000, 115: 1303.
- [4] Khater A, Callebaut D, Helal M, *et al.* Variational method for the nonlinear dynamics of an elliptic magnetic stagnation line [J]. *J Phys B*, 2006, 39: 237.
- [5] Seadawy A, Sayed A. Soliton solutions of cubic-quintic nonlinear Schrödinger and variant Boussinesq equations by the first integral method [J]. *Filomat*, 2017, 31: 4199.
- [6] Kim W, Moon H. Dark and bright soliton exchange in a nonlinear dispersive medium [J]. *J Korean Phys Soc*, 2001, 38: 558.
- [7] Youssoufa M, Dafounansou O, Mohamadou A. Bright, dark and kink solitary waves in a cubic-quintic-septic-nonline medium, nonlinear optics—from solitons to similaritons [M]. Britain: Intech Open, 2020.
- [8] Kudryashov N. Traveling wave solutions of the generalized nonlinear Schrödinger equation with cubic-quintic nonlinearity [J]. *Optik*, 2019, 188: 27.
- [9] Serkin V, Belyaeva T, Alexandrov I, *et al.* Optical pulse and beam propagation (III) [J]. *SPIE Proc*, 2001, 4271: 292.
- [10] Antoine X, Bao W Z, Besse C. Computational methods for the dynamics of the nonlinear Schrödinger/Gross-Pitaevskii equations [J]. *Comput Phys Commun*, 2013, 184: 2621.
- [11] Shen J, Tang T, Wang L. Spectral methods: algorithms, analysis and applications [M]. Berlin: Springer, 2011.
- [12] Seshu P. Textbook of finite element analysis [M].

- New Deli: PHI Learning Private Ltd, 2012.
- [13] Li X, Luo J F, Feng M F. A nonlinear local projection-based finite element method for unsteady Navier-Stokes equations [J]. *J Sichuan Univ (Nat Sci Ed)*, 2021, 58: 031002. [李西, 罗加福, 冯民富. 非定常 Navier-Stokes 方程的一种非线性局部投影稳定化有限元方法[J]. *四川大学学报(自然科学版)*, 2021, 58: 031002.]
- [14] Delfour M, Fortin M, Payr G. Finite-difference solutions of a non-linear Schrödinger equation [J]. *J Comput Phys*, 1981, 44:277.
- [15] Akrivis G. Finite difference discretization of the cubic Schrödinger equation [J]. *IMA J Numer Anal*, 1993, 13: 115.
- [16] Akrivis G, Dougalis V A, Karakashian O. Solving the systems of equations arising in the discretization of some nonlinear PDE's by implicit Runge-Kutta methods [J]. *ESAIM Math Model Num*, 1997, 31: 251.
- [17] Karakashian O, Akrivis G, Dougalis V. On optimal order error estimates for the nonlinear Schrödinger equation [J]. *SIAM J Numer Anal*, 1993, 30: 377.
- [18] Loscalzo F, Talbot T. Spline function approximations for solutions of ordinary differential equations [J]. *SIAM J Numer Anal*, 1967, 4: 433.
- [19] McLachlan R, Quispel G. Splitting methods [J]. *Acta Numer*, 2002, 11: 341.