用 Tikhonov 正则化方法同时反演对流扩散方程的对流速度和源函数

周子融，杨　柳，王清艳
(兰州交通大学数理学院，兰州 730070)

摘　要：在给定两个附加观测数据的条件下，本文基于 Tikhonov 正则化方法研究了对流扩散方程的对流速度和源函数的同时反演问题. 鉴于原问题是一个初始值非零的对流扩散方程，本文通过将初始值转化为源项得到了一个组合源项，首先将原问题转化为一个具有齐次条件的对流扩散问题. 由于所得问题是不适定的，本文进而利用 Tikhonov 正则化方法构建了相应的极小化目标泛函，得到了问题最优解的存在性和应满足的必要条件. 最后，对终端时刻较小的特殊情形，本文证明了最优解的唯一性和稳定性.

关键词：对流扩散方程；反问题；源函数；Tikhonov 正则化方法
中图分类号：O175.23　　**文献标志码**：A　　DOI：10.19907/j.0490-6756.2024.011003

Simultaneously inverting the convection velocity and source function of convection-diffusion equations by using the Tikhonov regularization method

ZHOU Zi-Rong, *YANG Liu*, *WANG Qing-Yan*
(College of Mathematics and Physics, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou 730070, China)

Abstract: In this paper, given additionally two observation data, the inverse problem of simultaneously inverting the convection velocity and source function of the convection diffusion equations is studied. The original problem belongs to a class of convection-diffusion equations with non-zero initial value. First, by transforming the information of the initial value into a source function and then combining it with the source function, we transform the original problem into a convection-diffusion problem with homogeneous conditions. Further, to handle the ill-posedness of the new problem, we construct the corresponding minimization objective functional by using the Tikhonov regularization method, and the existence and necessary conditions for the optimal solution are discussed. Finally, for the special case of small terminal time, the uniqueness and stability of the optimal solution are obtained.

Keywords: Convection-diffusion equation; Inverse problem; Source function; Tikhonov regularization method

1　引　言

对流扩散方程反问题在环境科学、能源开发等领域有着广泛应用. 例如，在对医疗或化学试剂泄露造成的污染进行快速跟踪、预防和处置时，污染物的对流速度、污染源的位置及强度信息非常关

收稿日期：2023-06-02
基金项目：国家自然科学基金(61663018，11961042)；甘肃省自然科学基金(22JR5RA341)
作者简介：周子融(1998－)，女，山东菏泽人，硕士研究生，主要研究方向为数学物理反问题. E-mail：zhouzirong2020@163.com
通讯作者：杨柳. E-mail：l_yang218@163.com

键,而要取得这些信息就需要求解对流扩散方程(模型)的反问题.

本文旨在利用 Tikhonov 正则化方法研究对流扩散方程的反问题. Tikhonov 正则化方法是研究不适定问题最重要的正则化方法之一[1]. 早在上世纪八十年代,人们就已经开始用 Tikhonov 正则化方法研究不适定性反问题[1-5]. 文献[6]基于优化方法将原问题转化为最优控制问题,重构了热传导方程中的初始温度和热辐射系数的反问题. 文献[7]在终端时刻 t_f 和时刻 $t_1\in(0,t_f)$ 同时反演了传热系数和初始温度. 文献[8]则基于有限元方法在小分区域 ω 上得到附加的观测噪声数据,并同时反演了对流扩散方程的对流速度和源函数.

受文献[8]的启发,本文用 Tikhonov 正则化方法,以两个时刻的观测数据为附加条件,同时反演对流扩散方程的对流速度和源函数. 这是一个全新的反问题,少有人研究. 本研究的难点在于这是一个多参数反演问题,其中的对流速度项是一个二维矢量函数,其分量是两个未知函数,加上源函数后共有三个未知函数待确定,理论分析较复杂.

2 最优解的存在性

考虑如下反问题(P1):

$$\begin{cases} u_t-\Delta u+\nabla\cdot(uv(x))=f(x)R(x,t), \\ \quad (x,t)\in Q=\Omega\times(0,T], \\ u(x,t)=0,\ (x,t)\in\partial\Omega\times(0,T], \\ u(x,0)=\varphi(x),\ x\in\Omega \end{cases} \tag{1}$$

其中 $\Omega\subset\mathbf{R}^2$ 是一个具有 C^2 类边界 $\partial\Omega$ 的有界开连通域,$x=(x_1,x_2)$ 表示 Ω 中的任意点,$\varphi(x)\in H_0^2(\Omega)$ 为 u 在 $t=0$ 时的初值,$f(x)R(x,t)$ 为热源函数,且 $f(x)\in L^2(\Omega)$,$R(x,t)\in L^2(0,T;L^\infty(\Omega))$. 此外,系数 $v(x)=(v_1(x),v_2(x))$ 是对流速度,其可允许集假设为

$$A_1=\{v=(v_1,v_2)\in H^1(\Omega)^2: \underline{v_1}\leqslant v_1(x)\leqslant \overline{v_1}, \underline{v_2}\leqslant v_2(x)\leqslant\overline{v_2}\ \text{a. e. in } \Omega\}.$$

设 u 为方程(1)的解,$R(x,t)$,$\varphi(x)$ 已知,给定 u 在 $\Omega\times(0,T]$ 上的两个测量数据 $g_1(x)$,$g_2(x)$,我们试图同时反演对流速度 $v(x)$ 和源函数 $f(x)$,其中

$$u(x,T_1)=g_1(x),\ u(x,T)=g_2(x),\quad T_1\in(0,T),x\in\Omega \tag{2}$$

理论上,如果条件(2)是精确给出的,则根据方程(1)和条件(2)可以同时反演未知函数对(v,f). 然而在实际应用中,由于测量误差等因素的影响,这却难以做到. 实际测得的数据(g_1^δ,g_2^δ)总是不可避免地含有噪声. 本文中我们总假设(g_1^δ,g_2^δ)满足

$$\|g_1^\delta-g_1\|_{L^2(\Omega)}\leqslant\delta,\ \ \|g_2^\delta-g_2\|_{L^2(\Omega)}\leqslant\delta \tag{3}$$

其中 δ 为噪声水平.

假设 $\varphi(x)$,$f(x)$ 和 $R(x,t)$ 足够光滑,且满足一些相容性条件,如齐次边界条件、角点条件,等. 令 $w(x,t)=u(x,t)-\varphi(x)$. 方程(1)可转化为以下的等价形式:

$$\begin{cases} w_t-\Delta w+\nabla\cdot(wv(x))=F(x,t), \\ \quad (x,t)\in Q=\Omega\times(0,T], \\ w(x,t)=0,\ (x,t)\in\partial\Omega\times(0,T], \\ w(x,0)=0, x\in\Omega \end{cases} \tag{4}$$

这里的 $F(x,t)=L\varphi+f(x)R(x,t)$ 称为组合源项,其中 $L\varphi=\Delta\varphi-\nabla\cdot(\varphi v(x))$. 由 f,R 及 φ 的正则性,$F(x,t)$ 在以下可允许集中:

$$A_2=\{B(x,t)\,|\,B(x,t)\in L^2(0,T;L^2(\Omega))\},$$

相应的附加条件(2)和(3)可转化为

$$\begin{cases} w_1^\delta(x,T_1)=g_1^\delta(x)-\varphi(x), x\in\Omega, \\ \quad T_1\in(0,T), \\ w_2^\delta(x,T)=g_2^\delta(x)-\varphi(x), x\in\Omega. \end{cases}$$

这样,(P1)可转化为求解以下问题:

(P2)设 w 为方程(4)的解,$R(x,t)$,$\varphi(x)$ 已知,给定 w 在 $\Omega\times(0,T]$ 上的两个观测噪声数据 $w_1^\delta(x,T)$,$w_1^\delta(x,T)$,同时反演对流速度 $v(x)$ 和组合源项 $F(x,t)$.

可以看到,若能证明 $v(x)$ 和 $F(x,t)$ 的存在性,即可证明 $v(x)$ 和 $f(x)$ 的存在性.

进一步,由于上述反问题的不适定性,我们将其描述为一个稳定的 Tikhonov 正则化的极小化目标泛函

$$\begin{aligned} \min_{v\times F\in A_1\times A_2} J(v,F) = & \\ & \frac{1}{2}\|w(x,T_1;v,F)-g_1^\delta+\varphi\|_{L^2(\Omega)}^2+ \\ & \frac{1}{2}\|w(x,T;v,F)-g_2^\delta+\varphi\|_{L^2(\Omega)}^2+ \\ & \frac{1}{2}\alpha\ \|v\|_{H^1(\Omega)^2}^2+\frac{1}{2}\beta\ \|F\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 \end{aligned} \tag{5}$$

其中 $\alpha,\beta>0$ 为正则化参数. 此外,与对流扩散方程(4)相关的变分系统为

$$\begin{aligned} & \int_Q w_t\eta\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_Q\nabla w\cdot\nabla\eta\mathrm{d}x\mathrm{d}t- \\ & \int_Q(wv)\cdot\nabla\eta\mathrm{d}x\mathrm{d}t= \\ & \int_Q F\eta\mathrm{d}x\mathrm{d}t, \forall\,\eta\in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \end{aligned} \tag{6}$$

引理 2.1　假设$(v,F)\in A_1\times A_2$. 则正问题(4)存在唯一弱解 $w(x,t)\in L^2(0,T;H_0^2(\Omega))\cap L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$满足以下先验估计：

$$\operatorname*{ess\,sup}_{0\leqslant t\leqslant T}\|w(t)\|_{H_0^1(\Omega)}+\|w\|_{L^2(0,T;H_0^2(\Omega))}+\|w_t\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}\leqslant C\|F\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \tag{7}$$

其中常数 $C>0$.

定理 2.2　极小化问题(5)至少存在一个最优解.

证明　第一步，找到(v^*,F^*). 由于函数$J(v,F)$以 0 为下界，我们可以找到一个最小化序列$\{(v^n,F^n)\}\in A_1\times A_2$，使得

$$\lim_{n\to\infty}J(v^n,F^n)=\inf_{(v,F)\in A_1\times A_2}J(v,F).$$

由$\{(v^n,F^n),n\in\mathbf{N}\}$在 $A_1\times A_2$ 上的一致有界性，存在一个弱收敛的子序列，同样记为$\{(v^n,F^n)\}$，以及$v^*\in H^1(\Omega)^2$，$F^*\in A_2$，使得 $v^n\rightharpoonup v^*$，in $H^1(\Omega)^2$，$v^n\to v^*$，in $L^2(\Omega)^2$，$F^n\rightharpoonup F^*$，in $L^2(0,T;L^2(\Omega))$. 注意到可允许集 A_1 为 $H^1(\Omega)^2$ 的闭凸子集，则 A_1 是弱封闭的，从而$v^*\in A_1$.

第二步，找到 w^*. 令 $w^n\equiv w(v^n,F^n)$. 由$w(v^n,F^n)$的定义及(6)式有

$$\int_Q w_t^n\eta\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_Q\nabla w^n\cdot\nabla\eta\mathrm{d}x\mathrm{d}t-\int_Q(w^nv^n)\nabla\eta\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\int_Q F^n\eta\mathrm{d}x\mathrm{d}t,\ \forall\eta\in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \tag{8}$$

由引理 2.1 中的先验估计式(7)，序列$\{w^n\equiv w(v^n,F^n);n\in\mathbf{N}\}$在 $\bar W=\{w:w\in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)\cap H_0^2(\Omega)),w_t\in L^2(0,T;L^2(\Omega))\}$上一致有界. 故存在一个弱收敛的子序列，仍用$\{w^n\}$表示，以及 $w^*\in\bar W$，使得 $w^n\rightharpoonup w^*$，in $\bar W$.

第三步，证明 $w^*=w(v^*,F^*)$. 由序列 w^n 的性质，对任意 $\eta\in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$有

$$\lim_{n\to\infty}\int_Q w_t^n\eta\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\int_Q w_t^*\eta\mathrm{d}x\mathrm{d}t,$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_Q\nabla w^n\nabla\eta\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\int_Q\nabla w^*\cdot\nabla\eta\mathrm{d}x\mathrm{d}t,$$

又 $F^n\rightharpoonup F^*$，in A_2，故

$$\lim_{n\to\infty}\int_Q F^n\eta\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\int_Q F^*\eta\mathrm{d}x\mathrm{d}t.$$

下面我们考虑

$$\int_Q(w^nv^n)\cdot\nabla\eta\mathrm{d}x\mathrm{d}t-\int_Q(w^*v^*)\cdot\nabla\eta\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\int_Q((w^n-w^*)v^n)\cdot\nabla\eta\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_Q w^*(v^n-v^*)\cdot\nabla\eta\mathrm{d}x\mathrm{d}t=I_1+I_2.$$

当$\sigma\in\left(0,\frac{1}{4}\right)$，$\varepsilon\in\left(0,\frac{1-4\sigma}{2}\right)$时，空间$\bar W$ 连续嵌入 $H^\sigma(0,T;H^{\frac{1}{2}+\varepsilon}(\Omega))$[9]. 又由于 $H^\sigma(0,T;H^{\frac{1}{2}+\varepsilon}(\Omega))$紧嵌入 $L^2(0,T;L^2(\Omega))$，则有 $w^n\rightharpoonup w^*$，in $\bar W$，即 $w^n\to w^*$，in $L^2(0,T;L^2(\Omega))$. 由$v^n\in A_1$ 和 Cauchy-Schwarz 不等式，我们得到

$$|I_1|\leqslant C\|w^n-w^*\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}\|\nabla\eta\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}\to 0.$$

同时，由于$v^n\to v^*$，in $L^2(\Omega)^2$ 且 $w^*\in\bar W$，我们有

$$|I_2|\leqslant C\|w^*\|_{L^2(0,T;H_0^2(\Omega))}\|v^n-v^*\|_{L^2(\Omega)^2}\|\nabla\eta\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}\to 0,\ n\to\infty.$$

则

$$\lim_{n\to\infty}\int_Q(w^nv^n)\cdot\nabla\eta\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\int_Q(w^*v^*)\cdot\nabla\eta\mathrm{d}x\mathrm{d}t.$$

因此，当 $n\to\infty$时，由(8)式有

$$\int_Q w_t^*\eta\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_Q\nabla w^*\cdot\nabla\eta\mathrm{d}x\mathrm{d}t-\int_Q(w^*v^*)\cdot\nabla\eta\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\int_Q F^*\eta\mathrm{d}x\mathrm{d}t,$$
$$\forall\eta\in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)).$$

第四步. 由范数的弱下半连续性，我们有

$$\begin{aligned}J(v^*,F^*)=&\frac{1}{2}\|w(x,T_1;v^*,F^*)-g_1^\delta+\varphi\|_{L^2(\Omega)}^2+\frac{1}{2}\|w(x,T;v^*,F^*)-g_2^\delta+\varphi\|_{L^2(\Omega)}^2+\frac{1}{2}\alpha\|v^*\|_{H'(\Omega)^2}^2+\\&\frac{1}{2}\beta\|F^*\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2=\\&\lim_{n\to\infty}\Big\{\frac{1}{2}\|w(x,T_1;v^n,F^n)-g_1^\delta+\varphi\|_{L^2(\Omega)}^2+\frac{1}{2}\|w(x,T;v^n,F^n)-g_2^\delta+\varphi\|_{L^2(\Omega)}^2\Big\}+\\&\frac{1}{2}\alpha\|v^*\|_{H'(\Omega)^2}^2+\frac{1}{2}\beta\|F^*\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2\leqslant\\&\liminf_{n\to\infty}\Big\{\frac{1}{2}\|w(x,T_1;v^n,F^n)-g_1^\delta+\varphi\|_{L^2(\Omega)}^2+\frac{1}{2}\|w(x,T;v^n,F^n)-g_2^\delta+\varphi\|_{L^2(\Omega)}^2+\\&\frac{1}{2}\alpha\|v^n\|_{H'(\Omega)^2}^2+\frac{1}{2}\beta\|F^n\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2\Big\}=\\&\inf_{(v,F)\in A_1\times A_2}J(v,F).\end{aligned}$$

综上，(v^*, F^*)为问题(5)的最优解. 证毕.

源函数 $f(x)$可由 $F(x,t)=L\varphi+f(x)R(x,t)$得到，从而我们也证明了 $f(x)$的存在性. 综上，我们得到了反问题(P1)最优解的存在性. 下面我们证明极小化问题(5)关于不适定问题(P2)对于观测误差的变化是稳定的.

定理 2.3　令$\{w_{1n}^{\delta}, w_{2n}^{\delta}\}$是 $L^2(0,T;L^2(\Omega))$中收敛到$\{w_1^{\delta}, w_2^{\delta}\}$的子序列，$\{(v^n, F^n)\}$是扰动函数极小化子的一个序列，且

$$\frac{1}{2}\|w(x,T_1;v,F)-g_{1n}^{\delta}+\varphi\|_{L^2(\Omega)}^2+\frac{1}{2}\|w(x,T;v,F)-g_{2n}^{\delta}+\varphi\|_{L^2(\Omega)}^2+\frac{1}{2}\alpha\|v\|_{H'(\Omega)^2}^2+\frac{1}{2}\beta\|F\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2.$$

则在 $A_1\times A_2$ 中存在序列$\{(v^n, F^n)\}$的一个子序列弱收敛于极小化问题(5)的最优解.

证明　由序列$\{(v^n, F^n)\}$的定义，对任意的$(v,F)\in A_1\times A_2$，有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\|w(x,T_1;v^n,F^n)-g_{1n}^{\delta}+\varphi\|_{L^2(\Omega)}^2+\frac{1}{2}\|w(x,T;v^n,F^n)-g_{2n}^{\delta}+\varphi\|_{L^2(\Omega)}^2+\\&\frac{1}{2}\alpha\|v^n\|_{H'(\Omega)^2}^2+\frac{1}{2}\beta\|F^n\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2\leqslant\\&\frac{1}{2}\|w(x,T_1;v,F)-g_{1n}^{\delta}+\varphi\|_{L^2(\Omega)}^2+\frac{1}{2}\|w(x,T;v,F)-g_{2n}^{\delta}+\varphi\|_{L^2(\Omega)}^2+\\&\frac{1}{2}\alpha\|v\|_{H'(\Omega)^2}^2+\frac{1}{2}\beta\|F\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2.\end{aligned}$$

类似定理 2.2 的证明，存在$\{(v^n, F^n)\}$的子序列，同样用$\{(v^n, F^n)\}$表示，以及$(v^*,F^*)\in A_1\times A_2$，使得$v^n\rightharpoonup v^*$, in $H^1(\Omega)^2$, $F^n\rightharpoonup F^*$, in $L^2(0,T;L^2(\Omega))$. 由于序列 $w(v^n, F^n)$在$\|\cdot\|_{\bar{W}}$上一致有界，则存在一个弱收敛的子序列，同样用 $w(v^n, F^n)$表示，以及 $w^*\in\bar{W}$，使得 $w^n\rightharpoonup w^*$, in $\bar{W}$. 同样，我们可证明 $w^*=w(v^*, F^*)$，且

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\{\frac{1}{2}\|w(x,T_1;v^n,F^n)-g_{1n}^{\delta}+\varphi\|_{L^2(\Omega)}^2+\frac{1}{2}\|w(x,T;v^n,F^n)-g_{2n}^{\delta}+\varphi\|_{L^2(\Omega)}^2\}=\\&\frac{1}{2}\|w(x,T_1;v^*,F^*)-g_1^{\delta}+\varphi\|_{L^2(\Omega)}^2+\frac{1}{2}\|w(x,T;v^*,F^*)-g_2^{\delta}+\varphi\|_{L^2(\Omega)}^2.\end{aligned}$$

最后，由范数的弱下半连续性得

$$\begin{aligned}J(v^*,F^*)=&\frac{1}{2}\|w(x,T_1;v^*,F^*)-g_1^{\delta}+\varphi\|_{L^2(\Omega)}^2+\frac{1}{2}\|w(x,T;v^*,F^*)-g_2^{\delta}+\varphi\|_{L^2(\Omega)}^2+\frac{1}{2}\alpha\|v^*\|_{H'(\Omega)^2}^2+\\&\frac{1}{2}\beta\|F^*\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2=\\&\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{2}\|w(x,T_1;v^n,F^n)-g_{1n}^{\delta}+\varphi\|_{L^2(\Omega)}^2+\frac{1}{2}\|w(x,T;v^n,F^n)-g_{2n}^{\delta}+\varphi\|_{L^2(\Omega)}^2\right\}+\\&\frac{1}{2}\alpha\|v^*\|_{H'(\Omega)^2}^2+\frac{1}{2}\beta\|F^*\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2\leqslant\\&\liminf_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{2}\|w(x,T_1;v^n,F^n)-g_{1n}^{\delta}+\varphi\|_{L^2(\Omega)}^2+\frac{1}{2}\|w(x,T;v^n,F^n)-g_{2n}^{\delta}+\varphi\|_{L^2(\Omega)}^2+\frac{1}{2}\alpha\|v^n\|_{H'(\Omega)^2}^2+\right.\\&\left.\frac{1}{2}\beta\|F^n\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2\right\}\leqslant\\&\liminf_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{2}\|w(x,T_1;v^n,F^n)-g_1^{\delta}+\varphi\|_{L^2(\Omega)}^2+\frac{1}{2}\|w(x,T;v^n,F^n)-g_2^{\delta}+\varphi\|_{L^2(\Omega)}^2+\right.\\&\left.\frac{1}{2}\alpha\|v^n\|_{H'(\Omega)^2}^2+\frac{1}{2}\beta\|F^n\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2\right\}=\\&\inf_{(v,F)\in A_1\times A_2}J(v,F).\end{aligned}$$

因而(v^*, F^*)为问题(5)(6)的最优解. 证毕.

3　必要条件

定理 3.1　令(v,F)为极小化目标泛函(5)的解. 那么，对任意$(v,F)\in A_1\times A_2$，有

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega}[w(x,T_1)-g_1^{\delta}+\phi][\zeta(x,T_1)+\phi(x,T_1)]\mathrm{d}x+\int_{\Omega}[w(x,T)-g_2^{\delta}+\phi]\\&[\zeta(x,T)+\phi(x,T)]\mathrm{d}x+\alpha\int_{\Omega}[v\cdot(h-v)+\tilde{\nabla}v\cdot\tilde{\nabla}(h-v)]\mathrm{d}x+\beta\int_{Q}F(k-F)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\geqslant 0\end{aligned}\tag{9}$$

且 $\zeta(x,t)$, $\phi(x,t)$分别满足以下方程：

$$\begin{cases}\zeta_t-\Delta\zeta+\nabla\cdot(\zeta v)=-\nabla\cdot(w(h-v)),\\ \quad (x,t)\in Q,\\ \zeta|_{\partial\Omega}=0,\zeta|_{t=0}=0,\end{cases}$$

$$\begin{cases}\phi_t-\Delta\phi+\nabla\cdot(\phi v)=k-F,(x,t)\in Q,\\ \phi|_{\partial\Omega}=0,\phi|_{t=0}=0.\end{cases}$$

证明　任意 $h=(h_1,h_2)\in A_1, k\in A_2$，$0\leqslant\lambda,\gamma\leqslant 1$，有 $v_\lambda\equiv(1-\lambda)v+\lambda h\in A_1$，$F_\gamma\equiv(1-\gamma)F+\gamma k\in A_2$. 那么

$$J_{\lambda,\gamma}\equiv J(v_\lambda,F_\gamma)=\frac{1}{2}\|w(x,T_1;v_\lambda,F_\gamma)-g_1^\delta+\phi\|_{L^2(\Omega)}^2+\frac{1}{2}\|w(x,T;v_\lambda,F_\gamma)-g_2^\delta+\phi\|_{L^2(\Omega)}^2+\frac{1}{2}\alpha\|v_\lambda\|_{H'(\Omega)^2}^2+\frac{1}{2}\beta\|F_\gamma\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2=$$
$$\frac{1}{2}\int_\Omega|w(x,T_1;v_\lambda,F_\gamma)-g_1^\delta+\phi|^2\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_\Omega|w(x,T;v_\lambda,F_\gamma)-g_2^\delta+\phi|^2\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\alpha\int_\Omega[|v_\lambda|^2+|\nabla v_\lambda|^2]\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\beta\int_Q|F_\gamma|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t.$$

对任意向量值函数 $u=(u_1,u_2)\in H'(\Omega)^2$，引入记号$\tilde\nabla$，$\tilde\nabla u=(\nabla u_1,\nabla u_2)^T$，其中$\nabla$是通常意义下的梯度算子. 对任意 $u,v\in H'(\Omega)^2$，定义

$$\tilde\nabla u\cdot\tilde\nabla v=\nabla u_1\cdot\nabla v_1+\nabla u_2\cdot\nabla v_2.$$

当 $v=v_\lambda, F=F_\gamma$ 时，令 $W_{\lambda,\gamma}$为方程(4)的解. 因(v,F)是最优解，我们有

$$\left.\frac{\partial J_{\lambda,\gamma}}{\partial\lambda}\right|_{\lambda=0,\gamma=0}=\int_\Omega[w(x,T_1)-g_1^\delta+\phi]\left.\frac{\partial W_{\lambda,\gamma}}{\partial\lambda}\right|_{\lambda=0,\gamma=0}\mathrm{d}x+\int_\Omega[w(x,t)-g_2^\delta+\phi]\left.\frac{\partial W_{\lambda,\gamma}}{\partial\lambda}\right|_{\lambda=0,\gamma=0}\mathrm{d}x+\alpha\int_\Omega v\cdot(h-v)+\tilde\nabla v\cdot\tilde\nabla(h-v)\mathrm{d}x\geqslant 0,$$

$$\left.\frac{\partial J_{\lambda,\gamma}}{\partial\gamma}\right|_{\lambda=0,\gamma=0}=\int_\Omega[w(x,T_1)-g_1^\delta+\phi]\left.\frac{\partial W_{\lambda,\gamma}}{\partial\gamma}\right|_{\lambda=0,\gamma=0}\mathrm{d}x+\int_\Omega[w(x,t)-g_2^\delta+\phi]\left.\frac{\partial W_{\lambda,\gamma}}{\partial\gamma}\right|_{\lambda=0,\gamma=0}\mathrm{d}x+\beta\int_Q F(k-F)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\geqslant 0.$$

令$\widetilde{W_\lambda}=\dfrac{\partial W_{\lambda,\gamma}}{\partial\lambda}$. 直接计算可得方程

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial t}(\widetilde{W_\lambda})-\Delta\widetilde{W_\lambda}+\nabla\cdot(\widetilde{W_\lambda}v_\lambda)=\\ \quad -\nabla\cdot(W_{\lambda,\gamma}(h-v)),\ (x,t)\in Q,\\ \widetilde{W_\lambda}|_{\partial\Omega}=0,\ \widetilde{W_\lambda}|_{t=0}=0.\end{cases}$$

令 $\zeta=\widetilde{W_\lambda}|_{\lambda=0,\gamma=0}$. 那么 ζ 满足方程

$$\begin{cases}\zeta_t-\Delta\zeta+\nabla\cdot(\zeta v)=-\nabla\cdot(w(h-v)),\\ \quad (x,t)\in Q,\\ \zeta|_{\partial\Omega}=0,\zeta|_{t=0}=0\end{cases}\tag{10}$$

因此，

$$\int_\Omega[w(x,T_1)-g_1^\delta+\phi]\zeta(x,T_1)\mathrm{d}x+\int_\Omega[w(x,T)-g_2^\delta+\phi]\zeta(x,T)\mathrm{d}x+\alpha\int_\Omega[v\cdot(h-v)+\tilde\nabla v\cdot\tilde\nabla(h-v)]\mathrm{d}x\geqslant 0.$$

同样，令$\widetilde{W_\gamma}=\dfrac{\partial W_{\lambda,\gamma}}{\partial\gamma}$. 直接计算得

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial t}(\widetilde{W_\gamma})-\Delta\widetilde{W_\gamma}+\nabla\cdot(\widetilde{W_\gamma}v_\lambda)=k-F,\\ \quad (x,t)\in Q,\\ \widetilde{W_\gamma}|_{\partial\Omega}=0,\widetilde{W_\gamma}|_{t=0}=0.\end{cases}$$

令 $\phi=\widetilde{W_\gamma}|_{\lambda=0,\gamma=0}$. 那么 ϕ 满足方程

$$\begin{cases}\phi_t-\Delta\phi+\nabla\cdot(\phi v)=k-F,\ (x,t)\in Q,\\ \phi|_{\partial\Omega}=0,\phi|_{t=0}=0\end{cases}\tag{11}$$

因此，

$$\int_\Omega[w(x,T_1)-g_1^\delta+\phi]\phi(x,T_1)\mathrm{d}x+\int_\Omega[w(x,T)-g_2^\delta+\phi]\phi(x,T)\mathrm{d}x+\beta\int_Q F(k-F)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\geqslant 0.$$

证毕.

注 1　由抛物方程的共轭理论，我们可以获得必要条件不等式左边第二项的另一种形式. 令

$$L\zeta=\zeta_t-\Delta\zeta+\nabla\cdot(\zeta v).$$

假设 $\hat\zeta$ 为以下方程的解：

$$\begin{cases}L^*\hat\zeta=-\hat\zeta_t-\Delta\hat\zeta-v\cdot\nabla\hat\zeta=0,\ (x,t)\in Q,\\ \hat\zeta|_{\partial\Omega}=0,\hat\zeta|_{t=T}=w(x,t)-g_2^\delta(x)+\phi(x)\end{cases}\tag{12}$$

其中 L^* 为 L 的共轭算子. 由(10)式和(12)式，我们有

$$0=\int_0^T\int_\Omega\zeta L^*\hat\zeta\mathrm{d}x\mathrm{d}t=-\int_\Omega\zeta(x,T)[w(x,T)-g_2^\delta+\phi]\mathrm{d}x+\int_0^T\int_\Omega\hat\zeta L\zeta\mathrm{d}x\mathrm{d}t=-\int_\Omega\zeta(x,T)[w(x,T)-g_2^\delta+\phi]\mathrm{d}x+\int_0^T\int_\Omega w[(h-v)\cdot\nabla\hat\zeta]\mathrm{d}x\mathrm{d}t,$$

即

$$\int_\Omega\zeta(x,T)[w(x,T)-g_2^\delta+\phi]\mathrm{d}x=$$

$$\int_0^T\int_\Omega w[(h-v)\cdot\nabla\hat{\zeta}]\mathrm{d}x\mathrm{d}t.$$

同样，令 $L\phi=\phi_t-\Delta\phi+\nabla\cdot(\phi v)$. 假设 $\hat{\phi}$ 为以下方程的解：

$$\begin{cases}L^*\hat{\phi}=-\hat{\phi}_t-\Delta\hat{\phi}-v\cdot\nabla\hat{\phi}=0,\ (x,t)\in Q,\\ \hat{\phi}|_{\partial\Omega}=0,\hat{\phi}|_{t=T}=w(x,t)-g_2^\delta(x)+\phi(x)\end{cases}\tag{13}$$

这里 L^* 为 L 的共轭算子. 由(11)式和(13)式，我们有

$$0=\int_0^T\int_\Omega\phi L^*\hat{\phi}\mathrm{d}x\mathrm{d}t=$$
$$-\int_\Omega\phi(x,T)[w(x,T)-g_2^\delta+\phi]\mathrm{d}x+$$
$$\int_0^T\int_\Omega\hat{\phi}L\phi\mathrm{d}x\mathrm{d}t=-\int_\Omega\phi(x,T)[w(x,T)-$$
$$g_2^\delta+\phi]\mathrm{d}x+\int_0^T\int_\Omega\hat{\phi}(k-F)\mathrm{d}x\mathrm{d}t,$$

即

$$\int_\Omega\phi(x,T)[w(x,T)-g_2^\delta+\phi]\mathrm{d}x=$$
$$\int_0^T\int_\Omega\hat{\phi}(k-F)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\tag{14}$$

结合(9)式，(13)式和(14)式可得

$$\int_\Omega[w(x,T_1)-g_1^\delta+\phi][\zeta(x,T_1)+\phi(x,T_1)]\mathrm{d}x+$$
$$\int_0^T\int_\Omega w[(h-v)\cdot\nabla\hat{\zeta}]+\hat{\phi}(k-F)\mathrm{d}x\mathrm{d}t+$$
$$\alpha\int_\Omega[v\cdot(h-v)+\tilde{\nabla}v\cdot\tilde{\nabla}(h-v)]\mathrm{d}x+$$
$$\beta\int_Q F(k-F)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\geqslant 0.$$

4 唯一性和稳定性

注意到

$$F(x,t)=L\varphi+f(x)R(x,t)=$$
$$\Delta\varphi-\nabla\cdot(\varphi v(x))+f(x)R(x,t)$$

中的未知函数为 $v(x)$ 和 $f(x)$ 均与时间 t 无关，我们可将泛函(5)改为

$$\min_{v\times F\in A_1\times A_2}J(v,F)=\frac{1}{2}\|w(x,T_1;v,F)-$$
$$g_1^\delta+\varphi\|_{L^2(\Omega)}^2+\frac{1}{2}\|w(x,T;v,F)-g_2^\delta+$$
$$\varphi\|_{L^2(\Omega)}^2+\frac{1}{2}\alpha\|v\|_{H^1(\Omega)^2}^2+\frac{1}{2}\beta\|F\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

上述改变不会对问题产生本质影响，只是必要条件(9)将变为

$$\int_\Omega[w(x,T_1)-g_1^\delta+\varphi][\zeta(x,T_1)+\varphi(x,T_1)]\mathrm{d}x+$$
$$\int_\Omega[w(x,T)-g_2^\delta+\varphi][\zeta(x,T)+\phi(x,T)]\mathrm{d}x+$$
$$\alpha\int_\Omega[v\cdot(h-v)+\tilde{\nabla}v\cdot\tilde{\nabla}(h-v)]\mathrm{d}x+$$
$$\beta\int_\Omega F(k-F)\mathrm{d}x\geqslant 0\tag{15}$$

为得到与源函数 $f(x)$ 有关的稳定性，我们还需对 $R(x,t)\in L^2(0,T;L^\infty(\Omega))$ 附加上条件 $R(x,t)\geqslant R_0>0$，其中 R_0 为一个正常数. 令

$$z(x,T_1)=g_1^\delta(x)-\varphi(x),$$
$$z(x,T)=g_2^\delta(x)-\varphi(x).$$

假设 $\{v_i,F_i\}$，$i=1,2$ 是反问题(P2)相对于 $\{z_i(x,T_1),z_i(x,T)\}$ 的最优解. 令

$$w_1(x,t)=w(x,t;v_1,F_1),$$
$$w_2(x,t)=w(x,t;v_2,F_2)$$

以及 $w_1-w_2=\bar{W},v_1-v_2=\bar{v},F_1-F_2=\bar{F}$. 那么 $\bar{W}$ 满足以下方程：

$$\begin{cases}\bar{W}_t-\Delta\bar{W}+\nabla\cdot(\bar{W}v_1)=\bar{F}-\nabla\cdot(w_2\bar{v}),\\ \quad(x,t)\in Q,\\ \bar{W}|_{\partial\Omega}=0,\bar{W}|_{t=0}=0\end{cases}\tag{16}$$

在(15)式中，当 $(v,F)=(v_1,F_1)$ 时令 $(h,k)=(v_2,F_2)$，当 $(v,F)=(v_2,F_2)$ 时令 $(h,k)=(v_1,F_1)$，则有

$$\alpha\int_\Omega[v_1\cdot(v_2-v_1)+\tilde{\nabla}v_1\cdot\tilde{\nabla}(v_2-v_1)]\mathrm{d}x+$$
$$\beta\int_\Omega F_1(F_2-F_1)\mathrm{d}x+\int_\Omega[w_1-z_1(\cdot,T_1)]$$
$$[\zeta_1+\phi_1]\mathrm{d}x+\int_\Omega[w_1-z_1(\cdot,T)]$$
$$[\zeta_1+\phi_1]\mathrm{d}x\geqslant 0\tag{17}$$

和

$$\alpha\int_\Omega[v_2\cdot(v_1-v_2)+\tilde{\nabla}v_2\cdot\tilde{\nabla}(v_1-v_2)]\mathrm{d}x+$$
$$\beta\int_\Omega F_2(F_1-F_2)\mathrm{d}x+\int_\Omega[w_2-z_2(\cdot,T_1)]$$
$$[\zeta_2+\phi_2]\mathrm{d}x+\int_\Omega[w_2-z_2(\cdot,T)]$$
$$[\zeta_2+\phi_2]\mathrm{d}x\geqslant 0\tag{18}$$

由(17)式和(18)式可得

$$\alpha\int_\Omega[|v_1-v_2|^2+|\tilde{\nabla}(v_1-v_2)|^2]\mathrm{d}x+$$
$$\beta\int_\Omega(F_1-F_2)^2\mathrm{d}x\leqslant$$
$$\alpha\int_\Omega[|v_1-v_2|^2+|\tilde{\nabla}(v_1-v_2)|^2]\mathrm{d}x+$$
$$\beta\Big(R_0^2\int_\Omega(f_1-f_2)^2\mathrm{d}x+\int_\Omega|\nabla\cdot(\varphi\bar{v})|^2\mathrm{d}x\Big)\leqslant$$

$$\int_\Omega [w_1 - z_1(\cdot,T_1)][\zeta_1+\phi_1]+ [w_2 - z_2(\cdot,T_1)][\zeta_2+\phi_2]\mathrm{d}x + \int_\Omega [w_1 - z_1(\cdot,T)][\zeta_1+\phi_1]+ [w_2 - z_2(\cdot,T)][\zeta_2+\phi_2]\mathrm{d}x \equiv I_1 + I_2 \tag{19}$$

对于 I_1，我们有

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_\Omega [w_1 - z_1(\cdot,T_1)][\zeta_1+\phi_1]- [w_2 - z_2(\cdot,T_1)][\zeta_1+\phi_1] + [w_2 - z_2(\cdot,T_1)][\zeta_1+\phi_1]+ [w_2 - z_2(\cdot,T_1)][\zeta_2+\phi_2]\mathrm{d}x = \\ &\int_\Omega (w_1-w_2)(\zeta_1+\phi_1)\mathrm{d}x + \int_\Omega [z_2(\cdot,T_1)-z_1(\cdot,T_1)](\zeta_1+\phi_1)\mathrm{d}x + \\ &\int_\Omega [w_2 - z_2(\cdot,T_1)](\zeta_1+\zeta_2)\mathrm{d}x + \int_\Omega [w_2 - z_2(\cdot,T_1)](\phi_1+\phi_2)\mathrm{d}x \equiv \\ &\equiv I_{11}+I_{12}+I_{13}+I_{14}. \end{aligned}$$

其中 $w_i,\zeta_i,\phi_i,i=1,2$ 关于 t 的取值均为 T_1.

同理，对于 I_2 我们有

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_\Omega (w_1-w_2)(\zeta_1+\phi_1)\mathrm{d}x + \int_\Omega [z_2(\cdot,T)-z_1(\cdot,T)](\zeta_1+\phi_1)\mathrm{d}x + \\ &\int_\Omega [w_2 - z_2(\cdot,T)](\zeta_1+\zeta_2)\mathrm{d}x + \int_\Omega [w_2 - z_2(\cdot,T)](\phi_1+\phi_2)\mathrm{d}x \equiv \\ &I_{21}+I_{22}+I_{23}+I_{24}. \end{aligned}$$

其中 $w_i,\zeta_i,\phi_i,i=1,2$ 关于 t 的取值均为 T，以后不再赘述. 注意到 $\zeta_1,\zeta_2,\phi_1,\phi_2$ 分别满足以下方程：

$$\begin{cases} \zeta_{1t} - \Delta\zeta_1 + \nabla\cdot(\zeta_1 v_1) = \nabla\cdot(w_1\bar{v}), \\ \zeta_1|_{\partial\Omega}=0, \zeta_1|_{t=0}=0 \end{cases} \tag{20}$$

$$\begin{cases} \zeta_{2t} - \Delta\zeta_2 + \nabla\cdot(\zeta_2 v_2) = -\nabla\cdot(w_2\bar{v}), \\ \zeta_2|_{\partial\Omega}=0, \zeta_2|_{t=0}=0 \end{cases} \tag{21}$$

$$\begin{cases} \phi_{1t} - \Delta\phi_1 + \nabla\cdot(\phi_1 v_1) = -\overline{F}, \\ \phi_1|_{\partial\Omega}=0, \phi_1|_{t=0}=0 \end{cases} \tag{22}$$

$$\begin{cases} \phi_{2t} - \Delta\phi_2 + \nabla\cdot(\phi_2 v_2) = \overline{F}, \\ \phi_2|_{\partial\Omega}=0, \phi_2|_{t=0}=0 \end{cases} \tag{23}$$

令 $\zeta_1+\zeta_2=E$, $\phi_1+\phi_2=N$, $\zeta_1+\phi_1=H$. 则 E,N,H 分别满足以下的方程：

$$\begin{cases} E_t - \Delta E + \nabla\cdot(E v_1) = \\ \quad \nabla\cdot(\zeta_2\bar{v}) + \nabla\cdot(\overline{W}\bar{v}), \\ E|_{\partial\Omega}=0, E|_{t=0}=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} N_t - \Delta N + \nabla\cdot(N v_1) = \nabla\cdot(\phi_2\bar{v}), \\ N|_{\partial\Omega}=0, N|_{t=0}=0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_t - \Delta H + \nabla\cdot(H v_1) = \nabla\cdot(w_1\bar{v}) - \overline{F}, \\ H|_{\partial\Omega}=0, H|_{t=0}=0 \end{cases}$$

引理 4.1　对方程(16)，我们有如下估计：

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\int_\Omega \overline{W}^2\mathrm{d}x + \int_0^T\int_\Omega |\nabla\overline{W}|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t \leqslant C\Big(\int_0^T\int_\Omega \overline{F}^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \int_0^T\int_\Omega |w_2\bar{v}|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\Big) \tag{24}$$

这里的 C 与 T 无关.

证明　对 $0<t\leqslant T$，由方程(16)得

$$\int_\Omega\int_0^t\Big(\frac{\overline{W}^2}{2}\Big)_t\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \int_0^t\int_\Omega|\nabla\overline{W}|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t - \int_0^t\int_\Omega \overline{W}v_1\cdot\nabla\overline{W}\mathrm{d}x\mathrm{d}t = \int_0^t\int_\Omega[\overline{F}-\nabla\cdot(w_2\bar{v})]\overline{W}\mathrm{d}x\mathrm{d}t \tag{25}$$

由 Young 不等式和(25)式，利用分部积分可得

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \frac{\overline{W}^2}{2}\Big|_{(x,t)}\mathrm{d}x + \int_0^t\int_\Omega|\nabla\overline{W}|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t = \\ &\int_0^t\int_\Omega \overline{W}v_1\cdot\nabla\overline{W}\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \int_0^t\int_\Omega \overline{F}\overline{W}\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \\ &\int_0^t\int_\Omega w_2\bar{v}\cdot\nabla\overline{W}\mathrm{d}x\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{2}\int_0^t\int_\Omega \overline{F}^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \\ &C\int_0^t\int_\Omega |w_2\bar{v}|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t + C\int_0^t\int_\Omega \overline{W}^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \\ &\frac{1}{2}\int_0^t\int_\Omega|\nabla\overline{W}|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t, \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \frac{\overline{W}^2}{2}\Big|_{(x,t)}\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_0^t\int_\Omega|\nabla\overline{W}|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t \leqslant \\ &\frac{1}{2}\int_0^t\int_\Omega \overline{F}^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t + C\int_0^t\int_\Omega |w_2\bar{v}|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \\ &C\int_0^t\int_\Omega \overline{W}^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t, \end{aligned}$$

由 Gronwall 不等式和上式，得

$$\int_\Omega \overline{W}^2\mathrm{d}x + \int_0^T\int_\Omega|\nabla\overline{W}|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t \leqslant C\Big(\int_0^T\int_\Omega |w_2\bar{v}|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \int_0^T\int_\Omega \overline{F}^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\Big),$$

这里的 C 与 T 无关. 证毕.

类似引理 4.1 的证明，我们有以下结果.

引理 4.2　对方程(21)和方程(23)，我们有如下估计：

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\int_\Omega \zeta_2^{\,2}\mathrm{d}x + \int_0^T\int_\Omega|\nabla\zeta_2|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t \leqslant$$

$$C\int_0^T\int_\Omega|w_2\,\bar v|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t \tag{26}$$

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\int_\Omega\phi_2^2\mathrm{d}x+\int_0^T\int_\Omega|\nabla\phi_2|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant C\int_0^T\int_\Omega|\bar F|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t \tag{27}$$

这里的 C 与 T 无关.

引理 4.3 对于 E,N,R，我们有以下估计：

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\int_\Omega E^2\mathrm{d}x+\int_0^T\int_\Omega|\nabla E|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant CT\max|\bar v|^2\Big(\int_0^T\int_\Omega\bar F^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_0^T\int_\Omega|w_2\,\bar v|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\Big) \tag{28}$$

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\int_\Omega N^2\mathrm{d}x+\int_0^T\int_\Omega|\nabla N|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant CT\max|\bar v|^2\int_0^T\int_\Omega\bar F^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t \tag{29}$$

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\int_\Omega H^2\mathrm{d}x+\int_0^T\int_\Omega|\nabla H|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant C\Big(\int_0^T\int_\Omega\bar F^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_0^T\int_\Omega|w_1\,\bar v|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\Big) \tag{30}$$

这里的 C 与 T 无关.

证明 因(29)(30)式的证明与(28)式的证明类似，我们仅需证明(28)式. 对 $0<t\leqslant T$，由(28)式得

$$\int_\Omega\int_0^t\Big(\frac{E^2}{2}\Big)_t\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_0^t\int_\Omega|\nabla E|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t-\int_0^t\int_\Omega Ev_1\cdot\nabla E\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\int_0^t\int_\Omega[\nabla\cdot(\zeta_2\,\bar v)+\nabla\cdot(\bar W\bar v)]E\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t \tag{31}$$

由 Young 不等式和(31)式，利用分部积分可得

$$\begin{aligned}&\int_\Omega\frac{E^2}{2}\Big|_{(x,t)}\mathrm{d}x+\int_0^t\int_\Omega|\nabla E|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\\&\int_0^t\int_\Omega Ev_1\cdot\nabla E\mathrm{d}x\mathrm{d}t-\int_0^t\int_\Omega\zeta_2\,\bar v\cdot\nabla E\mathrm{d}x\mathrm{d}t-\\&\int_0^t\int_\Omega\bar W\bar v\cdot\nabla E\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant C\int_0^t\int_\Omega|Ev_1|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\\&C\int_0^t\int_\Omega|\zeta_2\,\bar v|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t+C\int_0^t\int_\Omega|\bar W\bar v|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\\&\frac12\int_0^t\int_\Omega|\nabla E|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant\\&C\int_0^t\int_\Omega E^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\frac12\int_0^t\int_\Omega|\nabla E|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\\&CT\max|\bar v|^2\Big(\int_0^t\int_\Omega\bar F^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\\&\int_0^t\int_\Omega|w_2\,\bar v|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\Big)\end{aligned} \tag{32}$$

即

$$\int_\Omega\frac{E^2}{2}\Big|_{(x,t)}\mathrm{d}x+\frac12\int_0^t\int_\Omega|\nabla E|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant C\int_0^t\int_\Omega E^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t+CT\max|\bar v|^2\Big(\int_0^t\int_\Omega\bar F^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_0^t\int_\Omega|w_2\,\bar v|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\Big).$$

这里我们使用了估计式(24)和(26). 由 Gronwall 不等式，得

$$\int_\Omega E^2\mathrm{d}x+\int_0^T\int_\Omega|\nabla E|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant CT\max|\bar v|^2\Big(\int_0^T\int_\Omega\bar F^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_0^T\int_\Omega|w_2\,\bar v|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\Big),$$

这里 C 与 T 无关. 证毕.

注 2 下面我们将给出估计式(28)(29)的另一种形式. 注意到当 $n=2$，且 $m=n$ 时我们有[10] $W^{1,m}(\Omega)\subset L^q(\Omega)$，$1\leqslant q<\infty$，且对任意 $u\in W^{1,m}(\Omega)$有 $\|u\|_{L^q(\Omega)}\leqslant C\|u\|_{W^{1,m}(\Omega)}$. 特别地，当 $m<n$ 时，有

$$W^{1,m}(\Omega)\subset L^q(\Omega),\ 1\leqslant q<m^*=\frac{mn}{n-m},$$

且对任意 $u\in W^{1,m}(\Omega)$有

$$\|u\|_{L^q(\Omega)}\leqslant C\|u\|_{W^{1,m}(\Omega)},1\leqslant q<m^*=\frac{mn}{n-m} \tag{33}$$

由(33)式和 Poincaré 不等式，可得

$$\begin{aligned}&\|\bar v\|^2_{L^4(\Omega)^2}=\Big(\int_\Omega(|\bar v|^2)^2\mathrm{d}x\Big)^{\frac12}\leqslant\\&C\|\bar v\cdot\bar v\|_{W^{1,1}(\Omega)^2}\leqslant\\&C\|\bar v\|_{L^2(\Omega)^2}\cdot\|\tilde\nabla\bar v\|_{L^2(\Omega)^2}.\end{aligned}$$

因此，在估计式(32)中有

$$\begin{aligned}&\int_0^T\int_\Omega|\bar W\bar v|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant\Big(\int_0^T\int_\Omega|\bar v|^4\mathrm{d}x\mathrm{d}t\Big)^{\frac12}\cdot\\&\Big(\int_0^T\int_\Omega|\bar W|^4\mathrm{d}x\mathrm{d}t\Big)^{\frac12}\leqslant C\sqrt T\|\bar v\|^2_{L^4(\Omega)^2}\cdot\\&\|\bar W\|^2_{L^4(Q)}\leqslant C\sqrt T\|\bar v\|_{L^2(\Omega)^2}\cdot\\&\|\tilde\nabla\bar v\|_{L^2(\Omega)^2}\cdot\|\bar W\|_{L^2(Q)}\cdot\|\nabla\bar W\|_{L^2(Q)}\end{aligned} \tag{34}$$

那么,由(24)式、(34)式和 Poincaré 不等式可得

$$\int_0^T\int_\Omega|\bar W\bar v|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant CT\|\tilde\nabla\bar v\|^2_{L^2(\Omega)^2}\cdot\Big(\int_0^T\int_\Omega\bar F^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_0^T\int_\Omega|w_2\,\bar v|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\Big).$$

同样，对 $|\zeta_2\,\bar v|^2$ 有如下估计：

$$\int_0^T\int_\Omega|\zeta_2\,\bar v|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant CT\|\tilde\nabla\bar v\|^2_{L^2(\Omega)^2}\cdot\int_0^T\int_\Omega|w_2\,\bar v|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t.$$

这样，我们可以再次写出引理 4.4 的另一种形式：

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\int_\Omega E^2\mathrm{d}x+\int_0^T\int_\Omega|\nabla E|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant$$

$$CT\ \|\tilde{\nabla}\bar{v}\|^2_{L^2(\Omega)^2}\cdot\left(\int_0^T\int_\Omega \bar{F}^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_0^T\int_\Omega |w_2\bar{v}|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right)\tag{35}$$

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\int_\Omega N^2\mathrm{d}x+\int_0^T\int_\Omega|\nabla N|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant CT\ \|\tilde{\nabla}\bar{v}\|^2_{L^2(\Omega)^2}\cdot\int_0^T\int_\Omega|w_2\bar{v}|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\tag{36}$$

定理 4.4　令 $\{v_1,F_1\}$，$\{v_2,F_2\}$是最优控制问题(P2)相对$\{z_1(x,T_1),z_1(x,T)\}$，$\{z_2(x,T_1),z_2(x,T)\}$的最优解. 如果$v_1|_{\partial\Omega}=v_2|_{\partial\Omega}$，$F_1|_{\partial\Omega}=F_2|_{\partial\Omega}$，则存在一个适当小的常数 T_0，对于任意的 $0<T<T_0$，有以下的估计：

$$\|v_1-v_2\|_{H'(\Omega)^2}+\|f_1-f_2\|_{L^2(\Omega)}\leqslant C(\|z_1(\cdot,T_1)-z_2(\cdot,T_1)\|_{L^2(\Omega)}+\|z_1(\cdot,T)-z_2(\cdot,T)\|_{L^2(\Omega)}),$$

其中的 C 与 T 无关.

证明　证明的主要思想是利用第 3 节中得到的必要条件. 对(19)式中定义的 I_1，有

$$|I_1|=|I_{11}+I_{12}+I_{13}+I_{14}|\leqslant |I_{11}|+|I_{12}|+|I_{13}|+|I_{14}|\leqslant \int_\Omega|\bar{W}||H|\mathrm{d}x+\int_\Omega|z_2(\cdot,T_1)-z_1(\cdot,T_1)||H|\mathrm{d}x+\int_\Omega|w_2-z_2(\cdot,T_1)||E|\mathrm{d}x+\int_\Omega|w_2-z_2(\cdot,T_1)||N|\mathrm{d}x\leqslant$$

$$\sqrt{\int_\Omega|\bar{W}|^2\mathrm{d}x}\cdot\sqrt{\int_\Omega|H|^2\mathrm{d}x}+\int_\Omega|z_2(\cdot,T_1)-z_1(\cdot,T_1)|^2\mathrm{d}x+\int_\Omega|H|^2\mathrm{d}x+\sqrt{\int_\Omega|w_2-z_2(\cdot,T_1)|^2\mathrm{d}x}\times\left(\sqrt{\int_\Omega|E|^2\mathrm{d}x}+\sqrt{\int_\Omega|N|^2\mathrm{d}x}\right)\tag{37}$$

$$\|\bar{W}\|_{L^2(\Omega)}\cdot\|H\|_{L^2(\Omega)}+\|w_2-z_2(\cdot,T_1)\|_{L^2(\Omega)}\times(\|E\|_{L^2(\Omega)}+\|N\|_{L^2(\Omega)})+\|H\|^2_{L^2(\Omega)}+\|z_2(\cdot,T_1)-z_1(\cdot,T_1)\|^2_{L^2(\Omega)}\leqslant \|w_2-z_2(\cdot,T_1)\|_{L^2(\Omega)}\times(\|E\|_{L^2(\Omega)}+\|N\|_{L^2(\Omega)})+\|\bar{W}\|^2_{L^2(\Omega)}+2\|H\|^2_{L^2(\Omega)}+\|z_2(\cdot,T_1)-z_1(\cdot,T_1)\|^2_{L^2(\Omega)}$$

及 $z_2(\cdot,T_1)\in L^2(\Omega)$. 由引理 2.1 知

$$\int_\Omega|w_2-z_2(\cdot,T_1)|^2\mathrm{d}x\leqslant C\tag{38}$$

这里的 C 与 T 无关. 由引理 4.2 以及(35)式～(38)式可得

$$\begin{aligned}|I_1|\leqslant{}&CT\ \|\tilde{\nabla}\bar{v}\|_{L^2(\Omega)^2}\times\left(\sqrt{\int_0^T\int_\Omega\bar{F}^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_0^T\int_\Omega|w_2\bar{v}|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t}+\sqrt{\int_0^T\int_\Omega|w_2\bar{v}|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t}\right)+\\&C\left(\int_0^T\int_\Omega\bar{F}^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_0^T\int_\Omega(|w_2\bar{v}|^2+|w_1\bar{v}|^2)+\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right)+\int_\Omega|z_2(\cdot,T_1)-z_1(\cdot,T_1)|^2\mathrm{d}x\leqslant\\&CT\ \|\tilde{\nabla}\bar{v}\|_{L^2(\Omega)^2}+C(T+1)\int_0^T\int_\Omega\bar{F}^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t+CT\ \|\bar{v}\|^2_{L^2(\Omega)^2}+\|z_2(\cdot,T_1)-z_1(\cdot,T_1)\|^2_{L^2(\Omega)}\leqslant\\&CT\ \|\tilde{\nabla}\bar{v}\|_{L^2(\Omega)^2}+C(T+1)TR_0^2\ \|f_1-f_2\|^2_{L^2(\Omega)}+C(T+1)T\ \|\nabla\cdot(\varphi\bar{v})\|^2_{L^2(\Omega)}+\\&CT\ \|\bar{v}\|^2_{L^2(\Omega)^2}+\|z_2(\cdot,T_1)-z_1(\cdot,T_1)\|^2_{L^2(\Omega)}\end{aligned}\tag{39}$$

类似可得

$$|I_2|\leqslant CT\ \|\tilde{\nabla}\bar{v}\|_{L^2(\Omega)^2}+C(T+1)TR_0^2\ \|f_1-f_2\|^2_{L^2(\Omega)}+C(T+1)T\ \|\nabla\cdot(\varphi\bar{v})\|^2_{L^2(\Omega)}+CT\ \|\bar{v}\|^2_{L^2(\Omega)^2}+\|z_2(\cdot,T)-z_1(\cdot,T)\|^2_{L^2(\Omega)}\tag{40}$$

结合(19)式，(39)式和(40)式，我们有

$$\alpha\int_\Omega[|\bar{v}|^2+|\tilde{\nabla}\bar{v}|^2]\mathrm{d}x+\beta\left(R_0^2\int_\Omega(f_1-f_2)^2\mathrm{d}x+\int_\Omega|\nabla\cdot(\varphi\bar{v})|^2\mathrm{d}x\right)\leqslant 2CT(\|\bar{v}\|^2_{L^2(\Omega)^2}+\|\tilde{\nabla}\bar{v}\|_{L^2(\Omega)^2})+2C(T+1)T(R_0^2\ \|f_1-f_2\|^2_{L^2(\Omega)}+\|\nabla\cdot(\varphi\bar{v})\|^2_{L^2(\Omega)})+\|z_2(\cdot,T_1)-z_1(\cdot,T_1)\|^2_{L^2(\Omega)}+\|z_2(\cdot,T)-z_1(\cdot,T)\|^2_{L^2(\Omega)}\tag{41}$$

这里的 C 与 T 无关. 因此，对于固定的 α 和 β，我们可以选择一个比较小的 T_0，使得

$$C(T_0{}^2+T_0)\leqslant\min\{\alpha,\beta\}/2\tag{42}$$

由(41)式和(42)式，注意到$\tilde{\nabla}$的定义，则对任意的 $0<T<T_0$ 有

$$\| v_1 - v_2 \|_{H'(\Omega)^2} + \| f_1 - f_2 \|_{L^2(\Omega)} \leqslant C(\| z_1(\cdot, T_1) - z_2(\cdot, T_1) \|_{L^2(\Omega)} + \| z_1(\cdot, T) - z_2(\cdot, T) \|_{L^2(\Omega)}),$$

这里的 C 与正则化参数 α 和 β 相关. 证毕.

5 结　论

本文利用两个时刻的观测数据值同时反演了对流扩散方程的对流速度和源函数. 通过将初始时刻值转化为源项条件，本文得到了一个组合源项，然后利用 Tikhonov 正则化方法构造了目标泛函，并证明了最优解的存在的必要条件及解的唯一性和稳定性. 这将为接下来的数值模拟提供强有力的支撑. 在以后的工作中，我们将考虑使用交替方向迭代法同时反演对流速度和源函数.

参考文献：

[1] Fu C L，Li H F，Xiong X T. Iterative Tikhonov regularization method for ill-posed problems [J]. Math Numer Sin，2006，3：237. [傅初黎,李洪芳,熊向团. 不适定问题的迭代 Tikhonov 正则化方法 [J]. 计算数学，2006，3：237.]

[2] Zhang G R. Tikhonov regularization method for ill-posed problems [J]. Shandong Sci，1995，8：15. [张改荣. 不适定问题的 Tikhonov 正则化方法[J]. 山东科学，1995，8：15.]

[3] Chen D H，Jiang D，Zou J. Convergence rates of Tikhonov regularizations for elliptic and parabolic inverse radioactivity problems [J]. Inverse Probl，2020，36：075001.

[4] Yang F，Fu C L. A simplified Tikhonov regularization method for determining the heat source [J]. Appl Math Model，2010，34：3286.

[5] Engl H W，Kunisch K，Neubauer A. Convergence rates for Tikhonov regularization of nonlinear ill-posed problems [J]. Inverse Probl，1989，5：523.

[6] Deng Z C，Yang L，Chen N. Uniqueness and stability of the minimizer for a binary functional arising in an inverse heat conduction problem [J]. J Math Anal Appl，2011，382：474.

[7] Cao K，Lesnic D，Liu J. Simultaneous reconstruction of space-dependent heat transfer coefficients and initial temperature [J]. J Comput Appl Math，2020，375：112800.

[8] Cheng T，Hu J，Jiang D. Simultaneous identification of convection velocity and source strength in a convection - diffusion equation [J]. Appl Anal，2020，99：2170.

[9] Chrysafinos K，Gunzburger M D，Hou L S. Semidiscrete approximations of optimal Robin boundary control problems constrained by semilinear parabolic [J]. J Math Anal Appl，2006，323：891.

[10] Adams R A. Sobolev spaces [M]. New York：Academic Press，1975.