一个含对流项的反应扩散捕食模型正解的存在性

高　歌，董亚莹
(西安工程大学理学院，西安 710048)

摘　要：本文研究了一个含对流项的反应扩散捕食模型正解的存在性，该模型描述了两物种间的捕食关系及捕食者选择在远离高密度食饵区域捕猎的倾向. 基于模型正解的先验估计，本文利用特征值理论和齐次化理论获得了模型正解关于两物种增长率的不存在性，然后利用分歧理论获得了模型正解在某些参数条件下的存在性.

关键词：反应扩散捕食模型；全局分岔；先验估计
中图分类号：O175.26　　**文献标志码**：A　　DOI：10.19907/j.0490-6756.2024.011006

Existence of positive solutions of a reaction-diffusion predator model with advection term

GAO Ge, *DONG Ya-Ying*
(College of Science, Xi'an Polytechnic University, Xi'an 710048, China)

Abstract: In this paper, we focus on the existence of positive solutions of a reaction-diffusion predator model with advection term. This model can be used to describe the relationship between the predator species and the prey species with a tendency that predators choose to hunt away from the high-density area of prey species. Based on a priori estimate for positive solutions, the non-existence of positive solutions with respect to the growth rate of both species is established by using the eigenvalue theory and homogenization theory. Then the existence of positive solutions for different parameter conditions is established by using the bifurcation theory.

Keywords: Reaction-diffusion-predator model; Global bifurcation; Priori estimate
(2010 MSC 26A33)

1 引　言

对于经典的 Lotka-Volterra 捕食-食饵模型，Leung[1]证明：对任意初值，所有正解随时间的推移收敛于一个常数稳态解. 这就意味着经典的 Lotka-Volterra 捕食-食饵模型不存在非常数正解. 另一方面，很多研究显示：当模型中的反应函数被其它类型的功能反应函数替代时，模型往往存在非常数正解. 此类模型包括 Holling II 型捕食-食饵模型[2]，ratio-dependent 型捕食-食饵模型[3]，等. 那么，一个有趣的问题是：什么样的条件可以保证经典的 Lotka-Volterra 捕食-食饵模型存在非常数正解？

对于这个问题，Tulumello 等[4]研究了如下的反应扩散对流捕食模型：

$$\begin{cases}\partial_t u=\Gamma u(r-\gamma u-v)+\nabla^2 u,\\ \partial_t v=\Gamma v(-1+u)+d_{21}\nabla(v\nabla u)+d_2\nabla^2 v,\\ u(x,0)=u_0(x),\ v(x,0)=v_0(x)\end{cases}\tag{1}$$

收稿日期：2023-02-16
基金项目：国家自然科学基金(11801431)；陕西省高校科协青年人才托举计划(20190509)；陕西省自然科学基金(2023-JC-YB-038)
作者简介：高歌(2000－)，女，硕士研究生，主要研究方向为反应扩散方程理论及应用. E-mail：gaoge201223@163.com
通讯作者：董亚莹. E-mail：dongyaying@xpu.edu.cn

其中的未知函数 $u=u(x,t)$ 和 $v=v(x,t)$ 分别表示食饵和捕食者的种群密度,非负系数 $r\geqslant 0$ 和 $\gamma\geqslant 0$ 分别表示食饵的生长速率和逆承载能力,d_2 是捕食者的随机扩散系数,Γ 度量了动力学项的相对强度,$d_{21}\nabla(v\nabla u)$ 表示捕食者选择从高食饵密度区域向低食饵密度区域移动的倾向. Tulumello 等的研究表明:在齐次 Neumann 边界条件下,对流项的存在使得系统存在非常数正解,从而改变系统的动力学行为. 受此启发,本文考虑如下的 Dirichlet 问题:

$$\begin{cases} u_t=d_u\Delta u+u(\lambda-u-bv),\ x\in\Omega,t>0,\\ v_t=\nabla(d_v\nabla v+\beta_v v\nabla u)+v(\mu-v+cu),\\ \quad x\in\Omega,t>0,\\ u=v=0,\ x\in\partial\Omega,\ t>0,\\ u(x,0)=u_0(x)\geqslant 0,\ v(x,0)=v_0(x)\geqslant 0,\\ \quad x\in\Omega \end{cases}\tag{2}$$

其中 Ω 是在 $\mathbf{R}^n$ 上具有光滑边界的有界域,系数 $d_u,d_v,\lambda,\beta_v,b,c$ 为正常数,μ 为任意实数. 此外,反应项中的 λ 和 μ 为食饵和捕食者的增长率,b 和 c 分别为捕食者对食饵的捕食系数和转化系数. 在扩散项中,d_u,d_v 分别表示食饵和捕食者的随机扩散系数,β_v 表示捕食者从高食饵密度区向低食饵密度区移动的速度. 值得注意的是,这里的齐次 Dirichlet 边界条件[5]意味着两物种的栖息地 Ω 的外部环境是致死的,即所有个体在到达栖息地边界时都将死亡. 本文主要研究问题(2)对应的稳态问题,即下面的椭圆方程:

$$\begin{cases} -d_u\Delta u=u(\lambda-u-bv),\ x\in\Omega,\\ -\nabla(d_v\nabla v+\beta_v v\nabla u)=v(\mu-v+cu),\ x\in\Omega,\\ u=v=0,\ x\in\partial\Omega \end{cases}\tag{3}$$

基于问题(3)正解的先验估计,本文利用特征值理论和齐次化理论证明问题(3)正解关于两物种增长率不存在,然后利用分歧理论证明了问题(3)正解在不同参数条件下的存在性.

2　预备知识

我们将介绍两个重要引理. 第一个引理给出了主特征值 $\sigma_1[-\nabla(p(x)\nabla)+q(x);m(x)]$ 的一些重要性质.

引理 2.1[6]　对于给定的 $p(x)\in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ 和 $q(x),m(x)\in C^{\alpha}(\overline{\Omega})$, $\alpha\in(0,1)$, $m(x)>0$, $p(x)\geqslant p_0>0$,线性特征值问题

$$\begin{cases} -\nabla(p(x)\nabla\varphi)+q(x)\varphi=\sigma m(x)\varphi,\ x\in\Omega,\\ \varphi=0,\ x\in\partial\Omega \end{cases}$$

存在一个主特征值,记为 $\sigma_1[-\nabla(p(x)\nabla)+q(x);m(x)]$,满足

$$\sigma_1[-\nabla(p(x)\nabla)+q(x);m(x)]=\inf_{\psi\in H_0^1(\Omega),\psi\neq 0}\frac{\int_\Omega p(x)\,|\nabla\psi|^2\mathrm{d}x+\int_\Omega q(x)\psi^2\mathrm{d}x}{\int_\Omega m(x)\psi^2\mathrm{d}x}.$$

进一步,我们有

(i) $\sigma_1[-\nabla(p(x)\nabla)+q(x);m(x)]$ 关于 $p(x)$ 单调递增;

(ii) $\sigma_1[-\nabla(p(x)\nabla)+q(x);m(x)]$ 关于 $q(x)$ 单调递增;

(iii) $\sigma_1[-\nabla(p(x)\nabla)+q(x);m(x)]$ 关于 $m(x)$ 的单调性取决于 $\sigma_1[-\nabla(p(x)\nabla)+q(x);1]$ 的符号:

(iii-a) 当 $\sigma_1[-\nabla(p(x)\nabla)+q(x);1]>0$ 时,$\sigma_1[-\nabla(p(x)\nabla)+q(x);m(x)]>0$ 且关于 $m(x)$ 单调递减;

(iii-b) 当 $\sigma_1[-\nabla(p(x)\nabla)+q(x);1]=0$ 时,$\sigma_1[-\nabla(p(x)\nabla)+q(x);m(x)]=0$;

(iii-c) 当 $\sigma_1[-\nabla(p(x)\nabla)+q(x);1]>0$ 时,$\sigma_1[-\nabla(p(x)\nabla)+q(x);m(x)]<0$ 且关于 $m(x)$ 单调递增.

第二个引理提供了一些关于 logistic 扩散方程的结果.

引理 2.2[6]　对任何给定的 $p(x)\in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, $b(x)\in C^{\alpha}(\overline{\Omega})$, $\alpha\in(0,1)$, $b(x)\geqslant b_0>0$, $p(x)\geqslant p_0>0$,logistic 扩散方程

$$\begin{cases} -\nabla(p(x)\nabla\varphi)=(a-b(x)\varphi)\varphi,\ x\in\Omega,\\ \varphi=0,\ x\in\partial\Omega \end{cases}$$

当且仅当 $a>\sigma_1[-\nabla(p(x)\nabla);1]$ 时存在唯一正解,记为 $\theta_{p,a,b}$. 此外,映射 $a\to\theta_{p,a,b}$ 连续递增且满足

$$\frac{a-\sigma_1[-\nabla(p(x)\nabla);1]}{\|b(x)\|_{C(\overline{\Omega})}\|\varphi_a\|_{C(\overline{\Omega})}}\varphi_a\leqslant\theta_{p,a,b}\leqslant\frac{a}{b_0},$$

其中 φ_a 是主特征值 $\sigma_1[-\nabla(p(x)\nabla);1]$ 对应的主特征函数.

对于问题(3),当 $v=0$ 时 u 满足

$$-d_u\Delta u=\lambda u-u^2,\ x\in\Omega,\ u=0,\ x\in\partial\Omega\tag{4}$$

根据引理 2.2,当且仅当 $\lambda>d_u\sigma_1[-\Delta;1]$ 时问题(4)存在半平凡解 $(\theta_{d_u,\lambda},0)$. 类似地,当 $u=0$ 时 v 满足

$$-d_v\Delta v=\mu v-v^2,\ x\in\Omega,\ v=0,\ x\in\partial\Omega\tag{5}$$

从而当且仅当 $\mu>d_v\sigma_1[-\Delta;1]$ 时问题(5)存在半平凡解 $(0,\theta_{d_v,\mu})$.

3　正解的存在性

3.1　先验估计

命题 3.1　如果 $\lambda\leqslant d_u\sigma_1[-\Delta;1]$，则(3)式无正解. 如果 $\lambda>d_u\sigma_1[-\Delta;1]$，则(3)式的任一正解 $(u,\ v)$ 满足 $u\leqslant\theta_{d_u,\lambda}\leqslant\lambda$，$v\leqslant e^{(\beta_v/d_v)\lambda}(\mu+c\lambda)$.

证明　假定 $(u,\ v)$ 是(3)式的一个正解. 将(3)式第一个方程的两边同乘 u 并在 Ω 上积分得

$$d_u\int_\Omega|\nabla u|^2\mathrm{d}x=\int_\Omega(\lambda-u-bv)u^2\mathrm{d}x<\lambda\int_\Omega u^2\mathrm{d}x.$$

由庞加莱不等式可得 $\int_\Omega|\nabla u|^2\mathrm{d}x\geqslant\sigma_1[-\Delta;1]\int_\Omega u^2\mathrm{d}x$，从而

$$d_u\sigma_1[-\Delta;1]\int_\Omega u^2\mathrm{d}x\leqslant d_u\int_\Omega|\nabla u|^2\mathrm{d}x<\lambda\int_\Omega u^2\mathrm{d}x.$$

当 $u>0$ 时，我们有 $\lambda>d_u\sigma_1[-\Delta;1]$. 故当 $\lambda\leqslant d_u\sigma_1[-\Delta;1]$ 时(3)式无正解.

假设 $x_1\in\overline{\Omega}$ 是 u 一个最大值点，即 $u(x_1)=\max_{\overline{\Omega}}u(x)$，则 $x_1\in\Omega$ 且

$$0\leqslant-d_u\Delta u(x_1)=u(x_1)(\lambda-u(x_1)-bv(x_1)),$$

从而有 $u(x_1)\leqslant\lambda-bv(x_1)\leqslant\lambda$. 则对所有 $x\in\overline{\Omega}$ 都有 $u(x)\leqslant\lambda$. 令 $W\coloneqq e^{(\beta_v/d_v)u}v$. 则由(3)式第二个方程知 W 满足方程

$$\begin{cases}-\nabla(d_v e^{-(\beta_v/d_v)u}\nabla W)=\\ \quad e^{-(\beta_v/d_v)u}W(\mu-e^{-(\beta_v/d_v)u}W+cu),\ x\in\Omega,\\ W=0,\ x\in\partial\Omega\end{cases}\tag{6}$$

设 $x_2\in\overline{\Omega}$ 是 W 的最大值点，$W(x_2)=\max_{\overline{\Omega}}W(x)$，且 $x_2\in\Omega$. 则有 $\nabla W(x_2)=0$ 和 $\Delta W(x_2)\leqslant0$. 简单计算可得

$$-\nabla(d_v e^{-(\beta_v/d_v)u}\nabla W)|_{x=x_2}=\beta_v e^{-(\beta_v/d_v)u}\nabla u\ \nabla W|_{x=x_2}-d_v e^{-(\beta_v/d_v)u}\Delta W|_{x=x_2}\geqslant0.$$

根据(6)式可得

$$W(x_2)\leqslant e^{(\beta_v/d_v)u(x_2)}(\mu+cu(x_2))\leqslant(\mu+c\lambda)e^{(\beta_v/d_v)\lambda}.$$

由于在 Ω 中 $v=e^{-(\beta_v/d_v)u}W\leqslant W$，命题得证.

命题 3.2　令 $\lambda>d_u\sigma_1[-\Delta;1]$. 假设 $(u,\ v)$ 是(3)式的任一正解. 则对任意 $p\in(1,\infty)$，总存在一个依赖于问题(3)的参数的正常数 M，满足 $\|(u,v)\|_{W^{2,p}(\Omega)}\leqslant M$.

证明　为简单起见，我们用 M_i 表示依赖于问题(3)的参数的正常数. 由命题 3.1，存在正常数 M_1 使得 $\|\frac{1}{d_u}(\lambda u-u^2-bv)\|_{L^p(\Omega)}\leqslant M_1$. 根据椭圆方程的 L^p-估计[7]，对所有 $p>1$，$\|u\|_{W^{2,p}(\Omega)}$ 有界，也就是说，存在一个正常数 M_2 使得 $\|u\|_{W^{2,p}(\Omega)}\leqslant M_2$. 因此，Sobolev 嵌入定理确保存在一个正常数 M_3 使得 $\|u\|_{C^1(\overline{\Omega})}\leqslant M_3$.

类似地，由椭圆方程的正则性理论[7]，存在一个正常数 M_4，使得

$$\|e^{(\beta_v/d_v)u}v\|_{C^1(\overline{\Omega})}=\|W\|_{C^1(\overline{\Omega})}\leqslant M_4.$$

因此，

$$\nabla v=\nabla(e^{-(\beta_v/d_v)u}W)=e^{-(\beta_v/d_v)u}\nabla W-(\beta_v/d_v)We^{-(\beta_v/d_v)u}\nabla u.$$

由三角不等式可得

$$|\nabla v|\leqslant|e^{-(\beta_v/d_v)u}\nabla W|+|(\beta_v/d_v)We^{-(\beta_v/d_v)u}\nabla u|\leqslant|\nabla W|+|(\beta_v/d_v)W\ \nabla u|,$$

从而存在一个正常数 M_5，使得 $|\nabla v|\leqslant M_5$. 结合命题 3.1，存在正常数 M_6，使得 $\|v\|_{C^1(\overline{\Omega})}\leqslant M_6$. 注意到问题(3)的第二个方程可改写为

$$\begin{cases}-\Delta v=\dfrac{1}{d_v}(\beta_v v\Delta u+\beta_v\ \nabla v\ \nabla u+\mu v-v^2+cuv),\\ \quad x\in\Omega,\\ v=0,\ x\in\partial\Omega,\end{cases}$$

且 $\|u\|_{C^1(\overline{\Omega})}\leqslant M_3$，$\|v\|_{C^1(\overline{\Omega})}\leqslant M_6$，故存在一个正常数 M_7，使得

$$\left\|\frac{1}{d_v}(\beta_v v\Delta u+\beta_v\ \nabla v\ \nabla u+\mu v-v^2+cuv)\right\|_{L^p(\Omega)}\leqslant M_7.$$

因此，根据椭圆方程的 L^p-估计可知，对所有的 $p>1$，$\|v\|_{W^{2,p}(\Omega)}$ 有界. 命题得证.

3.2　正解的不存在性

根据命题 3.1，当 $\lambda\leqslant d_u\sigma_1[-\Delta;1]$ 时，问题(3)没有正解. 下面的命题表明，当 $\lambda>d_u\sigma_1[-\Delta;1]$ 时，如果 μ 太小则问题(3)也没有正解.

命题 3.3　令 $\lambda>d_u\sigma_1[-\Delta;1]$. 则存在一个常数 $\underline{M}=\underline{M}(d_v,\beta_v,\lambda,c)$，使得当 $\mu\leqslant\underline{M}$ 时问题(3)没有正解.

证明　反设 $(u,\ v)$ 是(3)式的正解. 从(6)式可知 W 满足

$$\begin{cases}-\nabla(d_v e^{-(\beta_v/d_v)u}\nabla W)+(v-cu)e^{-(\beta_v/d_v)u}W=\\ \quad\mu e^{-(\beta_v/d_v)u}W,\ x\in\Omega,\\ W=0,\ x\in\partial\Omega,\end{cases}$$

其中 $W=\mathrm{e}^{(\beta_v/d_v)u}v$. 因为$(u,\ v)$是问题(3)的正解，所以在 Ω 中有 $W>0$. 由 Krein-Rutman 定理可得

$$\mu=\sigma_1[-\nabla(d_v\mathrm{e}^{-(\beta_v/d_v)u}\nabla)+(v-cu)\mathrm{e}^{-(\beta_v/d_v)u};\ \mathrm{e}^{-(\beta_v/d_v)u}].$$

由引理 2.1 及命题 3.1,我们有

$$\mu>\sigma_1[-d_v\mathrm{e}^{-(\beta_v/d_v)\lambda}\Delta-c\lambda;\mathrm{e}^{-(\beta_v/d_v)u}].$$

此外，由引理 2.1，$\sigma_1[-d_v\mathrm{e}^{-(\beta_v/d_v)\lambda}\Delta-c\lambda;\mathrm{e}^{-(\beta_v/d_v)u}]$ 关于 $\mathrm{e}^{-(\beta_v/d_v)u}$ 的单调性由 $\sigma_1[-d_v\mathrm{e}^{-(\beta_v/d_v)\lambda}\Delta-c\lambda;1]$决定. 则以下结论成立：

(a) 当 $\sigma_1[-d_v\mathrm{e}^{-(\beta_v/d_v)\lambda}\Delta-c\lambda;1]>0$ 时,$\mu>\sigma_1[-d_v\mathrm{e}^{-(\beta_v/d_v)\lambda}\Delta-c\lambda;1]$;

(b) 当 $\sigma_1[-d_v\mathrm{e}^{-(\beta_v/d_v)\lambda}\Delta-c\lambda;1]=0$ 时,$\mu>0$;

(c) 当 $\sigma_1[-d_v\mathrm{e}^{-(\beta_v/d_v)\lambda}\Delta-c\lambda;1]<0$ 时,$\mu>\sigma_1[-d_v\mathrm{e}^{-(\beta_v/d_v)\lambda}\Delta-c\lambda;\mathrm{e}^{-(\beta_v/d_v)\lambda}]$.

因此,存在一个常数 $\underline{M}=\underline{M}(d_v,\beta_v,\lambda,c)$使得当问题(3)有一个正解$(u,\ v)$时有 $\mu>\underline{M}$,从而当 $\mu\leqslant\underline{M}$ 时问题(3)没有正解. 证毕.

当 $\lambda>d_u\sigma_1[-\Delta;1]$时,下面的命题表明,如果 μ 太大问题(3)没有正解.

命题 3.4　如果 $\lambda>d_u\sigma_1[-\Delta;1]$,则存在正常数 $\bar{M}=\bar{M}(d_u,d_v,\beta_v,\lambda,c,b)$,使得当 $\mu\geqslant\bar{M}$ 时问题(3)无正解.

证明　假设结论不成立. 则对任意大的 $\mu>0$,问题(3)至少存在一个正解$(u,\ v)$. 根据命题 3.1,我们有 $1\leqslant\mathrm{e}^{(\beta_v/d_v)u}\leqslant\mathrm{e}^{(\beta_v/d_v)\lambda}$. 结合(6)式,我们有

$$-\nabla(d_v\mathrm{e}^{-(\beta_v/d_v)u}\nabla W)\geqslant\mu\mathrm{e}^{-(\beta_v/d_v)\lambda}W-W^2.$$

考虑问题

$$\begin{cases}-\mathrm{e}^{(\beta_v/d_v)\lambda}\nabla(d_v\mathrm{e}^{-(\beta_v/d_v)u}\nabla\varphi)=(\mu-\mathrm{e}^{(\beta_v/d_v)\lambda}\varphi)\varphi,\\ \quad x\in\Omega,\\ \varphi=0,\ x\in\partial\Omega\end{cases}\tag{7}$$

由引理 2.2 可知,当

$$\mu>\sigma_1[-\nabla(d_v\mathrm{e}^{(\beta_v/d_v)\lambda}e^{-(\beta_v/d_v)u}\nabla);1]$$

时,问题(7)有唯一正解,记为 θ^*. 由引理 2.2 有

$$\frac{\mu-\sigma_1[-\nabla(d_v\mathrm{e}^{(\beta_v/d_v)\lambda}\mathrm{e}^{-(\beta_v/d_v)u}\nabla);1]}{\mathrm{e}^{(\beta_v/d_v)\lambda}\ \|\varphi_\mu\|_{C(\bar{\Omega})}}\varphi_\mu\leqslant\theta^*.$$

其中 φ_μ 是$\sigma_1[-\nabla(d_v\mathrm{e}^{(\beta_v/d_v)\lambda}\mathrm{e}^{-(\beta_v/d_v)u}\nabla);1]$的特征函数，且 $\|\varphi_\mu\|_{L^2(\Omega)}=1$. 因为 u 依赖于 μ,所以 φ_μ 也依赖于 μ. 根据文献[6]中的引理 2.3,我们有 $\dfrac{\mu-\sigma_1[-\nabla(d_v\mathrm{e}^{(\beta_v/d_v)\lambda}e^{-(\beta_v/d_v)u}\nabla);1]}{\mathrm{e}^{(\beta_v/d_v)\lambda}\ \|\varphi_\mu\|_{C(\bar{\Omega})}}\varphi_\mu$ 是问题(7)的一个下解. 注意到 W 是(7)式的一个上解,则由上下解方法可知问题(7)的唯一正解满足

$$\frac{\mu-\sigma_1[-\nabla(d_v\mathrm{e}^{(\beta_v/d_v)\lambda}\mathrm{e}^{-(\beta_v/d_v)u}\nabla);1]}{\mathrm{e}^{(\beta_v/d_v)\lambda}\ \|\varphi_\mu\|_{C(\bar{\Omega})}}\varphi_\mu\leqslant\theta^*\leqslant W.$$

此外,由引理 2.1 和命题 3.1 可得

$$\sigma_1[-\nabla(d_v\mathrm{e}^{(\beta_v/d_v)\lambda}\mathrm{e}^{-(\beta_v/d_v)u}\nabla);1]\leqslant\sigma_1[-\nabla(d_v\mathrm{e}^{(\beta_v/d_v)\lambda}\nabla);1]=d_v\mathrm{e}^{(\beta_v/d_v)\lambda}\sigma_1[-\Delta;1].$$

进一步可得

$$\frac{\mu-d_v\mathrm{e}^{(\beta_v/d_v)\lambda}\sigma_1[-\Delta;1]}{\mathrm{e}^{(\beta_v/d_v)\lambda}\ \|\varphi_\mu\|_{C(\bar{\Omega})}}\varphi_\mu\leqslant\theta^*\leqslant W.$$

上式两边同除以 $\mathrm{e}^{(\beta_v/d_v)\lambda}$有

$$\frac{\mu-d_v\mathrm{e}^{(\beta_v/d_v)\lambda}\sigma_1[-\Delta;1]}{\mathrm{e}^{2(\beta_v/d_v)\lambda}\ \|\varphi_\mu\|_{C(\bar{\Omega})}}\varphi_\mu\leqslant\frac{\theta^*}{\mathrm{e}^{(\beta_v/d_v)\lambda}}\leqslant\frac{W}{\mathrm{e}^{(\beta_v/d_v)\lambda}}\leqslant v.$$

为书写方便,记 $s(\lambda):=d_v\mathrm{e}^{(\beta_v/d_v)\lambda}\sigma_1[-\Delta;1]$,$\tau(\mu):=\dfrac{\mu-s(\lambda)}{\mathrm{e}^{2(\beta_v/d_v)\lambda}\ \|\varphi_\mu\|_{C(\bar{\Omega})}}$. 则 $\tau(\mu)\varphi_\mu\leqslant W\leqslant v$. 根据文献[8]中的定理 4.1,$\|\varphi_\mu\|_{C(\bar{\Omega})}$关于 μ 一致有界,即存在不依赖于 μ 的一个正常数 M 使得 $\|\varphi_\mu\|_{C(\bar{\Omega})}\leqslant M$. 从而当$\mu\to\infty$时有 $\tau(\mu)\geqslant\dfrac{\mu-s(\lambda)}{\mathrm{e}^{2(\beta_v/d_v)\lambda}M}\to\infty$. 由问题(3)中的第一个方程及引理 2.1 可得

$$\lambda=\sigma_1[-d_u\Delta+u+bv;1]>\sigma_1[-d_u\Delta+b\tau(\mu)\varphi_\mu;1]:=g(\mu)\tag{8}$$

对于任意给定的 $\lambda>d_u\sigma_1[-\Delta;1]$,下面我们将证明

$$\lim_{\mu\to\infty}g(\mu)=+\infty\tag{9}$$

如果此结论成立,则(8)式与(9)式矛盾.

为证明(9)式,我们采用反证法. 根据主特征值的变分结构，我们有

$$g(\mu)=\inf_{\psi\in H_0^1(\Omega),\psi\neq0}\frac{d_u\int_\Omega|\nabla\psi|^2\mathrm{d}x+bt(\mu)\varphi_\mu\int_\Omega\psi^2\mathrm{d}x}{\int_\Omega\psi^2\mathrm{d}x}\tag{10}$$

假设 $g(\mu)$有界. 由引理 2.1 可知,存在一个序列 $\psi_\mu\in H_0^1(\Omega)$，$\|\psi_0\|_{L^2(\Omega)}=1$ 使得(10)式的下确界达到,则

$$\int_\Omega|\nabla\psi_\mu|^2\mathrm{d}x+b\tau(\mu)\int_\Omega\varphi_\mu\psi_\mu^2\mathrm{d}x=g(\mu)\tag{11}$$

由于 $g(\mu)$有界,从(10)式可以得 ψ_μ 在 $H_0^1(\Omega)$上有界. 因此,存在某个非负函数 $\psi_0\geqslant0$ 且 $\|\psi_0\|_{L^2(\Omega)}=1$,使得当 $\mu\to\infty$时,$\psi_\mu\to\psi_0$ 在 $H_0^1(\Omega)$空间弱收敛,$\psi_\mu\to\psi_0$ 在 $L^2(\Omega)$空间强收敛. 对于 φ_μ,根据主特征值的单调性和 $1\leqslant\mathrm{e}^{(\beta_v/d_v)u}\leqslant\mathrm{e}^{(\beta_v/d_v)\lambda}$可得

$$d_v\sigma_1[-\Delta;1]\leqslant\sigma_1[-\nabla(d_v\mathrm{e}^{(\beta_v/d_v)\lambda}\mathrm{e}^{-(\beta_v/d_v)u}\nabla);1]\leqslant\sigma_1[-\nabla(d_v\mathrm{e}^{(\beta_v/d_v)\lambda}\nabla);1].$$

因此，当 $\mu\to\infty$ 时 $\sigma_1[-\nabla(d_v e^{(\beta_v/d_v)\lambda}e^{-(\beta_v/d_v)u}\nabla);1]\to\sigma_0$. 注意到 φ_μ 满足

$$-\nabla(d_v e^{(\beta_v/d_v)\lambda}e^{-(\beta_v/d_v)u}\nabla\varphi_\mu)=\sigma_1[-\nabla(d_v e^{(\beta_v/d_v)\lambda}e^{-(\beta_v/d_v)u}\nabla);1]\varphi_\mu \tag{12}$$

上式两边同乘 φ_μ 积分可得

$$\begin{aligned}d_v\int_\Omega|\nabla\varphi_\mu|^2\mathrm{d}x&\leqslant\\ \int_\Omega d_v e^{(\beta_v/d_v)\lambda}e^{-(\beta_v/d_v)u}|\nabla\varphi_\mu|^2\mathrm{d}x&=\\ \sigma_1[-\nabla(d_v e^{(\beta_v/d_v)\lambda}e^{-(\beta_v/d_v)u}\nabla);1]\int_\Omega\varphi_\mu^2\mathrm{d}x&\leqslant\\ \sigma_1[-\nabla(d_v e^{(\beta_v/d_v)\lambda}\nabla);1].\end{aligned}$$

由此可知 φ_μ 在 $H_0^1(\Omega)$ 上有界. 因此，存在某个非负函数 $\varphi_0\geqslant0$ 且 $\|\psi_0\|_{L^2(\Omega)}=1$，使得当 $\mu\to\infty$ 时 $\varphi_\mu\to\varphi_0$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 空间弱收敛，$\varphi_\mu\to\varphi_0$ 在 $L^2(\Omega)$ 空间强收敛. 由椭圆方程的齐次化原理[9]知，存在一个对称矩阵 $A\in(L^\infty(\Omega))^{n\times n}$ 使得 $-\nabla(A\nabla\varphi_0)=\sigma_0\varphi_0$. 因 $\sigma_0\varphi_0\geqslant0$，由强极大值原理可得 $\varphi_0>0$. 进而从(10)式中可得 $\limsup\limits_{\mu\to\infty}\int_\Omega\varphi_\mu\psi_\mu^2=0$. 然而，我们又有 $\limsup\limits_{\mu\to\infty}\int_\Omega\varphi_\mu\psi_\mu^2=\int_\Omega\varphi_0\psi_0^2>0$. 矛盾. 证毕.

3.3　正解的存在性

现在我们利用分岔理论来建立问题(3)正解的存在性. 对任何 $\mu\in\mathbf{R}$，问题(3)存在平凡解分支 $\Gamma_0:=\{(\mu,0,0):\mu\in\mathbf{R}\}$. 当 μ 增加到 $d_v\sigma_1[-\Delta;1]$ 时，问题(3)存在一个半平凡解分支

$$\Gamma_v:=\{(\mu,0,\theta_{d_v,\mu}):\mu>d_v\sigma_1[-\Delta;1]\}.$$

由命题 3.1，当 $\lambda\leqslant d_u\sigma_1[-\Delta;1]$ 时问题(3)没有正解，从而问题(3)的所有非负解均落在 Γ_0 或 Γ_v 上.

假设 $\lambda>d_u\sigma_1[-\Delta;1]$. 此时问题(3)有一个半平凡解分支 $\Gamma_u:=\{(\mu,\theta_{d_u,\lambda},0):\mu\in\mathbf{R}\}$. 定义算子 $L:R\times W_0^{2,p}(\Omega)\times W_0^{2,p}(\Omega)\to L^p(\Omega)\times L^p(\Omega)$：

$$L(\mu,u,v)=\begin{pmatrix}-d_u\Delta u-\lambda u+u^2+buv\\ -\nabla(d_v\nabla v+\beta_v v\nabla v)-\mu v+v^2-cuv\end{pmatrix}.$$

显然，当且仅当 $L(\mu,u,v)=0$ 时 $(u,v)\in W_0^{2,p}(\Omega)\times W_0^{2,p}(\Omega)$ 是问题(3)的非负解. 简单计算可得

$$L_{(u,v)}(\mu,\theta_{d_u,\lambda},0)=\begin{pmatrix}-d_u\Delta-\lambda+2\theta_{d_u,\lambda} & b\theta_{d_u,\lambda}\\ 0 & -\nabla(d_v\nabla+\beta_v\nabla\theta_{d_u,\lambda})-\mu-c\theta_{d_u,\lambda}\end{pmatrix}.$$

令 $L_{(u,v)}(\mu,\theta_{d_u,\lambda},0)(\varphi,\psi)=0$. 我们有

$$\begin{cases}-d_u\Delta\varphi+(2\theta_{d_u,\lambda}-\lambda)\varphi=-b\theta_{d_u,\lambda}\psi,\ x\in\Omega,\\ -\nabla(d_v\nabla\psi+\beta_v\nabla\theta_{d_u,\lambda}\psi)-c\theta_{d_u,\lambda}\psi=\mu\psi,\\ \quad x\in\Omega,\\ \varphi=\psi=0,\ x\in\partial\Omega.\end{cases}$$

令 $\Psi=\psi e^{(\beta_v/d_v)\theta_{d_u,\lambda}}$. 以上问题可以重新写为

$$\begin{cases}-d_u\Delta\varphi+(2\theta_{d_u,\lambda}-\lambda)\varphi=\\ \quad -b\theta_{d_u,\lambda}e^{-(\beta_v/d_v)\theta_{d_u,\lambda}}\Psi,\ x\in\Omega,\\ -\nabla(d_v e^{-(\beta_v/d_v)\theta_{d_u,\lambda}}\nabla\Psi)-c\theta_{d_u,\lambda}e^{-(\beta_v/d_v)\theta_{d_u,\lambda}}\\ \quad \Psi=\mu e^{-(\beta_v/d_v)\theta_{d_u,\lambda}}\Psi,\ x\in\Omega,\\ \varphi=\Psi=0,\ x\in\partial\Omega\end{cases} \tag{13}$$

注意到 $\sigma_1[-d_u\Delta+\theta_{d_u,\lambda}-\lambda;1]=0$，由引理 2.1 可得 $\sigma_1[-d_u\Delta+2\theta_{d_u,\lambda}-\lambda;1]>\sigma_1[-d_u\Delta+\theta_{d_u,\lambda}-\lambda;1]=0$. 这保证了算子 $-d_u\Delta+2\theta_{d_u,\lambda}-\lambda:W_0^{2,p}(\Omega)\to W_0^{2,p}(\Omega)$ 是可逆的. 若问题(13)第二个方程有解，则问题(13)可解. 为了得到正解，分岔应在主特征值处，以保证特征函数为正. 由 Krein-Rutman 定理，当且仅当

$$\mu=\mu_\lambda:=\sigma_1[-\nabla(d_v e^{-(\beta_v/d_v)\theta_{d_u,\lambda}}\nabla)-c\theta_{d_u,\lambda}e^{-(\beta_v/d_v)\theta_{d_u,\lambda}};e^{-(\beta_v/d_v)\theta_{d_u,\lambda}}]$$

时，问题(13)的第二个方程有正解. 令 Ψ_{μ_λ} 为 μ_λ 对应的正的特征函数. 我们有

$$\ker[L_{(u,v)}(\mu_\lambda,\theta_{d_u,\lambda},0)]=\mathrm{span}\langle(\varphi_{\mu_\lambda},\psi_{\mu_\lambda})\rangle,$$

其中

$$\begin{cases}\Psi_{\mu_\lambda}=e^{-(\beta_v/d_v)\theta_{d_u,\lambda}}\Psi_{\mu_\lambda},\\ \varphi_{\mu_\lambda}=-(-d_u\Delta+2\theta_{d_u,\lambda}-\lambda)^{-1}\\ \quad (b\theta_{d_u,\lambda}e^{-(\beta_v/d_v)\theta_{d_u,\lambda}}\Psi_{\mu_\lambda}).\end{cases}$$

这意味着 $\ker[L_{(u,v)}(\mu_\lambda,\theta_{d_u,\lambda},0)]$ 是一维的.

下面我们证明

$$\mathrm{codim}\mathrm{Range}[L_{(u,v)}(\mu_\lambda,\theta_{d_u,\lambda},0)]=1.$$

设 $(h,k)\in\mathrm{Range}[L_{(u,v)}(\mu_\lambda,\theta_{d_u,\lambda},0)]$. 则存在 $(\varphi,\psi)\in W_0^{2,p}(\Omega)\times W_0^{2,p}(\Omega)$ 使得

$$\begin{cases}-d_u\Delta\varphi+(2\theta_{d_u,\lambda}-\lambda)\varphi+b\theta_{d_u,\lambda}\psi=h,\ x\in\Omega,\\ -\nabla(d_v\nabla\psi+\beta_v\nabla\theta_{d_u,\lambda}\psi)-(\mu_\lambda+c\theta_{d_u,\lambda})\psi=k,\\ \quad x\in\Omega,\\ \varphi=\psi=0,\ x\in\partial\Omega.\end{cases}$$

令 $\Psi=\psi e^{(\beta_v/d_v)\theta_{d_u,\lambda}}$. 则 Ψ 满足

$$\begin{cases} -\nabla(d_v \mathrm{e}^{-(\beta_v/d_v)\theta_{d_u,\lambda}} \nabla\Psi) - (c\theta_{d_u,\lambda} + \mu_\lambda) \\ \quad \mathrm{e}^{-(\beta_v/d_v)\theta_{d_u,\lambda}} \Psi = k,\ x\in\Omega, \\ \Psi=0,\ x\in\partial\Omega \end{cases} \tag{14}$$

因为算子 $-\nabla(d_v \mathrm{e}^{-(\beta_v/d_v)\theta_{d_u,\lambda}}\nabla) - (c\theta_{d_u,\lambda} + \mu_\lambda) \mathrm{e}^{-(\beta_v/d_v)\theta_{d_u,\lambda}}: W_0^{2,p}(\Omega)\rightarrow W_0^{2,p}(\Omega)$是自伴随的,根据 Fredholm 二择一定理,当且仅当$\int_\Omega k\Psi_{\mu_\lambda}\mathrm{d}x=0$时问题(14)式有一个非零解 Ψ. 再根据算子$-d_u\Delta+2\theta_{d_u,\lambda}-\lambda: W_0^{2,p}(\Omega)\rightarrow W_0^{2,p}(\Omega)$的可逆性有

$$\varphi=(-d_u\Delta+2\theta_{d_u,\lambda}-\lambda)^{-1} (h-b\theta_{d_u,\lambda}\mathrm{e}^{-(\beta_v/d_v))\theta_{d_u,\lambda}}\Psi),$$

从而

$$\mathrm{Range}[L_{(u,v)}(\mu_\lambda,\theta_{d_u,\lambda},0)]=\{\mathrm{span}\langle(0,\Psi_{\mu_\lambda})\rangle\}^\perp.$$

因此,$\mathrm{codimRange}[L_{(u,v)}(\mu_\lambda,\theta_{d_u,\lambda},0)]=1$.

接下来我们证明

$$L_{(u,v)_\mu}(\mu_\lambda,\theta_{d_u,\lambda},0)\begin{pmatrix}\varphi_{\mu_\lambda}\\ \psi_{\mu_\lambda}\end{pmatrix}\notin \mathrm{Range}[L_{(u,v)}(\mu_\lambda,\theta_{d_u,\lambda},0)] \tag{15}$$

简单计算可得

$$L_{(u,v)_\mu}(\mu_\lambda,\theta_{d_u,\lambda},0)\begin{pmatrix}\varphi_{\mu_\lambda}\\ \psi_{\mu_\lambda}\end{pmatrix}= \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi_{\mu_\lambda}\\ \psi_{\mu_\lambda}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ -\psi_{\mu_\lambda}\end{pmatrix}.$$

若(15)式不成立,则存在$(\varphi,\psi)\in W_0^{2,p}(\Omega)\times W_0^{2,p}(\Omega)$使得

$$\begin{cases} -d_u\Delta\varphi+(2\theta_{d_u,\lambda}-\lambda)\varphi+b\theta_{d_u,\lambda}\psi=0,\ x\in\Omega, \\ -\nabla(d_v\nabla\psi+\beta_v\nabla\theta_{d_u,\lambda}\psi)-(\mu_\lambda+c\theta_{d_u,\lambda})\psi= \\ \quad -\psi_{\mu_\lambda},\ x\in\Omega, \\ \varphi=\psi=0,\ x\in\partial\Omega. \end{cases}$$

若这个系统存在解(φ,ψ),则根据 Fredholm 二择一定理可知$\int_\Omega \psi_{\mu_\lambda}\Psi_{\mu_\lambda}\mathrm{d}x=\int_\Omega \mathrm{e}^{-(\beta_v/d_v)\theta_{d_u,\lambda}}\Psi_{\mu_\lambda}^2\mathrm{d}x=0$. 这与 $\Psi_{\mu_\lambda}>0$ 矛盾. 结论成立.

根据 Crandall 和 Rabinowitz 的局部分歧定理[10],总结上述分析后我们得到如下结果:

定理 3.5　对于给定的$\lambda>d_u\sigma_1[-\Delta;1]$,当且仅当 $\mu=\mu_\lambda$ 时问题(3)的正解会从半平凡解分支 $\Gamma_u=\{(\mu,\theta_{d_u,\lambda},0):\lambda\in\mathbf{R}\}$中分岔产生. 这就是说,在 $\mathbf{R}\times W_0^{2,p}(\Omega)\times W_0^{2,p}(\Omega)$空间中存在一个$(\mu,u,v)=(\mu_\lambda,\theta_{d_u,\lambda},0)$ 的邻域 N_1,使得 $L^{-1}(0)\cap N_1$ 由 $\Gamma_u\cap N_1$ 和如下局部曲线的并集组成:

$$(\mu(s),u(s),v(s))=(\mu_\lambda+\mu_\lambda(s),\theta_{d_u,\lambda}+ s(\varphi_{\mu_\lambda}+\varphi(s)),s(\psi_{\mu_\lambda}+\psi(s))),$$

其中 $s\in(-\delta,\delta)$,$\delta>0$,$(\mu_\lambda(s),\varphi(s),\psi(s))\in\mathbf{R}\times W_0^{2,p}(\Omega)\times W_0^{2,p}(\Omega)$ 连续可微,并且满足$(\mu_\lambda(0),\varphi(0),\psi(0))=(0,0,0)$. 因此 $L^{-1}(0)\cap N_1$ 中所包含的正解可以表示为

$$S_1 := \{(\mu_\lambda+\mu_\lambda(s),\theta_{d_u,\lambda}+s(\varphi_{\mu_\lambda}+\varphi(s)), s(\psi_{\mu_\lambda}+\psi(s))):s\in(0,\delta)\}.$$

接下来,我们进一步研究分岔曲线 S_1 在(μ_*,u,v)平面上的全局结构. 为此我们介绍如下的命题:

命题 3.6　令 $\lambda_\mu := \sigma_1[-d_u\Delta+c\theta_{d_v,\mu};1]$. 则 λ_μ 关于 μ 连续递增,且满足$\lim\limits_{\mu\rightarrow d_v\sigma_1[-\Delta;1]}\lambda_\mu=d_u\sigma_1[-\Delta;1]$和$\lim\limits_{\mu\rightarrow\infty}\lambda_\mu=\infty$.

证明　注意到当且仅当$\mu>d_v\sigma_1[-\Delta;1]$时问题(3)存在正解 $\theta_{d_v,\mu}$,又由引理 2.1 知主特征值关于势函数 $q(x)$ 单调递增,因而对任意 $\mu\in(d_v\sigma_1[-\Delta;1],\infty)$有 $d_u\sigma_1[-\Delta;1]\leqslant\lambda_\mu\leqslant\infty$. 因 $\theta_{d_v,\mu}$关于 μ 是连续的增函数,则引理 2.1 保证了 λ_μ 关于 μ 也是连续的增函数. 根据文献[11]中的命题 1.2 可知$\lim\limits_{\mu\rightarrow d_v\sigma_1[-\Delta;1]}\theta_{d_v,\mu}=0$ 在 Ω 上一致成立且$\lim\limits_{\mu\rightarrow\infty}d_v\sigma_1[-\Delta;1]=\infty$. 进一步,根据文献[11]中的命题 1.1 可得$\lim\limits_{\mu\rightarrow d_v\sigma_1[-\Delta;1]}\lambda_\mu=d_u\sigma_1[-\Delta;1]$且$\lim\limits_{\mu\rightarrow\infty}\lambda_\mu=\infty$. 证毕.

定理 3.7　假定 $\lambda>d_u\sigma_1[-\Delta;1]$. 则局部曲线 S_1 可被延伸成一个有界全局连续统,它会和另一个半平凡解分支 $\Gamma_v := \{(\mu,0,\theta_{d_v,\mu}):\mu>d_v\sigma_1[-\Delta;1]\}$在$(\mu^*,0,\theta_{d_v,\mu^*})$处相交,其中 μ^* 由 $\lambda=\lambda_{\mu^*}$ 唯一确定.

证明　记 P 为$C_0^1(\overline{\Omega})$上的正锥,且正锥 P 的内部用 $\mathrm{int}(P)$表示,它是非空的. 根据文献[12]中的定理 1.2,存在一个连续统 $C\subset\mathbf{R}\times\mathrm{int}(P)\times\mathrm{int}(P)$,使得 $S_1\subset C$,且连续统 C 满足以下结论中的一条:

(a) C 在 $\mathrm{R}\times C_0^1(\overline{\Omega})\times C_0^1(\overline{\Omega})$上是无界的;

(b) $(\mu^*,0,\theta_{d_v,\mu^*})\in\overline{C}$,其中 μ^* 由 $\lambda=\sigma_1[-d_u\Delta+c\theta_{d_v,\mu^*};1]$确定;

(c) 问题(3)存在另一个正解,记为 $\varphi_{d_u,\lambda}$ 且 $\varphi_{d_u,\lambda}\neq\theta_{d_u,\lambda}$,使得

$$(\sigma_1[-\nabla(d_v\mathrm{e}^{-(\beta_v/d_v)\varphi_{d_u,\lambda}}\nabla)- c\varphi_{d_u,\lambda}\mathrm{e}^{-(\beta_v/d_v)\varphi_{d_u,\lambda}};\mathrm{e}^{-(\beta_v/d_v)\theta_{d_u,\lambda}}],\varphi_{d_u,\lambda},0)\in\overline{C};$$

(d) $\lambda=d_u\sigma_1[-\Delta;1]$且$(d_u\sigma_1[-\Delta;1],0,0)\in\overline{C}$.

下面我们证明(a)(c)和(d)均不会发生.

因为$\lambda>d_u\sigma_1[-\Delta;1]$,所以(d)显然不会发

生. 根据引理 2.2，当 $\lambda > d_u\sigma_1[-\Delta;1]$ 时，问题(4)有唯一正解，这意味着(c)不会发生. 由命题 3.3 和 3.4 可知，当 μ 太大或太小时，问题(3)无正解. 进一步，根据命题 3.2，若 μ 是有界的则问题(3)的所有正解均在 $W^{2,p}(\Omega)\times W^{2,p}(\Omega)$ 上有界. 根据 Sobolev 紧嵌入定理，问题(3)的任意正解均在 $C_0^1(\overline{\Omega})\times C_0^1(\overline{\Omega})$ 上有界. 因而(a)也不能成立.

综上，问题(3)正解的连续统 C 必须满足(b)，即 $(\mu^*,0,\theta_{d_v,\mu^*})\in\bar{C}$. 进一步，命题 3.6 保证了对任给的 $\lambda > d_u\sigma_1[-\Delta;1]$，$\mu^*$ 是被唯一确定的. 定理得证.

4　结　论

本文主要关注一个含对流项的反应扩散捕食模型正解的存在性. 此类模型不仅描述了两物种间的捕食关系，也描述了捕食者远离高密度食饵区域的倾向. 基于模型正解的先验估计，本文利用特征值理论和齐次化理论建立了正解关于两物种增长率的不存在性结果，即当捕食者的生长速率太低或太高时两物种都无法共存. 然后，本文在不同的参数条件下利用分歧理论建立了正解的存在性，即当捕食者的生长速率适中时，两物种可以共存. 这些结果加深了我们对复杂捕食模型动力学行为的理解.

同时，也有一些值得进一步研究的问题，如：正解的共存区域如何精确依赖于对流系数，模型正解的在什么条件下具有唯一性，系统是否具有多解性，正解的稳定性如何判定，等等.

参考文献：

[1]　Leung A. Limiting behavior for a prey-predator model with diffusion and crowding effects [J]. J Math Biol, 1978, 6: 87.

[2]　Yi F, Wei J, Shi J. Bifurcation and spatiotemporal patterns in a homogeneous diffusive predator-prey system [J]. J Diff Equat, 2009, 246: 1944.

[3]　Pang Y H, Wang M. Qualitative analysis of a ratio-dependent predator-prey system with diffusion [J]. Proc Roy Soc Edinburgh Sect A Math, 2003, 133: 919.

[4]　Tulumello E, Lombardo M, Sammartino M. Cross-diffusion driven instability in a predator-prey system with cross-diffusion [J]. Acta Appl Math, 2014, 132: 621.

[5]　Zhang Y L. Existence of positive solutions for a calss of second-order difference equation Dirichlet boundary problems with sign-changing weight function [J]. J Sichuan Univ (Nat Sci Ed), 2020, 57: 455.[张亚莉. 一类带有变号权函数的二阶差分方程 Dirichlet 边值问题正解的存在性[J]. 四川大学学报(自然科学版), 2020, 57: 455.]

[6]　Cintra W, Morales-Rodrigo C, Suarez A. Coexistence states in a cross-diffusion system of a predator-prey model with predator satiation term [J]. Math Mod Meth Appl S, 2018, 28: 2131.

[7]　Gilbarg D, Trudinger N S. Elliptic partial differential equations of second order [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1983.

[8]　Stampacchia G. Le problème de Dirichlet pour les équations elliptiques du second ordre àcoefficients discontinus [J]. Ann I Fourier, 1965, 15: 189.

[9]　Kesavan S. Homogenization of elliptic eigenvalue problems [J]. Appl Math Opt, 1979, 5: 153.

[10]　Crandall M G, Rabinowitz P H. Bifurcation from simple eigenvalues [J]. J Funct Anal, 1970, 8: 321.

[11]　Yamada Y. Positive solutions for Lotka-Volterra systems with cross-diffusion [C]// Chipot M. Handbook of differential equations: stationary partial differential equations. Amsterdam: Elsevier, 2008.

[12]　Cintra W, Morales-Rodrigo C, Suarez A. Unilateral global bifurcation for a class of quasilinear elliptic systems and applications [J]. J Diff Equat, 2019, 267: 619.