Kerr-AdS 黑洞的基于独立联络形式拉氏量的守恒量

王　耀[1]，郭伟杰[1]，彭俊金[1,2]

(1. 贵州师范大学物理与电子科学学院，贵阳 550001；
2. 贵州师范大学贵州省射电天文数据处理重点实验室，贵阳 550001)

摘　要：基于爱因斯坦引力理论的独立联络形式，由诺特定理可以导出一个含任意参考背景仿射联络的推广 Katz-Bicak-Lynden-Bell(KBL)势，借此得到一个守恒量定义式. 本文把该定义式应用于渐近 anti-de Sitter(AdS)且转动的 Kerr-AdS 黑洞时空的质量与角动量的定义，给出了与其他标准方法一致的结果. 特别地，本文首次构造了一个比通常 KBL 超势中的参考背景联络更具一般性的新联络，相关结果表明 KBL 方法中的参考背景联络不具有唯一性，而对它的基本要求就是保持理论的协变性.

关键词：Kerr-AdS 黑洞；引力场的守恒荷；KBL 方法；Kerr 黑洞

中图分类号：O412.1　　**文献标志码**：A　　DOI：10.19907/j.0490-6756.2024.014004

Conserved quantities of Kerr-AdS black holes based on a connection independent Lagrangian

WANG Yao[1], *GUO Wei-Jie*[1], *PENG Jun-Jin*[1,2]

(1. School of Physics and Electronic Science, Guizhou Normal University, Guiyang 550001, China;
2. Guizhou Provincial Key Laboratory of Radio Astronomy and Data Processing, Guizhou Normal University, Guiyang 550001, China)

Abstract: On the basis of a connection-independent Lagrangian for Einstein gravity, a generalized Katz-Bicak-Lynden-Bell (KBL) potential that contains an arbitrary affine connection is derived. In light of the potential, a formula for conserved charges can be proposed. In the present paper, such a formula succeeds in the definition of the mass and angular momentum for Kerr-AdS black holes. Particularly, we have constructed a new more general reference background connection in comparison with the Levi-Civita one adopted in the KBL superpotential. This further demonstrates that the reference background connection in the KBL method is not unique and it plays a fundamental role in preserving the covariance of the gravity theory.

Keywords: Kerr-AdS black hole; Conserved charges for gravitational field; The KBL method; Kerr black hole

1　引　言

爱因斯坦引力理论中的各类黑洞时空是度规张量满足引力场运动方程的解，已有研究表明，从天体物理角度来看，其中最有意义的当属转动黑洞时空. 1963 年，著名学者 Kerr 找到了真空爱因斯

收稿日期：2023-05-17
基金项目：国家自然科学基金(11865006)；贵州省自然科学基金([2018]5769)
作者简介：王耀(1997－)，男，贵州遵义人，硕士研究生，主要从事相对论天体物理的研究.
通讯作者：彭俊金. E-mail：jjpeng@gznu.edu.cn

坦引力场方程的第一个转动、渐近平直的黑洞时空精确解[1]. 五年后,学者 Carter 找到了 Kerr 时空的含宇宙学常数的推广解[2]. 因该解在正宇宙学常数时渐近 de Sitter (dS) 而当宇宙学常数为负时渐近 anti-de Sitter(AdS),文献中常称之为 Kerr-dS 或 Kerr-AdS 黑洞. 若纳入电荷的贡献,进一步得到 Kerr-(A)dS 黑洞的带电推广,即更一般的稳态 Kerr-Newman-(A)dS 黑洞时空[3,4]. Kerr-(A)dS 黑洞不仅存在于四维时空中,还可以推广到任意高维爱因斯坦引力中[5].

自上世纪末发现 AdS/CFT 对应性以来,对渐近 AdS 黑洞的研究经久不衰,其中重要的关注对象之一便是 Kerr-AdS 黑洞. 为了探讨 Kerr-AdS 黑洞的热力学性质或开展与此相关的研究,往往需要确定其质量与角动量等守恒量. 因此,有必要寻找能够良好定义 Kerr-AdS 黑洞守恒量的方法. 目前为止,从多种角度着手,人们已经发展出一些能给出 Kerr-AdS 黑洞的有物理意义的守恒荷的经典方法[6-11],其中包括协变相空间方法[12-14],Katz-Bicak-Lynden-Bell (KBL)方法[15-17],以及 Abbott-Deser-Tekin (ADT)定义[18-20]等. 若能对这些已有方法进行实质性的改进,抑或提出新的方法,将丰富人们对 Kerr-AdS 黑洞守恒量的认识.

最近,在爱因斯坦引力框架下,学者 Harada 通过在著名的 Einstein-Hilbert 拉氏量之上增加一个含任意仿射联络的边界项,得到了所谓的联络独立的拉氏量形式[21]. 尽管边界项的变分对场的运动方程没有贡献,但是,由诺特定理可知,它会对守恒流和势带来贡献. 基于这一点,本文作者郭伟杰和彭俊金在文献[22]中得到了一个含任意参考背景联络的推广 KBL 超势,并由此进一步给出了爱因斯坦引力的一个守恒量定义式. 为了检验这样的一个定义式在渐近 AdS 时空中的适用性,本文将基于它探讨 Kerr-AdS 黑洞的质量与角动量的计算问题. 不仅如此,为了阐释 KBL 方法中参考背景联络的非唯一性问题,我们还将考虑寻找更一般的恰当的参考背景联络来计算守恒量. 期待相关结果能够对 Kerr-AdS 黑洞的守恒量定义以及 KBL 方法的本质认识提供一些新的途径.

2　基于独立联络形式拉氏量的爱因斯坦引力的守恒量定义式

广义相对论是关于引力几何属性的理论,在引力理论的度规形式下,刻画引力时空的基本几何量为度规张量 $g_{\mu\nu}$,借助度规张量及其对时空坐标的一阶导数又可定义与之相应的 Levi-Civita 联络 $\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}$(非张量型量),在度规与联络的基础上,就可定义时空几何的 Rieman 曲率张量并借此构造著名的 Einstein-Hilbert 拉氏量 $L_{\mathrm{EH}}=\sqrt{-g}\,(R-2\Lambda)$(这里 R 指代 Ricci 曲率标量,而 Λ 为宇宙学常数)来描述广义相对论. 文献[21]通过引入一个含任意仿射联络 $\widetilde{\Gamma}^{\rho}_{\mu\nu}$ 的额外全散度项,把通常的 Einstein-Hilbert 拉氏量表示成如下独立联络形式:

$$L_{\mathrm{CI\Lambda}}=\sqrt{-g}\,(R-2\Lambda+\nabla_{\mu}Y^{\mu}) \tag{1}$$

上式中,边界项 Y^{μ} 读取为:

$$Y^{\mu}=2P^{\mu\nu\rho\sigma}W_{\rho\nu\sigma} \tag{2}$$

这里与 Riemann 曲率张量具有相同指标对称性的四阶张量 $P^{\mu\nu\rho\sigma}$ 以及任意仿射联络 $\widetilde{\Gamma}^{\rho}_{\mu\nu}$ 与 Levi-Civita 联络 $\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}$ 的差值张量 $W^{\rho}_{\mu\nu}$ 依次定义为:

$$P^{\mu\nu\rho\sigma}=g^{\rho[\mu}g^{\nu]\sigma},\ W^{\rho}_{\mu\nu}=\widetilde{\Gamma}^{\rho}_{\mu\nu}-\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} \tag{3}$$

若拉氏量 $L_{\mathrm{CI\Lambda}}$ 对度规张量 $g_{\mu\nu}$ 与任意仿射联络 $\widetilde{\Gamma}^{\rho}_{\mu\nu}$ 变分,由变分原理可以得到含宇宙学常数 Λ 的真空爱因斯坦引力场运动方程.

$$R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}+\Lambda g_{\mu\nu}=0 \tag{4}$$

很显然,仿射联络 $\widetilde{\Gamma}^{\rho}_{\mu\nu}$ 对运动场方程没有贡献. 但是,根据诺特定理,它会对守恒流与势带来贡献,文献[22]已经表明,这一特性能够提供定义引力理论守恒量的又一有效途径. 在 Dirichlet 边界条件下,即在边界上 $\delta\widetilde{\Gamma}^{\rho}_{\mu\nu}$ 与 $\delta g_{\mu\nu}$ 二者同时消失,可以证明,边界项的变分可以抵消著名的 Gibbons-Hawking-York 边界项[23,24]的贡献. 不仅如此,联络 $\widetilde{\Gamma}^{\rho}_{\mu\nu}$ 的引入使得拉氏量 $L_{\mathrm{CI\Lambda}}$ 在任意仿射联络变换下仅会带来一个全散度项,如此不会改变场的运动方程. 并且,它还能保持整个理论的协变性. 特别地,当联络 $\widetilde{\Gamma}^{\rho}_{\mu\nu}$ 选取为与任意参考背景时空对应的 Levi-Civita 联络时,拉氏量 $L_{\mathrm{CI\Lambda}}$ 变成导出 KBL 超势的拉氏量[15-17].

考虑拉氏量 $L_{\mathrm{CI\Lambda}}$ 的由任意光滑矢量场 ζ^{μ} 为生成元的微分同胚对称性,利用诺特定理,得到与该对称性相对应的守恒流 $J^{\mu}=\nabla_{\nu}K^{\mu\nu}$. 诺特势为[22]

$$K^{\mu\nu}=\nabla^{[\mu}\zeta^{\nu]}+2\zeta^{[\mu}P^{\nu]\lambda\rho\sigma}W_{\rho\lambda\sigma} \tag{5}$$

值得指出的是,对拉氏量 $L_{\mathrm{CI\Lambda}}$ 进行 Weiss 型变分,亦可导出上述诺特势[25];相较于著名的 Komar 势[26],这里的势 $K^{\mu\nu}$ 多出了一个与边界项相关的项,如果忽略这样的一个额外项,质量与角动量的

Komar 积分公式之间会出现一个异常因子 2[15,27]．给定参考背景度规 $g_{(0)\mu\nu}$ 与仿射联络 $\tilde{\Gamma}^{\rho}_{(0)\mu\nu}$，拉氏量 $L_{\rm CI\Lambda}$ 与之对应的参考背景拉氏量：

$$L^{(0)}_{\rm CI\Lambda}=L_{\rm CI\Lambda}(g\to g_{(0)},\tilde{\Gamma}\to\tilde{\Gamma}_{(0)}) \tag{6}$$

同理，基于诺特定理，可以得到参考背景拉氏量 $L^{(0)}_{\rm CI\Lambda}$ 的与矢量场 ζ^{μ} 对应的守恒流 $J^{\mu}_{(0)}=\nabla_{(0)\nu}K^{\mu\nu}_{(0)}$，仅需要把(5)式中势 $K^{\mu\nu}$ 的度规张量与联络替换成相应的参考背景量就可得到这里的诺特势 $K^{\mu\nu}_{(0)}$，即

$$K^{\mu\nu}_{(0)}=\nabla^{[\mu}_{(0)}\zeta^{\nu]}+2\zeta^{[\mu}P^{\nu]\lambda\rho\sigma}_{(0)}W_{(0)\rho\lambda\sigma} \tag{7}$$

本文约定，在(7)式中，算符 $\nabla_{(0)}$ 是与背景度规张量 $g_{(0)\mu\nu}$ 相对应的协变导数算符，四阶张量 $P^{\mu\nu\rho\sigma}_{(0)}=g^{\rho[\mu}_{(0)}g^{\nu]\sigma}_{(0)}$，而张量 $W^{\rho}_{(0)\mu\nu}$ 定义为：

$$W^{\rho}_{(0)\mu\nu}=W^{\rho}_{\mu\nu}(\tilde{\Gamma}\to\tilde{\Gamma}_{(0)},\Gamma\to\Gamma_{(0)})=\tilde{\Gamma}^{\rho}_{(0)\mu\nu}-\Gamma^{\rho}_{(0)\mu\nu} \tag{8}$$

由拉氏量 $L_{\rm CI\Lambda}$ 减去参考背景拉氏量 $L^{(0)}_{\rm CI\Lambda}$ 得到：

$$\hat{L}_{\rm CI\Lambda}=L_{\rm CI\Lambda}-L^{(0)}_{\rm CI\Lambda} \tag{9}$$

又一次利用诺特定理，得到拉氏量 $\hat{L}_{\rm CI\Lambda}$ 的与矢量场 ζ^{μ} 生成的对称性相对应的守恒流：

$$\hat{J}^{\mu}=J^{\mu}-\frac{\sqrt{-g_{(0)}}}{\sqrt{-g}}J^{\mu}_{(0)}=\nabla_{\nu}\hat{K}^{\mu\nu} \tag{10}$$

让 $\sqrt{-g}K^{\mu\nu}$ 与 $\sqrt{-g_{(0)}}K^{\mu\nu}_{(0)}$ 二者做差得到上式中的诺特势 $\hat{K}^{\mu\nu}$，其取值[22]：

$$\hat{K}^{\mu\nu}=K^{\mu\nu}_{\rm KBL}-\zeta^{[\mu}g^{\nu]\sigma}(\Delta\tilde{\Gamma})^{\rho}_{\rho\sigma}+g^{\rho\sigma}\zeta^{[\mu}(\Delta\tilde{\Gamma})^{\nu]}_{\rho\sigma}-\zeta^{[\mu}(\Delta g)^{\nu]\sigma}W^{\rho}_{(0)\rho\sigma}+(\Delta g)^{\rho\sigma}\zeta^{[\mu}W^{\nu]}_{(0)\rho\sigma} \tag{11}$$

上式中，度规张量之间的差值 $(\Delta g)^{\mu\nu}$ 以及联络之间的差值 $(\Delta\tilde{\Gamma})^{\rho}_{\mu\nu}$ 分别定义为：

$$(\Delta g)^{\mu\nu}=g^{\mu\nu}-\frac{\sqrt{-g_{(0)}}}{\sqrt{-g}}g^{\mu\nu}_{(0)},\quad (\Delta\tilde{\Gamma})^{\rho}_{\mu\nu}=\tilde{\Gamma}^{\rho}_{\mu\nu}-\tilde{\Gamma}^{\rho}_{(0)\mu\nu} \tag{12}$$

而爱因斯坦引力理论的 KBL 超势 $K^{\mu\nu}_{\rm KBL}$ 取值[15-17]：

$$K^{\mu\nu}_{\rm KBL}=\frac{1}{\sqrt{-g}}\left(\sqrt{-g}K^{\mu\nu}(\tilde{\Gamma}\to\Gamma_{(0)})-\sqrt{-g_{(0)}}K^{\mu\nu}_{(0)}(\tilde{\Gamma}_{(0)}\to\Gamma_{(0)})\right) \tag{13}$$

由(11)式可以看到，当任意联络，参考背景联络以及与参考背景度规对应的 Levi-Civita 联络三者彼此完全相同时，即 $\tilde{\Gamma}^{\rho}_{\mu\nu}=\tilde{\Gamma}^{\rho}_{(0)\mu\nu}=\Gamma^{\rho}_{(0)\mu\nu}$ 时，势 $\hat{K}^{\mu\nu}$ 与经典的 KBL 超势 $K^{\mu\nu}_{\rm KBL}$ 完全一致，与此同时，拉氏量 $\hat{L}_{\rm CI\Lambda}$ 也回到了导出 KBL 超势的拉氏量[15-17]．

$$L_{\rm KBL}=\sqrt{-g}\left[R-2\Lambda+\nabla^{\mu}(\Gamma^{\rho}_{\rho\mu}-\Gamma^{\rho}_{(0)\rho\mu})-g^{\rho\sigma}\nabla_{\mu}(\Gamma^{\mu}_{\rho\sigma}-\Gamma^{\mu}_{(0)\rho\sigma})\right]-\sqrt{-g_{(0)}}(R_0-2\Lambda) \tag{14}$$

这里，$R_0=R(g\to g_{(0)})$．基于此，势 $\hat{K}^{\mu\nu}$ 可看作 KBL 超势 $K^{\mu\nu}_{\rm KBL}$ 的含任意仿射联络的推广．文献[22]中已经证明，在 Dirichlet 边界条件下，势 $\hat{K}^{\mu\nu}$ 的线性扰动 $\delta\hat{K}^{\mu\nu}$ 与爱因斯坦引力的 Iyer-Wald 势[12-14]完全一致．此外，当与任意联络及其参考背景联络相关部分的贡献可以忽略时，$\delta\hat{K}^{\mu\nu}$ 与 ADT 势也完全相同[18-20]．注意到联络 $\tilde{\Gamma}^{\rho}_{\mu\nu}$ 与 $\tilde{\Gamma}^{\rho}_{(0)\mu\nu}$ 的任意性，简单起见且不失一般性，可令 $\tilde{\Gamma}^{\rho}_{\mu\nu}=\tilde{\Gamma}^{\rho}_{(0)\mu\nu}$，此时，势 $\hat{K}^{\mu\nu}$ 简化为：

$$K^{\mu\nu}_{g\rm KBL}=K^{\mu\nu}_{\rm KBL}-\zeta^{[\mu}(\Delta g)^{\nu]\sigma}W^{\rho}_{(0)\rho\sigma}+(\Delta g)^{\rho\sigma}\zeta^{[\mu}W^{\nu]}_{(0)\rho\sigma} \tag{15}$$

与之对应的拉氏量为 $\hat{L}_{\rm CI\Lambda}(\tilde{\Gamma}\to\tilde{\Gamma}_{(0)})$，分析 KBL 超势 $K^{\mu\nu}_{\rm KBL}$ 与势 $K^{\mu\nu}_{g\rm KBL}$ 二者的结构可知，前者中参考背景联络由 Levi-Civita 联络 $\Gamma^{\rho}_{(0)\mu\nu}$ 唯一地确定，形式上相对简单，而后者中参考联络 $\tilde{\Gamma}^{\rho}_{(0)\mu\nu}$ 是任意自由的，形式上更具一般性．一旦对 $\tilde{\Gamma}^{\rho}_{(0)\mu\nu}$ 进行限制（一种简单操作就是直接令 $W^{\rho}_{(0)\mu\nu}=0$），使得与其相关的项乘以因子 $\sqrt{-g}$ 对 $\sqrt{-g}K^{\mu\nu}_{g\rm KBL}$ 没有贡献，则势 $K^{\mu\nu}_{g\rm KBL}$ 与 $K^{\mu\nu}_{\rm KBL}$ 二者对守恒量的贡献完全等价．由此可见，在保持爱因斯坦引力的拉氏量协变性这一基本前提条件下，作为 KBL 方法出发点的拉氏量中的参考联络并不是唯一的．这一点将在下一节中通过具体计算 Kerr-AdS 黑洞的质量与角动量来进一步阐释．

在势 $K^{\mu\nu}_{g\rm KBL}$ 的基础上，可以进一步定义爱因斯坦引力理论的守恒量．一般地，若 D 维时空流形的 (D-1)维超曲面 Σ 具有封闭边界 $\partial\Sigma$，基于势 $K^{\mu\nu}_{g\rm KBL}$ 的守恒量 Q 定义为：

$$Q=\frac{1}{8\pi}\int_{\partial\Sigma}\bigstar K_{g\rm KBL} \tag{16}$$

上式中的算符★指代通常的霍奇星算子．特别地，当曲面 $\partial\Sigma$ 落在某一坐标 $x=x_0$ 处，且参考背景度规 $g_{(0)\mu\nu}=g_{\mu\nu}|_{x=x_0}$，此时，因 $(\sqrt{-g}\,g_{\mu\nu})|_{x=x_0}=\sqrt{-g_{(0)}}\,g_{(0)\mu\nu}$，则势 $K^{\mu\nu}_{g\rm KBL}$ 中含 $(\Delta g)^{\mu\nu}$ 项对守恒荷的贡献可以忽略，这样，可以直接不予考虑这些项，如此也就回避了参考背景联络 $\tilde{\Gamma}^{\rho}_{(0)\mu\nu}$ 的选取问题．此外，当把(16)式用于定义时空的质量与角动量等时，由于 $\tilde{\Gamma}^{\rho}_{(0)\mu\nu}$ 的任意性，而势 $K^{\mu\nu}_{g\rm KBL}$ 覆盖通常的 KBL 超势，遵循简单化原则，可以直接令参考背景联络 $\tilde{\Gamma}^{\rho}_{(0)\mu\nu}$ 等于由参考背景度规 $g_{(0)\mu\nu}$ 定义的 Levi-

Civita 联络 $\Gamma^{\varrho}_{(0)\mu\nu}$.

3 Kerr-AdS 黑洞的质量与角动量

在本节中,基于上一节得到的守恒荷定义式(16),我们将在两种不同参考背景联络之下具体计算四维 Kerr-AdS 黑洞的质量与角动量这两个守恒量.

学者 Carter 在 1968 年找到了广义相对论中带宇宙学常数的转动不带电 Kerr-(A)dS 黑洞解[2],该解可看作转动中性 Kerr 黑洞解[1]的含宇宙学常数推广. 在 $\{x^{\mu}=(t,r,\theta,\varphi)\}$ 坐标下,让积分常量 m 与 a 分别指代与质量和角动量相关的参量,且常量 $\Xi=1-l^2a^2$(在四维时空中,参量 l 与负宇宙学常数的关系为 $l^2=-\Lambda/3$),渐近 AdS 的 Kerr-AdS 黑洞的时空线元由 Kerr-Schild 形式表示为:

$$\mathrm{d}s^2_{\mathrm{KS}}=\mathrm{d}s^2_{(0)}+\frac{2mr}{\Sigma}l_{\mu}l_{\nu}\mathrm{d}x^{\mu}\mathrm{d}x^{\nu} \tag{17}$$

其中四维 AdS 时空线元 $\mathrm{d}s^2_{(0)}$(其 Riemann 曲率张量 $R_{\mu\nu\rho\sigma}=-2l^2g_{\rho[\mu}g_{\nu]\sigma}$)有如下形式[5]:

$$\mathrm{d}s^2_{(0)}=-\frac{\Delta_2\Delta_\theta}{\Xi}\mathrm{d}t^2+\frac{\Sigma}{\Delta_1\Delta_2}\mathrm{d}r^2+\frac{\Sigma}{\Delta_\theta}\mathrm{d}\theta^2+\frac{\Delta_1\sin^2\theta}{\Xi}\mathrm{d}\varphi^2 \tag{18}$$

而类光矢量 l_{μ} 表示成:

$$l_{\mu}=\left(\frac{\Delta_\theta}{\Xi},\frac{\Sigma}{\Delta_1\Delta_2},0,-\frac{a\sin^2\theta}{\Xi}\right) \tag{19}$$

若计算矢量 l_{μ} 与自身的内积将发现其恒定满足 $g^{\mu\nu}l_{\mu}l_{\nu}=g^{\mu\nu}_{(0)}l_{\mu}l_{\nu}=0$. 在(17)(18)与(19)三式中,四个函数 $\Delta_1,\Delta_2,\Delta_\theta$ 与 Σ 依次读取为:

$$\Delta_1=r^2+a^2,\ \Delta_2=1+l^2r^2,\ \Delta_\theta=\Xi+a^2l^2\sin^2\theta,\ \Sigma=r^2+a^2\cos^2\theta \tag{20}$$

可以验证,时空线元 ds^2_{KS} 与 $ds^2_{(0)}$ 均是真空爱因斯坦引力场方程(4)的精确解. 特别地,当 $l=0$,即宇宙学常数消失时,(17)式变成渐近平直 Kerr 黑洞的时空线元[1].

基于 Kerr-AdS 黑洞的 Kerr-Schild 形式(17),我们计算它的质量 M,与之对应的类时 Killing 矢量场通常选取为 $\xi^{\mu}_{(t)}=(-1,0,0,0)$. 参考背景的时空线元直接由 AdS 时空线元 $\mathrm{d}s^2_{(0)}$ 确定. 简单起见,直接令参考联络 $\tilde{\Gamma}^{\varrho}_{(0)\mu\nu}=\Gamma^{\varrho}_{(0)\mu\nu}$. 在这些条件下,计算势 $K^{\mu\nu}_{g\mathrm{KBL}}$ 的 (t,r) 分量得到:

$$\sqrt{-g}K^{tr}_{g\mathrm{KBL}}(\xi_{t})=\frac{2m\Xi\sin\theta+3m(1-\Xi)\sin^3\theta}{\Xi^2}+O\left(\frac{1}{r}\right) \tag{21}$$

把上式代入公式(16)并在无穷远处($r=\infty$)对曲面 $\partial\Sigma$ 积分,得到 Kerr-AdS 黑洞的质量:

$$M=\frac{m}{\Xi^2} \tag{22}$$

比较可知,这里的质量 M 与文献中通过其他经典方法,包括协变相空间方法,KBL 方法与 ADT 定义等得到的结果完全一致[6, 28-32]. 此外,因为 $\sqrt{-g}(\Delta g)^{\mu\nu}|_{r=\infty}\neq 0$,我们还可以考虑其他更具一般性的能够给出(22)式中有物理意义质量的参考联络 $\tilde{\Gamma}^{\varrho}_{(0)\mu\nu}$,它的部分分量 $\tilde{\Gamma}^{r}_{(0)\alpha\beta}$ $(\alpha\beta\neq rr;\alpha,\beta\neq\theta)$,$\tilde{\Gamma}^{\varphi}_{(0)\omega t}$ 与 $\tilde{\Gamma}^{\varphi}_{(0)\omega\varphi}$ 要求满足以下条件:

$$\begin{aligned}&\tilde{\Gamma}^{r}_{(0)\rho\sigma}=\Gamma^{r}_{(0)\rho\sigma}+O(r^{p_{\rho\sigma}+3}),\ (\rho,\sigma=t,\varphi)\\&\tilde{\Gamma}^{r}_{(0)\mu\nu}=\Gamma^{r}_{(0)\mu\nu}+O(r^{p_{\mu\nu}+1}),\ (\mu\nu=tr,rt)\\&\tilde{\Gamma}^{r}_{(0)\gamma\lambda}=\Gamma^{r}_{(0)\gamma\lambda}+O(r^{p_{\gamma\lambda}+1}),\ (\gamma\lambda=r\varphi,\varphi r)\\&\tilde{\Gamma}^{\varphi}_{(0)\omega\sigma}=\Gamma^{\varphi}_{(0)\omega\sigma}+O(r^{p_{\omega\sigma}+1}),\ (\omega=t,r,\theta,\varphi;\sigma=t,\varphi)\end{aligned} \tag{23}$$

(23)式中任意常参量 $p_{\alpha\beta}<0$ $(\alpha\beta=\rho\sigma,\mu\nu,\gamma\lambda,\omega\sigma)$. 若势 $K^{\mu\nu}_{gKBL}$ 中与参考联络相关部分记为 $(\Delta K)^{\mu\nu}=-\zeta^{[\mu}(\Delta g)^{\nu]\sigma}W^{\varrho}_{(0)\rho\sigma}+(\Delta g)^{\rho\sigma}\zeta^{[\mu}W^{\nu]}_{(0)\rho\sigma}$,在条件(23)下,它的 (t,r) 分量取值:

$$\sqrt{-g}(\Delta K)^{tr}(\xi_{t})=-\frac{mr\sin\theta}{\Xi}(W^{\varphi}_{(0)\varphi r}-W^{r}_{(0)rr})+O(r^{p}) \tag{24}$$

这里 $p=\max\{p_{\alpha\beta}\}$. 鉴于(24)式,为了确保 $(\Delta K)^{\mu\nu}$ 对质量没有贡献,还需要额外条件:

$$\tilde{\Gamma}^{t}_{(0)tr}+\tilde{\Gamma}^{\theta}_{(0)\theta r}+\tilde{\Gamma}^{\varphi}_{(0)\varphi r}=\Gamma^{t}_{(0)tr}+\Gamma^{\theta}_{(0)\theta r}+\Gamma^{\varphi}_{(0)\varphi r}+O(r^{q-1}) \tag{25}$$

(25)式中任意常参量 $q<0$,或者稍强一点的如下条件:

$$\tilde{\Gamma}^{t}_{(0)tr}=\Gamma^{t}_{(0)tr}+(r^{q_1-1}),\ \tilde{\Gamma}^{\theta}_{(0)\theta r}=\Gamma^{\theta}_{(0)\theta r}+(r^{q_2-1}),\ \tilde{\Gamma}^{\varphi}_{(0)\varphi r}=\Gamma^{\varphi}_{(0)\varphi r}+(r^{q_3-1}) \tag{26}$$

上式中,要求任意常参量 $q_1,q_2,q_3\leqslant q<0$. 综合可得,同时满足条件(23)与(25)的参考背景联络 $\tilde{\Gamma}^{\varrho}_{(0)\mu\nu}$ 是恰当的,因为它能够确保 $\sqrt{-g}(\Delta K)^{tr}=O(r^{p})+O(r^{q})$ 在类空无穷远处消失,从而使得势 $K^{\mu\nu}_{gKBL}$ 的积分给出 Kerr-AdS 黑洞的质量 M. 并且,等于 Levi-Civita 联络 $\Gamma^{\varrho}_{(0)\mu\nu}$ 的参考背景联络是受条件(23)与(25)二者约束的参考背景联络的一种特殊情形($p,q\to-\infty$).

计算 Kerr-AdS 黑洞的角动量时,与此对应的

类空 Killing 矢量场通常选取为 $\xi^{\mu}_{(\varphi)}=(0,0,0,1)$. 由于该矢量的$(t,r)$分量均为零，因此，势 $K^{\mu\nu}_{g\mathrm{KBL}}$ 中与联络差值相关的所有项均对角动量不做贡献，此时，势 $K^{\mu\nu}_{g\mathrm{KBL}}$ 完全可由减去参考背景时空贡献的 Komar 势：

$$J^{\mu\nu}=\nabla^{[\mu}\xi^{\nu]}_{(\varphi)}-\frac{\sqrt{-g_{(0)}}}{\sqrt{-g}}\nabla^{[\mu}_{(0)}\xi^{\nu]}_{(\varphi)} \tag{27}$$

替代. 基于时空线元(17)计算 $\sqrt{-g}J^{\mu\nu}$ 得到

$$\sqrt{-g}J^{tr}=2\left(\frac{\Delta_1^2}{\Sigma^2}+\frac{\Delta_1}{2\Sigma}-\frac{a^2}{\Sigma}-\frac{a^2\Delta_1}{\Sigma^2}\right)J\sin^3\theta \tag{28}$$

(28)式中的常量：

$$J=\frac{ma}{\Xi^2} \tag{29}$$

便是把 $\sqrt{-g}J^{tr}$ 代入守恒荷定义式(16)积分得到的 Kerr-AdS 黑洞的角动量. 它正好是 Komar 积分给出的角动量[26]，也与其它方法得到的结果完全吻合[6, 28-32].

当然，除了上述考虑的 Kerr-Schild 坐标系统，也可以考虑在其它坐标系统下，比如 Boyer-Lindquist 坐标下计算 Kerr-AdS 黑洞的质量和角动量. 如果对 Kerr-Schild 形式的时空线元(17)的 t 与 φ 坐标执行如下坐标变换：

$$\mathrm{d}t\to\mathrm{d}t+\frac{2mr}{\Delta_2(\Delta_1\Delta_2-2mr)}\mathrm{d}r,$$
$$\mathrm{d}\varphi\to\mathrm{d}\varphi+\frac{2mar}{\Delta_1(\Delta_1\Delta_2-2mr)}\mathrm{d}r \tag{30}$$

就可得到 Kerr-AdS 黑洞的 Boyer-Lindquist 坐标下的时空线元. 由于守恒荷定义式(16)是协变的，因此，只需要利用上述坐标变换关系，再来利用张量之间相应的坐标转换关系就能导出(22)与(29)两式给出的结果. 此外，若把守恒荷定义式(16)应用于五维最小超引力中转动带电渐近 AdS 黑洞的质量与角动量的计算，亦可得到文献[33] 给出的有物理意义的结果.

4　结果与讨论

在广义相对论的联络不依赖拉氏量(1)的基础上，由诺特定理推导出了(15)式中的与时空微分同胚对称性一一对应的势 $K^{\mu\nu}_{g\mathrm{KBL}}$，它可以看作是通常的 KBL 超势含任意参考背景联络 $\widetilde{\Gamma}^{\rho}_{(0)\mu\nu}$ 的推广. 基于势 $K^{\mu\nu}_{g\mathrm{KBL}}$ 进一步得到了守恒荷定义式(16). 为了检验该定义的有效性，我们分别在 $\widetilde{\Gamma}^{\rho}_{(0)\mu\nu}$ 等于定义在参考背景度规之上的 Levi-Civita 联络 $\Gamma^{\rho}_{(0)\mu\nu}$ 以及更具一般性的受条件(23)与(25)限制的 $\widetilde{\Gamma}^{\rho}_{(0)\mu\nu}$ 两种不同参考背景联络下详细计算了 Kerr-AdS 的质量与角动量，得到了由其他标准方法给出的一致性结果. 相关结果表明，在保持整个理论体系的协变性要求下，KBL 方法中的参考背景联络并不是唯一的，但是，当参考背景联络回到基于参考背景度规的 Levi-Civita 联络时，势也相应地变成通常的 KBL 超势，它的表达式在形式上最为简单.

尽管本文仅探讨了中性转动且渐近 AdS 的 Kerr-AdS 黑洞，对于它的带电对应体，即 Kerr-Newman-AdS 黑洞[3, 4]，计算表明，守恒荷定义(16)式同样能够给出该黑洞的有物理意义的质量和角动量. 其次，对于四维 Kerr-AdS 黑洞的任意高维推广[5]，当参考背景联络选定为由参考背景度规定义的 Levi-Civita 联络时，如文献[28]所示，(16)式同样适用于这些黑洞的质量与角动量定义，而如何找出类似于受条件(23)与(25)限制的参考背景联络，需要进一步的探讨. 再次，在 KBL 方法、ADT 定义以及本文采纳的方法中，守恒量的计算均需要预先选定好恰当的参考背景度规，受著名的协变相空间方法启示，是否能够利用时空度规张量中包含的自由常参量生成的解空间而在计算过程中回避这一环节，非常值得在未来的工作中进行探究. 最后，四维 Kerr-AdS 黑洞也可以是由 Einstein-Hilbert 拉氏量耦合高阶曲率项而得到的修正引力理论的解. 相应地，需要考虑高阶导数项对其守恒量带来的可能修正. 自然地，如何把本文的方法推广到当前倍受关注的含高阶导数项的修正引力理论，也是一个非常值得深入探讨的问题.

参考文献：

[1] Kerr R P. Gravitational field of a spinning mass as an example of algebraically special metrics [J]. Phys Rev Lett, 1963, 11: 237.

[2] Carter B. Hamilton-Jacobi and Schrödinger separable solutions of Einstein's equations [J]. Commun Math Phys, 1968, 10: 280.

[3] Newman E T, Couch E, Chinnapared K, *et al*. Metric of a rotating, charged mass [J]. J Math Phys, 1965, 6: 918.

[4] Gibbons G W, Hawking S W. Cosmological event horizons, thermodynamics, and particle creation [J]. Phys Rev D, 1977, 15: 2738.

[5] Gibbons G W, Lu H, Page D N, *et al*. The general Kerr-de Sitter metrics in all dimensions [J]. J Geom Phys, 2005, 53: 49.
[6] Peng J J, Zou C L, Liu H F. A Komar-like integral for mass and angular momentum of asymptotically AdS black holes in Einstein gravity [J]. Phys Scr, 2021, 96: 125207.
[7] Ashtekar A, Magnon A. Asymptotically anti-de Sitter space-times [J]. Class Quantum Grav, 1984, 1: L39.
[8] Ashtekar A, Das S. Asymptotically Anti-de Sitter space-times: conserved quantities [J]. Class Quantum Grav, 2000, 17: L17.
[9] Brown J D, York J W. Quasilocal energy and conserved charges derived from the gravitational action [J]. Phys Rev D, 1993, 47: 1407.
[10] Balasubramanian V, Kraus P A. Stress tensor for Anti-de Sitter gravity [J]. Commun Math Phys, 1999, 208: 413.
[11] Kraus P, Larsen F, Siebelink R. The gravitational action in asymptotically AdS and flat space-times [J]. Nucl Phys B, 1999, 563: 259.
[12] Lee J, Wald R M. Local symmetries and constraints [J]. J Math Phys, 1990, 31: 725.
[13] Iyer V, Wald R M. Some properties of the Noether charge and a proposal for dynamical black hole entropy [J]. Phys Rev D, 1994, 50: 846.
[14] Wald R M, Zoupas A. General definition of 'conserved quantities' in general relativity and other theories of gravity [J]. Phys Rev D, 2000, 61: 084027.
[15] Katz J. A note on Komar's anomalous factor [J]. Class Quantum Grav, 1985, 2: 423.
[16] Lynden-Bell D, Katz J, BicaK J. Mach's principle from the relativistic constraint equations [J]. Mon Not R Astron Soc, 1995, 272: 150.
[17] Katz J, Bicak J, Lynden-Bell D. Relativistic conservation laws and integral constraints for large cosmological perturbations [J]. Phys Rev D, 1997, 55: 5957.
[18] Abbott L F, Deser S. Stability of gravity with a cosmological constant [J]. Nucl Phys B, 1982, 195: 76.
[19] Abbott L F, Deser S. Charge definition in non-abelian gauge theories [J]. Phys Lett B, 1982, 116: 259.
[20] Deser S, Tekin B. Gravitational energy in quadratic curvature gravities [J]. Phys Rev Lett, 2002, 89: 101101.
[21] Harada J. Connection independent formulation of general relativity [J]. Phys Rev D, 2020, 101: 024053.
[22] Guo W J, Peng J J. Conserved charges of Einstein gravity in a connection independent formulation [J]. Int J Mod Phys A, 2022, 37: 2250150.
[23] Gibbons G W, Hawking S W. Action integrals and partition functions in quantum gravity [J]. Phys Rev D, 1977, 15: 2752.
[24] York J W. Role of conformal three-geometry in the dynamics of gravitation [J]. Phys Rev Lett, 1972, 28: 1082.
[25] Feng J C, Chakraborty S. Weiss variation for general boundaries [J]. Gen Rel Grav, 2022, 54: 67.
[26] Komar A. Covariant conservation laws in general relativity [J]. Phys Rev, 1959, 113: 934.
[27] Liu H F, Peng J J. The unified higher-order corrected Komar formulas for mass and angular momentum [EB/OL]. (2022-07-28) [2022-10-01]. https://chinaxiv.org/abs/202207.00210V1. [刘惠发, 彭俊金. 形式一致的高阶修正 Komar 质量与角动量定义式[EB/OL]. (2022-07-28) [2022-10-01]. https://chinaxiv.org/abs/202207.00210V1.]
[28] Deruelle N, Katz J. On the mass of a Kerr-anti-de Sitter spacetime in D dimensions [J]. Class Quantum Grav, 2005, 22: 421.
[29] Jing Y D, Peng J J. A note on the mass of Kerr-AdS black holes in the off-shell generalized ADT formalism [J]. Chin Phys B, 2017, 26: 100401.
[30] Barnich G, Compere G. Generalized Smarr relation for Kerr AdS black holes from improved surface integrals [J]. Phys Rev D, 2005, 71: 044016.
[31] Olea R. Mass, angular momentum and thermodynamics in four-dimensional Kerr-AdS black holes [J]. J High Energy Phys, 2005, 0506: 023.
[32] Blagojevic M, Cvetkovic B. Entropy in general relativity: Kerr-AdS black hole [J]. Phys Rev D, 2020, 101: 084023.
[33] Zou C L, Liu H F, Peng J J. Komar-like charges for asymptotically AdS black holes in five-dimensional minimal gauged supergravity [J]. J Henan Norm Univ(Nat Sci Ed), 2021, 49: 41. [邹长利, 刘惠发, 彭俊金. 五维最小规范超引力中渐近 AdS 黑洞的类 Komar 守恒荷[J]. 河南师范大学学报(自然科学版), 2021, 49: 41.]