

DOI:10.11784/tdxbz202501017

弹性高超声速飞行器分解式输出反馈预测控制

胡超芳, 刘欣悦

(天津大学电气自动化与信息工程学院, 天津 300072)

摘要: 针对带参数不确定性和扰动的弹性高超声速飞行器, 提出一种基于事件触发的分解式输出反馈管道模型预测控制(Tube-MPC)方法。首先, 将不确定非线性模型建模为包含附加集总扰动的多胞线性变参数(LPV)模型, 并设计龙伯格观测器以估计弹性状态。为确定观测误差边界, 提出迭代算法计算凸观测误差不变集, 将凸观测误差不变集与凸扰动集结合形成增广误差不变集, 从而设计分解式观测、标称及参考模型, 基于凸集顶点, 将预测状态管表示为分解后子管的闵可夫斯基和形式。其次, 设计子管的辅助反馈控制器和标称控制器, 以保证各子管的渐近稳定, 并进一步证明了整个系统的稳定性。由于子管的数量与预测步长成正比, 为保证子管的预测控制序列满足约束条件, 提出了子管输入约束缩减策略。在子管的辅助反馈误差系统中, 通过线性矩阵不等式(LMI)优化求解子控制序列, 并在每个时刻根据历史子控制序列缩减控制约束。对于子管的标称误差系统, 根据凸集顶点缩减标称控制约束, 并优化求解控制增益, 利用闵可夫斯基和获得实际控制序列。随后, 为降低计算量和保守性, 基于观测误差不变集设计了事件触发机制, 该机制通过离线计算不变集序列, 在线匹配刚体观测误差与不变集, 来确定弹性观测误差对应的观测误差不变集, 当不变集发生变化时, 更新增广误差不变集和控制增益。最后, 仿真结果表明, 所提方法能显著提升弹性高超声速飞行器在不确定和扰动条件下的控制性能。

关键词: 弹性高超声速飞行器; 管道模型预测控制; 事件触发; 凸观测误差不变集

中图分类号: V448

文献标志码: A

文章编号: 0493-2137(2025)12-1230-12

Decomposed Output Feedback Predictive Control for a Flexible Hypersonic Vehicle

Hu Chaofang, Liu Xinyue

(School of Electrical and Information Engineering, Tianjin University, Tianjin 300072, China)

Abstract: For a flexible hypersonic vehicle subjected to parametric uncertainty and disturbance, an event-triggered decomposed output feedback tube model predictive control(Tube-MPC) method is proposed. First, the uncertain nonlinear model was developed as a linear parameter-varying(LPV) model with an additional lumped disturbance, and a Luenberger observer was designed for unmeasurable flexible states. To determine the boundary of the observation error, an iterative algorithm was proposed to obtain a convex observation error invariant set. Then, this set was combined with a convex disturbance set to form an augmented error invariant set. Accordingly, the decomposed observer, nominal, and reference models were designed. Based on the vertices of the convex set, the predicted state tube was represented as a Minkowski sum of decomposed sub-tubes. Then, auxiliary and nominal feedback controllers of the sub-tubes were designed to ensure the asymptotic stability of each sub-tube, and the stability of the entire system was confirmed. As the number of decomposed sub-tubes was proportional to the prediction horizon, a strategy was proposed to reduce the sub-tube control input constraints to ensure that predictive control sequence satisfied the constraints. In the auxiliary feedback error system of the sub-tube, the sub-control sequence was solved using the linear matrix inequality(LMI), and the control constraints were reduced according to the historical sub-control sequence at each time step. For the nominal error system of the sub-tube, the nominal control constraint was tightened

收稿日期: 2025-01-17; 修回日期: 2025-04-07.

作者简介: 胡超芳(1973—), 男, 博士, 教授.

通信作者: 胡超芳, cfhu@tju.edu.cn.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(62373271).

Supported by the National Natural Science Foundation of China(No. 62373271).

using the convex set vertices. The control gain was solved and the actual control sequence was obtained using the Minkowski sum. Moreover, to reduce computational load and conservatism, an event-triggered mechanism was designed based on the observation error invariant set. This mechanism determined the observation error invariant set corresponding to the flexible observation error by calculating the invariant set sequence offline and by matching the rigid observation error and the invariant set online. When the invariant set changed, the augmented error invariant set and control gains were updated. Finally, the simulation results demonstrate that the proposed method effectively improves the control performance and efficiency of the flexible hypersonic vehicle under uncertainty and disturbance.

Keywords: flexible hypersonic vehicle; tube model predictive control (Tube-MPC); event-triggered; convex observation error invariant set

近年来,高超声速飞行器在军事国防与民用航空等领域受到广泛关注。然而,其复杂的非线性模型和严苛的工作环境,使得飞行器在控制设计中面临弹性效应、扰动和不确定性等诸多挑战。这些因素不仅影响飞行器的动态性能,还对系统的稳定性与鲁棒性提出更高要求。因此,对高超声速飞行器的深入研究不仅具有重要的理论价值,也具有重大的实际应用意义。

抑制参数不确定性和扰动的影响对于高超声速飞行器至关重要^[1]。通常将它们视为附加集总扰动,以便进行控制器设计和系统分析,一般由扰动约束集来界定扰动变化范围,目前主要有两种扰动约束集的构造方法:其一是通过各维度极限值构建矩形集,若集合对称,则由各维度最大绝对值确定集合边界^[2];其二是由点集均值和协方差矩阵构建椭圆集^[3]。这两种方法简单且计算效率高,因此得到了广泛应用。在附加集总扰动的抑制研究中,主要包含两种途径:一是通过扰动观测器^[4]或自适应律^[5]在线估计未知扰动参数,并设计控制器进行补偿;二是通过设计自抗扰^[6-7]、随机鲁棒^[8]、 μ 综合^[9]、鲁棒自适应多模型^[10]、 H_∞ ^[11]等强鲁棒性控制器来抑制扰动。除此之外,管道模型预测控制(tube model predictive control, Tube-MPC)也因其优异的最优控制性能和鲁棒性,在该领域占据重要地位。为进一步抑制附加集总扰动,研究者提出了多种改进方案。例如,Raguraman等^[12]将不确定集的大小作为优化变量,提出具有可调不确定集的管道模型预测控制方法,有效降低了保守性。Peschke等^[13]采用序列多级管道模型预测控制方法来应对乘性不确定性。Parsi等^[14]借助椭球集设计出可扩展的管道模型预测控制方案,利用线性分数变换精准捕获不确定性。Rakovic等^[15]则在已知凸扰动约束集顶点的情况下,提出参数化管道模型预测控制方法。这些研究成果为高超声速飞行器在复杂工况下的控制提供了新的思路。

在高超声速飞行器的控制中,弹性同样不容忽视。

常见的处理办法是先利用陷波滤波器削弱弹性,再基于刚体模型构建控制器^[16]。若弹性模态可测,一般将其作为状态变量融入控制器设计^[17];反之,则将弹性视为不确定性,通过提高控制器的鲁棒性来维持系统稳定^[18]。虽然以上方法可实现弹性抑制,但容易导致控制器设计过于保守、控制效能降低。因此,一些研究将弹性模态视为等效扰动,并通过构建扰动观测器^[19]或者状态观测器来估计总扰动或弹性模态的方式,来降低控制器的保守性^[20]。

由上述分析可知,现有附加集总扰动的处理方法通常会由于固定的扰动形状而产生较大的保守性,而构造凸扰动约束集不仅可以有效降低保守性,提高灵活性,还可以利用顶点信息优化控制策略,使其更接近实际扰动行为。为此,针对带参数不确定性和扰动的弹性高超声速飞行器,本文基于Rakovic等^[15]的研究,考虑凸扰动约束集和状态不可测的复杂影响,利用管道模型预测控制的优势,提出了一种基于事件触发的分解式输出反馈管道模型预测控制方法。该方法将复杂控制问题分解为多个基于扰动顶点的子问题,从而可简化设计过程,缩短优化时间。此外,该方法还支持并行求解,从而降低了计算规模。首先,将非线性模型建模为包含附加集总扰动的多胞线性变参数(linear parameter-varying, LPV)模型,并设计龙伯格观测器以估计弹性状态。为确定观测误差边界,本文提出了迭代算法来计算凸观测误差不变集,将其与凸扰动集结合,构建了增广误差不变集,从而设计分解式观测、标称及参考模型。基于凸集顶点,将预测状态管表示为分解后子管的闵可夫斯基和形式。然后,相较于Rakovic等^[15]的方法,本文进一步利用线性矩阵不等式(linear matrix inequality, LMI)求解子辅助反馈控制增益和子标称控制增益,并通过增加约束条件,确保李雅普诺夫函数递减。由于分解后的子管数量与预测步长成成正比,为确保子控制输入的预测控制序列满足约束条件,本文提出子管输入约束的缩减策略。在子管的辅助反馈误差系统中,通过

LMI 优化求解子控制序列,并在每个时刻根据历史子控制序列缩减控制约束.在子管的标称误差系统中,可由凸集顶点对标称控制约束进行缩紧,并优化求解控制增益,利用闵可夫斯基和计算实际控制序列.考虑到观测误差逐渐减小,若仅依赖初始观测误差界限构造凸观测误差不变集,可能过于保守.为降低计算量和保守性,本文基于凸观测误差不变集提出事件触发机制,通过离线计算观测误差不变集序列,在线匹配刚体观测误差与不变集,来实时确定弹性观测误差对应的不变集,当不变集变化时,更新增广误差不变集并重新计算控制增益.最后仿真结果验证了所提方法的有效性.

1 系统模型

采用的弹性高超声速飞行器纵向运动和动力学模型^[13,21]为

$$\begin{cases} \dot{h} = v \sin(\theta - \alpha) \\ \dot{v} = \frac{1}{m}(T \cos \alpha - D) - g \sin(\theta - \alpha) \\ \dot{\alpha} = \frac{1}{mv}(-T \sin \alpha - L) + q + \frac{g}{v} \cos(\theta - \alpha) \\ \dot{\theta} = q \\ \dot{q} = \frac{M}{I_{yy}} \\ \dot{\eta}_1 = -2\zeta_1 \omega_1 \eta_1 - \omega_1^2 \eta_1 + N_1 \\ \dot{\eta}_2 = -2\zeta_2 \omega_2 \eta_2 - \omega_2^2 \eta_2 + N_2 \end{cases} \quad (1)$$

式中: h 、 v 、 α 、 θ 、 q 分别为高度、速度、攻角、俯仰角和俯仰角速率; η_i 为 i 阶弹性模态; m 、 g 、 I_{yy} 分别为飞行器质量、重力加速度和纵向转动惯量; L 、 D 、 T 、 M 分别代表升力、阻力、推力和俯仰力矩; ζ_i 、 ω_i 、 N_i 分别为第 i 阶弹性模态的阻尼比、自然振荡角频率和弹性模态的广义力.

发动机模型为

$$\ddot{\phi} = -2\xi\omega\dot{\phi} + \omega^2\phi_c \quad (2)$$

式中 ϕ_c 、 ξ 、 ω 分别代表空气当量比控制量、发动机阻尼比和固有频率.

为线性化模型,首先假设不存在参数不确定性,则可通过雅可比线性化和张量积变换建立弹性高超声速飞行器的多胞 LPV 模型^[22].定义调度变量为 $p(t)=[h \ v]^T$.

$$\dot{x}(t) = A(p(t))x(t) + B(p(t))u(t) + k_w \quad (3)$$

式中: k_w 为未建模动态; $A(p(t))$ 和 $B(p(t))$ 是与调度变量有关的矩阵,下文将用 A_p 和 B_p 代替. $[A_p, B_p] =$

$\sum_{\varepsilon=1}^{n_1} \kappa_\varepsilon(t)[A_\varepsilon, B_\varepsilon]$, $[A_\varepsilon, B_\varepsilon]$ 为多胞顶点, $\sum_{\varepsilon=1}^{n_1} \kappa_\varepsilon(t) = 1$, $0 \leq \kappa_\varepsilon(t) \leq 1$, n_1 为系统矩阵的顶点数.多胞 LPV 模型的系统矩阵变化与调度变量有关,系统矩阵顶点决定其变化范围.定义控制输入 $u = [\Delta\delta_c \ \Delta\phi]^T$, 状态 $x = [\Delta h \ \Delta v \ \Delta\alpha \ \Delta\theta \ \Delta q \ \Delta\eta_1 \ \Delta\dot{\eta}_1 \ \Delta\eta_2 \ \Delta\dot{\eta}_2]^T$.

考虑参数不确定性和扰动,则有

$$\dot{x}(t) = A_p x(t) + B_p u(t) + w(t) \quad (4)$$

式中 $w(t)$ 表示包含未建模动态、不确定性和扰动的附加集总扰动, $w(t) \in W$, 扰动约束集 W 为凸集合,扰动约束集顶点与扰动固有物理特性有关,顶点 w_i 已知, $w(t) = \sum_{i=1}^r \lambda_i w_i$, r 为扰动约束集的顶点数.

式(4)可表示成离散形式

$$x(\hat{k}+1) = A_p x(\hat{k}) + B_p u(\hat{k}) + w(\hat{k}) \quad (5)$$

式中: $x(\hat{k})$ 、 $u(\hat{k})$ 和 $w(\hat{k})$ 为随时间变化的离散变量; $\hat{k} = t/T_s$ 为离散时刻, T_s 为采样时间.

考虑状态约束,则式(5)可以表示为

$$\begin{cases} x(\hat{k}+1) = A_p x(\hat{k}) + B_p u(\hat{k}) + w(\hat{k}) \\ y(\hat{k}) = Cx(\hat{k}) \\ u(\hat{k}) \in U \end{cases} \quad (6)$$

式中控制约束 U 为已知的紧集.

假设刚体状态可测, $y = [\Delta h \ \Delta v \ \Delta\alpha \ \Delta\theta \ \Delta q]^T$, $C \in \mathbf{R}^{5 \times 9}$.由于机体的形变,所以很难准确测量弹性模态及其导数.

2 凸观测误差不变集迭代算法

引入龙伯格观测器观测未知弹性模态及其导数,则有

$$\begin{aligned} \hat{x}(\hat{k}+1) &= A_p \hat{x}(\hat{k}) + \\ & B_p u(\hat{k}) + L_{ob} [y(\hat{k}) - \hat{y}(\hat{k})] \end{aligned} \quad (7)$$

式中 L_{ob} 为观测增益.

由式(6)和(7)可得观测误差表达式为

$$e(\hat{k}+1) = (A_p - L_{ob}C)e(\hat{k}) + w(\hat{k}) \quad (8)$$

式中 $e(\hat{k}) = [e_g^T(\hat{k}) \ e_t^T(\hat{k})]^T \in \mathbf{R}^{9 \times 1}$ 包含了刚体状态的观测误差 $e_g(\hat{k}) \in \mathbf{R}^{5 \times 1}$ 和弹性状态的观测误差 $e_t(\hat{k}) \in \mathbf{R}^{4 \times 1}$.

为降低观测误差影响,需要在预测模型和控制器设计中考虑观测误差,并构建观测误差不变集.

由于 $w(\hat{k}) = \sum_{i=1}^r \lambda_i w_i$, 所以式(8)可以表示为

$$\mathbf{e}_i(\hat{k}+1) = (\mathbf{A}_p - \mathbf{L}_{\text{ob}}\mathbf{C})\mathbf{e}_i(\hat{k}) + \mathbf{w}_i \quad (9)$$

$$\mathbf{e}(\hat{k}) = \sum_{i=1}^r \lambda_i \mathbf{e}_i(\hat{k}) \quad (10)$$

因此可以构建迭代关系式, 由凸扰动约束集的顶点求得凸观测误差不变集的顶点为

$$\begin{cases} \mathbf{H}_i^{j^*} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_i^{j^*-1} \\ \mathbf{C}(\mathbf{A} - \mathbf{L}_{\text{ob}}\mathbf{C})^{j^*} \end{bmatrix} \\ \mathbf{b}_i^{j^*} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_i^{j^*-1} \\ \mathbf{r}^{j^*} \end{bmatrix} \\ \mathbf{r}_i^{j^*} = \mathbf{r}_i^{j^*-1} - \mathbf{C}(\mathbf{A} - \mathbf{L}_{\text{ob}}\mathbf{C})^{j^*-1} \mathbf{w}_i \\ \mathbf{o}_i^{j^*} = (\mathbf{H}_i^{j^*})^{-1} \mathbf{b}_i^{j^*} \end{cases} \quad (11)$$

式中 j^* 表示迭代步长。

当 $\mathbf{o}_i^{j^*} = \mathbf{o}_i^{j^*-1}$ 时, 迭代终止, 求得 \mathbf{w}_i 对应的凸观测误差不变集的顶点 \mathbf{o}_i 。由此观测误差可表示为 $\mathbf{e}(\hat{k}) = \sum_{i=1}^r \lambda_i \mathbf{o}_i \in \mathcal{O}$ 。凸不变集 \mathcal{O} 是观测误差在 $0 \sim \infty$ 时刻均满足的最小不变集。根据刚体状态和弹性状态的观测误差, 也可将不变集顶点 \mathbf{o}_i 分解成刚体观测误差不变集顶点 \mathbf{o}_i^s 和弹性观测误差不变集顶点 \mathbf{o}_i^e 。

由于刚体状态可测, 可将已知刚体状态直接反馈到控制器中, 因此在定义以下增广误差时不考虑刚体观测误差, 仅考虑弹性状态观测误差, 即

$$\mathbf{w}'(\hat{k}) = \mathbf{w}(\hat{k}) + [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \mathbf{e}_i^T(\hat{k})]^T \quad (12)$$

则凸增广误差不变集可表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{w}'_k \in \mathbf{W}' &= \sum_{i=1}^r \lambda_i \mathbf{w}'_i = \\ & \sum_{i=1}^r \lambda_i (\mathbf{w}_i + [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ (\mathbf{o}_i^e)^T]^T) \end{aligned} \quad (13)$$

3 分解式预测模型

3.1 分解式观测模型

观测状态的动态表达式为

$$\hat{\mathbf{x}}(\hat{k}+1) = \mathbf{A}_p \hat{\mathbf{x}}(\hat{k}) + \mathbf{B}_p \mathbf{u}(\hat{k}) + \mathbf{w}'(\hat{k}) \quad (14)$$

在以往研究中, 绝大多数的预测模型都建立在标称模型基础上, 不考虑系统的增广误差, 这会导致预测不准确的问题。因此, 为提高预测模型的精度, 本文针对系统 (14) 设计了分解式观测模型。令 $\hat{\mathbf{x}}(0) = \hat{\mathbf{x}}(\hat{k})$ 为当前状态, 定义预测步长为 N , $\hat{\mathbf{x}}(k)$ 、 $\hat{\mathbf{u}}(k)$ 和 $\hat{\mathbf{w}}'(k)$ 为在第 k 个预测时刻的状态、控制输入和增广误差, $k=0, 1, \dots, N$ 。则预测的观测状态序列可表示为 $[\hat{\mathbf{x}}(0) \ \hat{\mathbf{x}}(1) \ \dots \ \hat{\mathbf{x}}(N)]$, 预测控制序列为

$[\hat{\mathbf{u}}(0) \ \hat{\mathbf{u}}(1) \ \dots \ \hat{\mathbf{u}}(N)]$ 。将预测状态 $\hat{\mathbf{x}}(k)$ 分解为 $k+1$ 个分量 $\hat{\mathbf{x}}(0, k)$, $\hat{\mathbf{x}}(1, k)$, \dots , $\hat{\mathbf{x}}(k, k)$, 且满足表达式

$$\hat{\mathbf{x}}(k) = \sum_{j=0}^k \hat{\mathbf{x}}(j, k) \quad (15)$$

同理, 有

$$\hat{\mathbf{u}}(k) = \sum_{j=0}^k \hat{\mathbf{u}}(j, k) \quad (16)$$

式中 $\hat{\mathbf{x}}(j, k)$ 、 $\hat{\mathbf{u}}(j, k)$ 分别表示在预测时刻 k 分解的第 j 个子观测状态和子控制输入。

子观测状态的预测模型为

$$\hat{\mathbf{x}}(j, k+1) = \mathbf{A}_p \hat{\mathbf{x}}(j, k) + \mathbf{B}_p \hat{\mathbf{u}}(j, k) \quad (17)$$

式中: $\hat{\mathbf{x}}(0, 0) = \hat{\mathbf{x}}(0)$; $\hat{\mathbf{x}}(j, j) = \hat{\mathbf{w}}'(j-1)$ 。

由于不确定性 $\hat{\mathbf{w}}'(j-1)$ 未知, 因此只有 0 状态序列 $[\hat{\mathbf{x}}(0, 0) \ \hat{\mathbf{x}}(0, 1) \ \dots \ \hat{\mathbf{x}}(0, N)]$ 可以由当前状态确定。为了准确表示 j 状态序列 $[\hat{\mathbf{x}}(j, j) \ \hat{\mathbf{x}}(j, j+1) \ \dots \ \hat{\mathbf{x}}(j, N)]$, 令 $\hat{\mathbf{w}}'(j-1) = \sum_{i=1}^r \lambda_i \mathbf{w}'_i$, 由于 \mathbf{w}'_i 已知, 于是有

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}(i, j, k+1) &= \mathbf{A}_p \hat{\mathbf{x}}(i, j, k) + \mathbf{B}_p \hat{\mathbf{u}}(i, j, k) \\ \hat{\mathbf{x}}(i, j, j) &= \mathbf{w}'_i \end{aligned} \quad (18)$$

因此, 可形成子观测状态管和子控制管分别为

$$\hat{X}(j, k) = \sum_{i=1}^r \lambda_i \hat{\mathbf{x}}(i, j, k) \quad (19)$$

$$U(j, k) = \sum_{i=1}^r \lambda_i \hat{\mathbf{u}}(i, j, k) \quad (20)$$

式中 $\hat{\mathbf{x}}(i, j, k)$ 、 $\hat{\mathbf{u}}(i, j, k)$ 分别表示子观测状态管 $\hat{X}(j, k)$ 和子控制管 $U(j, k)$ 的第 i 个顶点。

观测状态管 $\hat{X}(k)$ 和控制管 $U(k)$ 为预测状态 $\hat{\mathbf{x}}(k)$ 、 $\hat{\mathbf{u}}(k)$ 所处集合, 可表示为子观测状态管 $\hat{X}(j, k)$ 和 $U(j, k)$ 的闵可夫斯基和, 即

$$\begin{cases} \hat{X}(k) = \bigoplus_{j=0}^k \hat{X}(j, k) \\ U(k) = \bigoplus_{j=0}^k U(j, k) \end{cases} \quad (21)$$

预测模型可重新表述为

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{x}}(0, k+1) = \mathbf{A}_p \hat{\mathbf{x}}(0, k) + \mathbf{B}_p \hat{\mathbf{u}}(0, k) \\ \hat{\mathbf{x}}(i, j, k+1) = \mathbf{A}_p \hat{\mathbf{x}}(i, j, k) + \mathbf{B}_p \hat{\mathbf{u}}(i, j, k) \end{cases} \quad (22)$$

式中 $\hat{\mathbf{x}}(0, 0, 0) = \hat{\mathbf{x}}(0, 0) = \hat{\mathbf{x}}(0)$ 。

但是 $\hat{\mathbf{u}}(0, k)$ 和 $\hat{\mathbf{u}}(i, j, k)$ 仍未知, 因此需要继续分解标称系统来获取 $\hat{\mathbf{u}}(0, k)$ 和 $\hat{\mathbf{u}}(i, j, k)$ 的表达式。

3.2 分解式标称模型

与观测系统 (14) 有关的标称系统可被定义为

$$\mathbf{z}(\hat{k}+1) = \mathbf{A}_p \mathbf{z}(\hat{k}) + \mathbf{B}_p \boldsymbol{\varphi}(\hat{k}) \quad (23)$$

式中: $\mathbf{z}(\hat{k})$ 为标称状态; $\boldsymbol{\varphi}(\hat{k})$ 为标称输入.

令 $\bar{\mathbf{z}}(0) = \mathbf{z}(\hat{k})$ 为当前状态. 预测的标称状态序列为 $[\bar{\mathbf{z}}(0) \ \bar{\mathbf{z}}(1) \ \dots \ \bar{\mathbf{z}}(N)]$, 标称控制序列为 $[\bar{\boldsymbol{\varphi}}(0) \ \bar{\boldsymbol{\varphi}}(1) \ \dots \ \bar{\boldsymbol{\varphi}}(N)]$.

预测的标称状态和标称控制可以按照式 (15)、(16) 的形式进行分解, 定义 $\bar{\mathbf{z}}(j, k)$ 、 $\bar{\boldsymbol{\varphi}}(j, k)$ 分别表示在预测时刻 k 分解的第 j 个子标称状态和子标称控制输入. 在此基础上考虑凸增广误差不变集的顶点, 则预测模型可表示成

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{z}}(0, k+1) = \mathbf{A}_p \bar{\mathbf{z}}(0, k) + \mathbf{B}_p \bar{\boldsymbol{\varphi}}(0, k) \\ \bar{\mathbf{z}}(i, j, k+1) = \mathbf{A}_p \bar{\mathbf{z}}(i, j, k) + \mathbf{B}_p \bar{\boldsymbol{\varphi}}(i, j, k) \end{cases} \quad (24)$$

式中 $\bar{\mathbf{z}}(i, j, k)$ 、 $\bar{\boldsymbol{\varphi}}(i, j, k)$ 分别表示子标称状态管和子标称控制管的第 i 个顶点, $\bar{\mathbf{z}}(j, j) = \mathbf{0}$, $\bar{\mathbf{z}}(0, 0, 0) = \bar{\mathbf{z}}(0, 0) = \bar{\mathbf{z}}(0)$.

与式 (19) ~ (21) 类似, 可得到相同形式的标称状态管 $Z(k)$ 、 $Z(j, k)$ 以及标称控制管 $\boldsymbol{\Psi}(k)$ 、 $\boldsymbol{\Psi}(j, k)$ 的表达式.

为了准确跟踪参考指令, 需要继续分解参考模型, 来获取 $\hat{\boldsymbol{\varphi}}(0, k)$ 和 $\hat{\boldsymbol{\varphi}}(i, j, k)$ 的表达式.

3.3 分解式参考模型

定义参考点处的状态方程为

$$\mathbf{v}(\hat{k}+1) = \mathbf{A}_p \mathbf{v}(\hat{k}) + \mathbf{B}_p \mathbf{u}(\hat{k}) \quad (25)$$

式中: $\mathbf{v}(\hat{k})$ 为参考状态; $\mathbf{u}(\hat{k})$ 为参考输入.

令 $\hat{\mathbf{v}}(0) = \mathbf{v}(\hat{k})$ 为给定的参考状态, 与第 3.1 节和第 3.2 节类似, 可对预测的参考状态进行分解, 定义 $\hat{\mathbf{v}}(j, k)$ 为在预测时刻 k 分解的第 j 个子参考状态. 同样, 0 参考状态序列和 j 参考状态序列可表示为

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{v}}(0, k+1) = \mathbf{A}_p \hat{\mathbf{v}}(0, k) + \mathbf{B}_p \mathbf{u}(\hat{k}) \\ \hat{\mathbf{v}}(i, j, k+1) = \mathbf{A}_p \hat{\mathbf{v}}(i, j, k) + \mathbf{B}_p \mathbf{u}(\hat{k}) \end{cases} \quad (26)$$

式中: $\hat{\mathbf{v}}(0, 0, 0) = \hat{\mathbf{v}}(0, 0) = \hat{\mathbf{v}}(0)$; $\hat{\mathbf{v}}(j, j) = \mathbf{0}$.

类似地, 可得到相同形式的参考状态管 $\Gamma(j, k)$ 和 $\Gamma(k)$ 的表示式, 可利用 $\hat{\mathbf{v}}(0, k)$ 、 $\hat{\mathbf{v}}(i, j, k)$ 和 $\mathbf{u}(\hat{k})$ 来获得 $\hat{\boldsymbol{\varphi}}(0, k)$ 和 $\hat{\boldsymbol{\varphi}}(i, j, k)$, 进而求得 $\hat{\mathbf{u}}(0, k)$ 和 $\hat{\mathbf{u}}(i, j, k)$ 的表达式为

$$\begin{cases} \hat{\boldsymbol{\varphi}}(0, k) = \mathbf{K} [\bar{\mathbf{z}}(0, k) - \hat{\mathbf{v}}(0, k)] + \mathbf{u}(\hat{k}) \\ \hat{\boldsymbol{\varphi}}(i, j, k) = \mathbf{K} [\bar{\mathbf{z}}(i, j, k) - \hat{\mathbf{v}}(i, j, k)] + \mathbf{u}(\hat{k}) \end{cases} \quad (27)$$

式中 \mathbf{K} 为预先计算的标称控制增益.

由式 (27) 得 $\hat{\mathbf{u}}(0, k)$ 和 $\hat{\mathbf{u}}(i, j, k)$ 的表达式为

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{u}}(0, k) = \mathbf{F}(\hat{\mathbf{x}}(0, k) - \bar{\mathbf{z}}(0, k)) + \hat{\boldsymbol{\varphi}}(0, k) \\ \hat{\mathbf{u}}(i, j, k) = \mathbf{F}(\hat{\mathbf{x}}(i, j, k) - \bar{\mathbf{z}}(i, j, k)) + \hat{\boldsymbol{\varphi}}(i, j, k) \end{cases} \quad (28)$$

式中 \mathbf{F} 为预先计算的辅助反馈控制增益.

4 分解式管道模型预测控制设计

针对凸增广不变集, 本文提出了分解式管道模型预测控制方法.

4.1 分解式辅助反馈控制

由于分解后的子状态管数量与预测步长成正比, 为使 $U(j, k)$ 对应的 $U(k)$ 满足约束, 本节在保证系统稳定性的基础上, 针对每个子状态管 $U(j, k)$ 设计子辅助反馈控制器, 来确保子管的稳定性, 具体设计如下.

定义子观测系统和子标称系统的误差为 $\mathbf{e}_{x1}(0, k)$ 和 $\mathbf{e}_{x1}(i, j, k)$, 以及子控制律 $\mathbf{e}_{u1}(0, k)$ 和 $\mathbf{e}_{u1}(i, j, k)$, 则表达式可定义为

$$\begin{cases} \mathbf{e}_{x1}(0, k) = \hat{\mathbf{x}}(0, k) - \bar{\mathbf{z}}(0, k) \\ \mathbf{e}_{x1}(i, j, k) = \hat{\mathbf{x}}(i, j, k) - \bar{\mathbf{z}}(i, j, k) \\ \mathbf{e}_{u1}(0, k) = \mathbf{F}(0, 0)\mathbf{e}_{x1}(0, k) \\ \mathbf{e}_{u1}(i, j, k) = \mathbf{F}(i, j)\mathbf{e}_{x1}(i, j, k) \end{cases} \quad (29)$$

式中 $\mathbf{e}_{x1}(i, j, j) = \hat{\mathbf{x}}(i, j, j) = \mathbf{w}'_i$.

子误差状态方程为

$$\begin{cases} \mathbf{e}_{x1}(0, k+1) = (\mathbf{A}_p + \mathbf{B}_p \mathbf{F}(0, 0))\mathbf{e}_{x1}(0, k) \\ \mathbf{e}_{x1}(i, j, k+1) = (\mathbf{A}_p + \mathbf{B}_p \mathbf{F}(i, j))\mathbf{e}_{x1}(i, j, k) \end{cases} \quad (30)$$

定义阶段代价函数为

$$l(\mathbf{e}_{x1}, \mathbf{e}_{u1}) = \|\mathbf{e}_{x1}\|_{\boldsymbol{\psi}}^2 + \|\mathbf{e}_{u1}\|_{\boldsymbol{\mu}}^2 \quad (31)$$

式中 $\boldsymbol{\psi}$ 和 $\boldsymbol{\mu}$ 分别为系统状态和控制输入的权重矩阵, $\boldsymbol{\psi} \in \mathbf{R}^{9 \times 9} > \mathbf{0}$, $\boldsymbol{\mu} \in \mathbf{R}^{2 \times 2} > \mathbf{0}$.

则 0 性能指标和 j 性能指标可以表示成

$$\begin{cases} J(0, N) = \sum_{k=0}^N l(\mathbf{e}_{x1}(0, k), \mathbf{e}_{u1}(0, k)) \\ J(i, j, N) = \sum_{k=j}^N l(\mathbf{e}_{x1}(i, j, k), \mathbf{e}_{u1}(i, j, k)) \\ J(j, N) = \sum_{i=1}^F J(i, j, N) \end{cases} \quad (32)$$

对每个子状态管, 分别求解辅助反馈控制增益来保证系统稳定. 因此性能指标可定义为

$$\min_F J(j, N) \quad j = 0, 1, \dots, N \quad (33)$$

定义 Lyapunov 函数为 $V(\mathbf{e}_{x1}) = \mathbf{e}_{x1}^T \mathbf{P} \mathbf{e}_{x1}$, $\mathbf{P} > \mathbf{0}$, 以 0 Lyapunov 函数为例, 为求解 $\mathbf{F}(0, 0)$, 且保证系统能量递减, 其必须满足

$$\begin{cases} \Pi(k) = V(\mathbf{e}_{x1}(0, k+1)) - V(\mathbf{e}_{x1}(0, k)) \\ \Pi(k) \leq -l(\mathbf{e}_{x1}(0, k), \mathbf{e}_{u1}(0, k)) \end{cases} \quad (34)$$

为保证系统稳定, 且若 N 足够大可以使得 $\mathbf{e}(0, N) \approx \mathbf{0}$, 则有

$$\sum_{k=0}^{N-1} \Pi(k) = -V(\mathbf{e}_{x1}(0, 0)) \leq -J(0, N) \quad (35)$$

令 $\mathbf{P}_{0,0} = \gamma_{0,0} \mathbf{Q}_{0,0}^{-1}$, 则 $J(0, N)$ 的上界满足

$$J(0, N) \leq V(\mathbf{e}_{x1}(0, 0)) \leq \gamma_{0,0} \quad (36)$$

将式(29)代入式(34)可得

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{x1}^T(0, k) & \left[(\mathbf{A}_i + \mathbf{B}_i \mathbf{F}(0, 0))^T \mathbf{P}_{0,0} (\mathbf{A}_i + \mathbf{B}_i \mathbf{F}(0, 0)) - \mathbf{P}_{0,0} \right] \cdot \\ & \mathbf{e}_{x1}(0, k) \leq - \left[\mathbf{e}_{x1}^T(0, k) (\boldsymbol{\psi} + \right. \\ & \left. \mathbf{F}(0, 0)^T \boldsymbol{\mu} \mathbf{F}(0, 0)) \mathbf{e}_{x1}(0, k) \right] \end{aligned} \quad (37)$$

参照上述推导, 对于 j Lyapunov 函数, 考虑到扰动顶点, 求解 $\mathbf{F}(i, j)$, 则有

$$\begin{cases} \Pi(k) = V(\mathbf{e}_{x1}(i, j, k+1)) - V(\mathbf{e}_{x1}(i, j, k)) \\ \Pi(k) \leq -l(\mathbf{e}_{x1}(i, j, k), \mathbf{e}_{u1}(i, j, k)) \end{cases} \quad (38)$$

为保证系统稳定, 且若 N 足够大可以使得 $\mathbf{e}(i, N, N) \approx 0$, 则有

$$\sum_{k=j}^{N-1} \Pi(k) = -V(\mathbf{e}_{x1}(i, j, j)) \leq -J(i, j, N) \quad (39)$$

$$J(i, j, N) \leq V(\mathbf{e}_{x1}(i, j, j)) \leq \gamma_{i,j} \quad (40)$$

则存在

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{x1}^T(i, j, k) & \left[(\mathbf{A}_i + \mathbf{B}_i \mathbf{F}(i, j))^T \mathbf{P}_{i,j} (\mathbf{A}_i + \mathbf{B}_i \mathbf{F}(i, j)) - \right. \\ & \left. \mathbf{P}_{i,j} \right] \mathbf{e}_{x1}(i, j, k) \leq - \left[\mathbf{e}_{x1}^T(i, j, k) (\boldsymbol{\psi} + \mathbf{F}(i, j)^T \cdot \right. \\ & \left. \boldsymbol{\mu} \mathbf{F}(i, j)) \mathbf{e}_{x1}(i, j, k) \right] \end{aligned} \quad (41)$$

因此可根据初始误差状态 $\mathbf{e}_{x1}(0, 0)$ 、 $\mathbf{e}_{x1}(i, j, j)$ 设计优化问题, 从而求解辅助反馈控制增益。

由于优化问题个数为 $1+(N-1)r$ 个, 且对于多胞 LPV 系统, 仅需保证系统矩阵的 n_i 个多胞顶点均满足约束条件, 就可以保证整个凸包系统的稳定性, 则式(33)可以表示为 $\min \gamma_{i,j}$ 的形式, 由 Schur 补定理可将式(41)转化为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_1 & \mathbf{G}_{i,j}^T \mathbf{A}_e^T + \mathbf{Y}_{i,j}^T \mathbf{B}_e^T & \mathbf{G}_{i,j}^T \boldsymbol{\psi}^{2^T} & \mathbf{Y}_{i,j}^T \boldsymbol{\mu}^{2^T} \\ \mathbf{M}_2 & \mathbf{Q}_{i,j} & 0 & 0 \\ \boldsymbol{\psi}^2 \mathbf{G}_{i,j} & 0 & \gamma_{i,j} \mathbf{I} & 0 \\ \boldsymbol{\mu}^2 \mathbf{Y}_{i,j} & 0 & 0 & \gamma_{i,j} \mathbf{I} \end{bmatrix} \geq 0 \quad (42)$$

式中: $\mathbf{M}_1 = \mathbf{G}_{i,j}^T + \mathbf{G}_{i,j} - \mathbf{Q}_{i,j}$; $\mathbf{M}_2 = \mathbf{A}_e \mathbf{G}_{i,j} + \mathbf{B}_e \mathbf{Y}_{i,j}$; \mathbf{I} 为单位矩阵。

对于每个优化问题可形成 n_i 个 LMI(式(42)). 为保证误差状态在不变集内, 以 0 误差系统为例, 假设误差状态 $\mathbf{e}_{x1}(0, 0) \in \mathbf{A}_0$, 不变集为

$$\mathbf{A}_0 = \{ \mathbf{e}_{x1}(0, 0) \in \mathbf{R}^9 \mid \mathbf{e}_{x1}^T(0, 0) \mathbf{Q}_{0,0} \mathbf{e}_{x1}(0, 0) \leq 1 \} \quad (43)$$

由 Schur 补定理可将式(43)转化为

$$\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{e}_{x1}^T(0, 0) \\ \mathbf{e}_{x1}(0, 0) & \mathbf{Q}_{0,0} \end{bmatrix} \geq 0 \quad (44)$$

对于 j 误差系统, 则有

$$\mathbf{A}_{i,j} = \{ \mathbf{e}_{x1}(i, j, j) \in \mathbf{R}^9 \mid \mathbf{e}_{x1}^T(i, j, j) \mathbf{Q}_{i,j} \mathbf{e}_{x1}(i, j, j) \leq 1 \} \quad (45)$$

同样由 Schur 补定理可将式(45)转化为

$$\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{e}_{x1}^T(i, j, j) \\ \mathbf{e}_{x1}(i, j, j) & \mathbf{Q}_{i,j} \end{bmatrix} \geq 0 \quad j > 0 \quad (46)$$

为保证预测控制序列 $[\hat{\mathbf{u}}(0) \ \hat{\mathbf{u}}(1) \ \dots \ \hat{\mathbf{u}}(N)]$ 满足输入约束 U , 即 $\hat{\mathbf{u}}(k) \in U, k=0, 1, \dots, N$, 则需要缩减每个子状态管的输入约束, 即

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{u}}(0, 0) \in U \\ \hat{\mathbf{u}}(1, 1) \in U \Theta \hat{\mathbf{u}}(0, 1) \\ \hat{\mathbf{u}}(k, k) \in U(k) = U \Theta \hat{\mathbf{u}}(0, k) \Theta \sum_{j=1}^{k-1} U(j, k) \quad k > 1 \end{cases} \quad (47)$$

$$U(k) = \{ \hat{\mathbf{u}}(k, k) \in \mathbf{R}^2 \mid \hat{\mathbf{u}}(k, k) \leq \mathbf{u}_{\max}(k) \} \quad (48)$$

式中 $\mathbf{u}_{\max}(k)$ 表示每个子管允许的最大控制输入。

$$\hat{\mathbf{u}}(0, k) = \mathbf{F}(0, 0) [\hat{\mathbf{x}}(0, k) - \hat{\mathbf{z}}(0, k)] + \hat{\boldsymbol{\varphi}}(0, k) \quad (49)$$

而 $U(j, k) (j=1, 2, \dots, k-1)$ 则可通过 $\mathbf{F}(i, j)$ 获得, 即

$$\hat{\mathbf{u}}(i, j, k) = \mathbf{F}(i, j) (\hat{\mathbf{x}}(i, j, k) - \hat{\mathbf{z}}(i, j, k)) + \hat{\boldsymbol{\varphi}}(i, j, k) \quad (50)$$

结合式(20)则可求得 $U(j, k) (j=1, 2, \dots, k-1)$. 这说明利用子优化问题求解的 $\mathbf{F}(i, j)$ 预测得到的 $\hat{\mathbf{u}}(i, j, k) (k=j, j+1, \dots, N)$ 将会用于缩减第 $k+1$ 个子优化问题的输入约束。

又由于式(38), 子控制序列 $\hat{\mathbf{u}}(i, j, k)$ 会随着 k 的增加而减小, 所以可保证系统的可行性。

输入约束式(48)可以表示为

$$\| \mathbf{e}_{u1}(i, j, k) \|_2^2 \leq \left\| \mathbf{F}(i, j) \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{i,j} \\ \gamma_{i,j} \end{pmatrix} \right\|_2^2 \leq \mathbf{u}_{\max}(k)^2 \quad (51)$$

为满足控制约束, 式(51)可通过 Schur 补定理转化为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_{\max}(k)^2 \mathbf{I} & \mathbf{Y}_{i,j} \\ \mathbf{Y}_{i,j}^T & \mathbf{G}_{i,j}^T + \mathbf{G}_{i,j} - \mathbf{Q}_{i,j} \end{bmatrix} \geq 0 \quad (52)$$

因此, 通过式(42)、(44)、(46)和(52)求解的 $\mathbf{F}(i, j)$ 能保证子误差系统的渐近稳定。

定理 1 若存在使系统(30)渐近稳定的控制律

$e_{u1}(0, k) = F(0, 0)e_{x1}(0, k)$, $e_{u1}(i, j, k) = F(i, j)e_{x1}(i, j, k)$, 则当 $i=1, 2, \dots, r$, $j=1, 2, \dots, N$ 时, 必须满足以下条件: 存在实矩阵 $Y_{i,j} \in \mathbf{R}^{2 \times 9}$, $G_{i,j} \in \mathbf{R}^{9 \times 9}$, 对称正定矩阵 $Q_{i,j}$ 和正标量 $\gamma_{i,j}$, 令控制增益 $F(i, j) = Y_{i,j}G_{i,j}^{-1}$, 使所有的多胞顶点满足优化问题 1, 即

$$\min_{\gamma_{i,j}, Y_{i,j}, G_{i,j}, Q_{i,j}} \gamma_{i,j} \quad (53)$$

$$\begin{bmatrix} M_1 & G_{i,j}^T A_e^T + Y_{i,j}^T B_e^T & G_{i,j}^T \psi^{\frac{1}{2}T} & Y_{i,j}^T \mu^{\frac{1}{2}T} \\ M_2 & Q_{i,j} & 0 & 0 \\ \psi^{\frac{1}{2}} G_{i,j} & 0 & \gamma_{i,j} I & 0 \\ \mu^{\frac{1}{2}} Y_{i,j} & 0 & 0 & \gamma_{i,j} I \end{bmatrix} \geq 0 \quad (54)$$

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} 1 & e_{x1}^T(0, 0) \\ e_{x1}(0, 0) & Q_{0,0} \end{bmatrix} \geq 0 & j=0 \\ \begin{bmatrix} 1 & e_{x1}^T(i, j, j) \\ e_{x1}(i, j, j) & Q_{i,j} \end{bmatrix} \geq 0 & j>0 \end{cases} \quad (55)$$

$$\begin{bmatrix} u_{\max}(k)^2 I & Y_{i,j} \\ Y_{i,j}^T & G_{i,j}^T + G_{i,j} - Q_{i,j} \end{bmatrix} \geq 0 \quad (56)$$

定理 2 若子误差系统 (30) 渐近稳定, 则系统 (14) 能稳定跟踪标称系统 (23).

证明: 定义误差 $[e(0) \ e(1) \ \dots \ e(N)]$ 为

$$e(j, k) = \sum_{i=1}^r \lambda_i e(i, j, k), \quad e(k) = \bigoplus_{j=0}^k e(j, k) \quad (57)$$

由于通过定理 1 设计的子辅助反馈控制器能够保证误差 $e(0, k)$ 和 $e(i, j, k)$ 渐近稳定, 并且误差 $e(k)$ 为 $e(0, k)$ 和 $e(i, j, k)$ 的线性组合, 因此可以保证误差 $e(k)$ 渐近趋于 0, 进而可以证明系统 (14) 能稳定跟踪标称系统 (23).

4.2 分解式标称控制

与式 (29) 形式相同, 可定义类似的标称系统和参考点处的误差 $e_{x2}(0, k)$ 、 $e_{x2}(i, j, k)$ 以及控制律 $e_{u2}(0, k)$ 、 $e_{u2}(i, j, k)$ 的表达式, 其中标称控制增益表示为 $K(0, 0)$ 和 $K(i, j)$, 且 $e_{x2}(i, j, j) = \mathbf{0}$.

误差状态方程为

$$\begin{cases} e_{x2}(0, k+1) = [A_p + B_p K(0, 0)] e_{x2}(0, k) \\ e_{x2}(i, j, k+1) = [A_p + B_p K(i, j)] e_{x2}(i, j, k) \end{cases} \quad (58)$$

则 0 性能指标和 j 性能指标的表示方式与式 (32) 类似. 考虑到扰动顶点不同, 则预测的标称控制序列 $[\hat{\varphi}(0) \ \hat{\varphi}(1) \ \dots \ \hat{\varphi}(N)]$ 需满足标称控制约束

$$\hat{\varphi}(k) \in U_n(i, j) := \{\hat{\varphi}(k) \in \mathbf{R}^2 \mid U \Theta F(i, j) w_i'\} \quad (59)$$

为满足上述条件, 则需要缩紧每个子标称状态管的输入约束

$$\begin{cases} \hat{\varphi}(0, 0) \in U_n(i, j) \\ \hat{\varphi}(1, 1) \in U_n(i, j) \Theta \hat{\varphi}(0, 1) \\ \hat{\varphi}(k, k) \in U_n(i, j, k) = U_n(i, j) \Theta \hat{\varphi}(0, k) \Theta \sum_{j=1}^{k-1} \Phi(j, k) \end{cases} \quad (60)$$

$$U_n(i, j, k) = \{\hat{\varphi}(k, k) \in \mathbf{R}^2 \mid \|\hat{\varphi}(k, k)\| \leq u_{n, \max}(k)\} \quad (61)$$

式中 $u_{n, \max}(k)$ 表示子管允许的最大标称控制输入.

$U_n(i, j, k)$ 计算式可表示为

$$\hat{\varphi}(0, k) = K(0, 0)[\bar{z}(0, k) - \hat{v}(0, k)] + u(k) \quad (62)$$

$$\hat{\varphi}(i, j, k) = K(i, j)[\bar{z}(i, j, k) - \hat{v}(i, j, k)] + u(k) \quad (63)$$

定理 3 若存在使系统 (58) 渐近稳定的控制律

$e_{u2}(0, k) = K(0, 0)e_{x2}(0, k)$, $e_{u2}(i, j, k) = K(i, j)e_{x2}(i, j, k)$, 则当 $i=1, 2, \dots, r$, $j=1, 2, \dots, N$ 时, 必须满足以下条件: 存在实矩阵 $Y'_{i,j} \in \mathbf{R}^{2 \times 9}$, $G'_{i,j} \in \mathbf{R}^{9 \times 9}$, 对称正定矩阵 $Q'_{i,j}$ 和正标量 $\gamma'_{i,j}$, 令控制增益 $K(i, j) = Y'_{i,j}G'_{i,j}^{-1}$, 使所有的多胞顶点满足优化问题 2, 即

$$\min_{\gamma'_{i,j}, Y'_{i,j}, G'_{i,j}, Q'_{i,j}} \gamma'_{i,j} \quad (64)$$

$$\begin{bmatrix} M'_1 & G_{i,j}^{\prime T} A_e^T + Y_{i,j}^{\prime T} B_e^T & G_{i,j}^{\prime T} \psi^{\frac{1}{2}T} & Y_{i,j}^{\prime T} \mu^{\frac{1}{2}T} \\ M'_2 & Q'_{i,j} & 0 & 0 \\ \psi^{\frac{1}{2}} G'_{i,j} & 0 & \gamma'_{i,j} I & 0 \\ \mu^{\frac{1}{2}} Y'_{i,j} & 0 & 0 & \gamma'_{i,j} I \end{bmatrix} \geq 0 \quad (65)$$

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} 1 & e_{x2}^T(0, 0) \\ e_{x2}(0, 0) & Q'_{0,0} \end{bmatrix} \geq 0 & j=0 \\ \begin{bmatrix} 1 & e_{x2}^T(i, j, j) \\ e_{x2}(i, j, j) & Q'_{i,j} \end{bmatrix} \geq 0 & j>0 \end{cases} \quad (66)$$

$$\begin{bmatrix} u_{n, \max}(k)^2 I & Y'_{i,j} \\ Y'_{i,j}^T & G_{i,j}^{\prime T} + G'_{i,j} - Q'_{i,j} \end{bmatrix} \geq 0 \quad (67)$$

式中: $M'_1 = G_{i,j}^{\prime T} + G'_{i,j} - Q'_{i,j}$; $M'_2 = A_e G'_{i,j} + B_e Y'_{i,j}$.

定理 3 的证明与定理 1 类似, 这里不再赘述.

由此, 式 (27)、(28) 可重新表示为式 (49)、(50)、(62)、(63). 由式 (20)、(21) 可得预测控制序列. 计算得到的 $F(i, j)$ 和 $K(i, j)$ 可用于式 (49)、(50)、(62)、(63) 下一时刻的预测.

5 基于凸观测误差不变集的事件触发

由于观测误差是渐近收敛的, 在预测模型和控制器设计中, 若仅用不变集 O 表示控制过程中的观测误差不变集, 势必会增大系统的保守性. 并且由于辅助反馈增益和标称控制增益均需通过优化问题求解,

计算量较大. 为降低计算量和系统保守性, 本节将基于不变集 O 离线计算不变集序列, 随后设计触发条件来寻找满足当前误差的最小不变集, 从而更新增广误差不变集和控制增益.

根据式 (11) 获得的凸不变集 O 离线计算观测误差不变集序列.

$$\mathbf{o}_i(\rho_a) = \frac{\rho_a}{n} \mathbf{o}_i, \quad \rho_a = a, a=1, 2, \dots, n \quad (68)$$

则 $O(\rho_a) = \sum_{i=1}^r \lambda_i \mathbf{o}_i(\rho_a)$, 可以组成观测误差不变集序列 $\{O(\rho_n)\} = O(\rho_n), O(\rho_{n-1}), \dots, O(\rho_1)$.

理论上, 通过将实时的观测误差 $\mathbf{e}(\hat{k})$ 与不变集序列从小到大对比, 就可以得知当前观测误差 $\mathbf{e}(\hat{k})$ 所满足的最小不变集 $O(\hat{k})$, 其表达式为

$$O(\hat{k}) = O(\rho_b) = \{\mathbf{e}(\hat{k}) \notin O(\rho_a), a=1, 2, \dots, b-1, \mathbf{e}(\hat{k}) \in O(\rho_b)\} \quad (69)$$

由于刚体状态可测, 能直接用于控制量计算, 因此在式 (12) 未考虑刚体状态的观测误差, 然而通过龙伯格观测器得到的刚体观测状态仍可能存在观测误差, 且此观测误差已知. 因而对于未知的弹性观测误差, 可利用已知的刚体观测误差间接反映弹性观测误差的变化情况. 即通过判断刚体观测误差与不变集的匹配情况, 来确定弹性观测误差对应的误差不变集. 选取刚体观测误差不变集顶点 \mathbf{o}_i^g , 构建刚体观测误差不变集序列 $\{O(\rho_n)^g\}$, 计算每个凸集合 $O(\rho_a)^g$ 对应的法向量矩阵 $\mathbf{H}_{\rho_a}^g$ 和偏移向量 $\mathbf{b}_{\rho_a}^g$. 若刚体误差满足下述不等式, 则证明刚体误差进入了法向量矩阵 $\mathbf{H}_{\rho_a}^g$ 和偏移向量 $\mathbf{b}_{\rho_a}^g$ 对应的凸集合 $O(\rho_a)^g$ 中, 即

$$\mathbf{H}_{\rho_a}^g \mathbf{e}_g(\hat{k}) \leq \mathbf{b}_{\rho_a}^g \quad (70)$$

由此确定弹性观测误差对应的误差不变集 $\mathbf{e}_t(\hat{k}) \in O(\rho_a)^g$. 若观测误差所处不变集发生变化则触发更新增广误差不变集和控制增益 $\mathbf{F}(i, j)$ 和 $\mathbf{K}(i, j)$, 事件触发条件设计为

$$O_{t_c} = O(\rho_b^{t_c}) = \{\mathbf{e}_g(t_c) \notin O(\rho_a)^g, a=1, 2, \dots, b-1, \mathbf{e}_g(t_c) \in O(\rho_b^{t_c})^g\} \quad (71)$$

$$t_{c+1} = \min\{t \in N_{\geq t_c+1} \mid O_{t_{c+1}} \neq O_{t_c}\} \quad (72)$$

定理 4 对于状态不可测的多胞系统 (6), 设计了龙伯格观测器 (7) 和子控制器 (49)、(50)、(62)、(63), 考虑事件触发条件 (72), 根据定理 1~3, 存在子辅助反馈控制增益 $\mathbf{F}(i, j)$ 和子标称控制增益 $\mathbf{K}(i, j)$ 使得闭环系统的所有信号都鲁棒稳定.

证明: 龙伯格观测器的观测增益 L 能保证观测状态 $\mathbf{x}(\hat{k})$ 稳定跟踪实际状态 $\mathbf{x}(\hat{k})$ [23].

定理 1 和 2 证明了子辅助反馈控制增益 $\mathbf{F}(i, j)$ 能够使得观测系统 (14) 稳定跟踪标称系统 (23). 对于固定的增广误差不变集, 如果观测系统和标称系统的初始状态满足

$$\mathbf{e}(0) = \hat{\mathbf{x}}(0) - \mathbf{z}(0) \in W' \quad (73)$$

那么观测系统 (14) 满足

$$\hat{\mathbf{x}}(\hat{k}) \in \mathbf{z}(\hat{k}) \oplus W' \quad (74)$$

若增广不变集发生变化, 将重新算控制增益 $\mathbf{F}(i, j)$ 和 $\mathbf{K}(i, j)$, 则在触发时刻 t_c 有

$$\mathbf{e}(t_c) = \hat{\mathbf{x}}(t_c) - \mathbf{z}(t_c) \in W'(t_c) \quad (75)$$

那么在下一个触发时刻前, 观测系统满足

$$\hat{\mathbf{x}}(t_c + i) \in \mathbf{z}(t_c + i) \oplus W'(t_c) \quad i=1, 2, \dots, t_{c+1} - t_c \quad (76)$$

观测状态能够收敛至以标称状态为中心的不变集范围内. 虽然不变集会变化, 但是控制误差一直是有界的.

根据定理 3 设计的子标称控制增益 $\mathbf{K}(i, j)$ 可以保证标称系统稳定跟踪参考轨迹, 从而证明了多胞系统 (6) 的稳定性.

基于事件触发的分解式输出反馈模型预测控制算法的伪代码如下所示.

初始化: 获得 \mathbf{F} 、 \mathbf{K} , 由式 (11) 和 (68) 获得凸增广误差不变集序列;

输入: 仿真时间 T , 预测时域 N ;

for $\hat{k} \in [1, T]$

由龙伯格观测器获得观测状态 $\hat{\mathbf{x}}(\hat{k})$;

if 事件触发条件 (72) 满足 then

更新增广误差不变集;

$\hat{\mathbf{x}}(0, 0, 0) = \hat{\mathbf{x}}(0, 0) = \hat{\mathbf{x}}(0) = \hat{\mathbf{x}}(\hat{k}), \hat{\mathbf{z}}(0, 0, 0) =$

$\hat{\mathbf{z}}(0, 0) = \hat{\mathbf{z}}(0) = \mathbf{z}(\hat{k}), \hat{\mathbf{v}}(0, 0, 0) = \hat{\mathbf{v}}(0, 0) = \hat{\mathbf{v}}(0) =$

$\mathbf{v}(\hat{k});$

利用 $\hat{\mathbf{x}}(0, 0)$ 、 $\hat{\mathbf{z}}(0, 0)$ 、 $\hat{\mathbf{v}}(0, 0)$ 由优化问题 1 和 2 求

解 $\mathbf{F}(0, 0)$ 和 $\mathbf{K}(0, 0)$;

for $k \in [0, N], j \in [1:k], i \in [1:r]$

由式 (22)、(24)、(26) 获得 $\hat{\mathbf{x}}(0, k)$ 、 $\hat{\mathbf{x}}(i, j, k)$ 、

$\hat{\mathbf{z}}(0, k)$ 、 $\hat{\mathbf{z}}(i, j, k)$ 、 $\hat{\mathbf{v}}(0, k)$ 、 $\hat{\mathbf{v}}(i, j, k)$;

通过式 (49) 和 (62) 预测 $\hat{\mathbf{u}}(0, k)$ 、 $\hat{\boldsymbol{\phi}}(0, k)$;

end for

for $k \in [1:N], j = k, i \in [1:r]$

通过式 (47)、(48)、(60)、(61) 缩紧子管的控制约束;

通过优化问题 1 和 2 获得 $\mathbf{F}(i, j)$ 、 $\mathbf{K}(i, j)$;

通过式 (50)、(63)、(20)、(24) 预测 $U(j, k)$ 、

$\boldsymbol{\Phi}(j, k)$;

end for

else

```

保持上一时刻计算的增广误差不变集和控制增益
F(i, j)、K(i, j) ;
end if
    for k ∈ [0, N], j ∈ [1: k], i ∈ [1: r]
        通过式 (20)、(21) 获得预测控制序列 {u(k)};
        将 {u(k)} 应用到弹性高超声速飞行器中.
    end for
end for

```

6 仿 真

初始飞行条件为高度 $h = 26\ 060.4\ \text{m}$ ，速度 $v = 2\ 407.92\ \text{m/s}$ 。参考指令为阶跃信号，高度上升 $182.88\ \text{m}$ ，速度增加 $60.96\ \text{m/s}$ 。控制输入约束为 $-30^\circ \leq \delta_e \leq 30^\circ, 0 \leq \phi \leq 1.5$ 。

在本文方法中，令扰动集合的顶点数 $r = 4$ ，扰动集合的顶点 w_i 和观测误差不变集的顶点 o_i 为

$$\begin{cases}
 w_1 = [2.54 & 1.62 & 0.003 & 0.003 & 0.04 & 0.08 \\
 & 1.51 & 0.24 & 2.8]^T \\
 w_2 = [-2.54 & 1.62 & 0.003 & 0.003 & 0.04 \\
 & 0.08 & 1.51 & 0.24 & 2.8]^T \\
 w_3 = [2.54 & -0.48 & -0.0009 & 0.003 & -0.01 \\
 & -0.02 & 1.51 & -0.07 & -0.84]^T \\
 w_4 = [-2.54 & 0.97 & 0.002 & -0.003 & 0.02 \\
 & 0.05 & -1.51 & 0.15 & 1.68]^T \\
 o_1 = [8.97 & 5.36 & 0.07 & 1.1034 & 0.88 \\
 & 2.19 & 6.45 & 0.78 & 7.09]^T \\
 o_2 = [-8.97 & 5.36 & 0.07 & 1.1034 & 0.88 \\
 & 2.19 & 6.45 & 0.78 & 7.09]^T \\
 o_3 = [5.07 & -2.82 & -0.03 & 0.73 & -0.43 \\
 & -1.04 & 4.15 & -0.32 & -3.38]^T \\
 o_4 = [-6.4 & 3.74 & 0.048 & -0.83 & 0.6 \\
 & 1.47 & -4.82 & 0.51 & 4.79]^T
 \end{cases}$$

通过与 Lorenzetti 等^[24]的方法做对比，来证明本文方法的有效性。将 Lorenzetti 等^[24]提出的在线优化矩形不变集的方法用于观测误差不变集的计算。在此基础上，考虑扰动的上、下界，构建增广误差矩形集。仿真对比结果如下。

分解式 Tube-MPC 为本文所提方法，Lorenzetti 等^[24]表示对比方法。红色曲线为所提方法的实际状态，蓝色曲线为所提方法的观测状态，绿色曲线为对比方法的实际状态。图 1 所示为两种方法阶跃响应曲线对比。可见，本文方法的超调量要小于对比方法，且快速性要好于对比方法。图 2 展示了上述两种

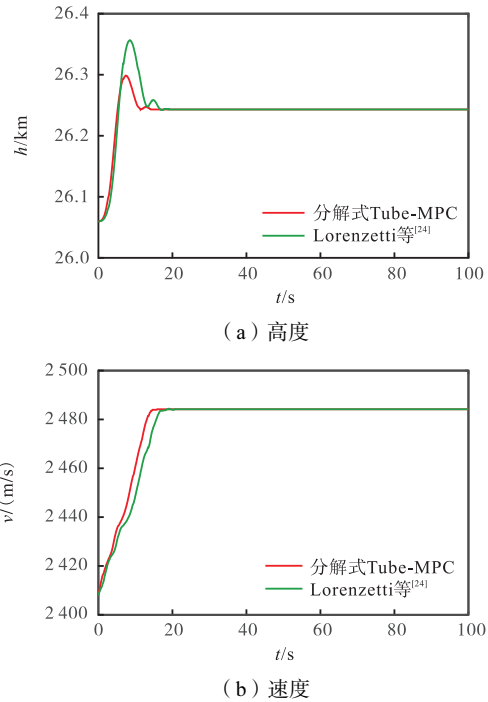


图 1 阶跃响应曲线对比
Fig.1 Comparison of step response curves

方法的攻角、俯仰角、俯仰角速率的对比，可见，本文方法不仅有更快的响应速度，而且状态波动小于对比方法，这得益于本文的事件触发机制，通过为观测状态实时寻找所满足的最小不变集，来更新控制律，而 Lorenzetti 等^[24]方法直接将在线计算的不变集用于计算控制律，这会导致出现不变集与状态不匹配的现象，所以会产生较大波动。图 3 为分解式管道模型预测控制与对比方法的弹性模态对比。由此可见，分解式观测器能准确估计实际状态，并且弹性模态及其导数的波动小于对比方法。图 4 所示为两种方法的空气当量比和舵偏角的对比，可知本文方法能够保证控制输入维持在控制约束内，并且逐渐收敛至定值。图 5 展示了前 20 s 的事件触发时刻，纵轴表示触发状态，1 表示事件已触发，0 表示事件未触发，线条越密代表触发发生越频繁，由于观测误差在此期间已经稳定在最小的观测误差不变集中，所以后续不会再发生事件触发。图 6 所示为两种方法对于同一增广误差约束集的近似情况。为将结果可视化，采用主成分分析 (principal components analysis, PCA) 方法将数据降至 3 维。可见所提方法计算的凸集小于矩形集，从而降低了保守性。相比之下，对比方法在仿真软件的求解运行时间为 15.52，而本文方法的求解时间为 12.83 (此时间为仿真软件内部的逻辑计算时间，属于相对时间，无量纲)，这表明本文方法在计算效率上优于对比方法，这是由于对比方法需在线计算不变

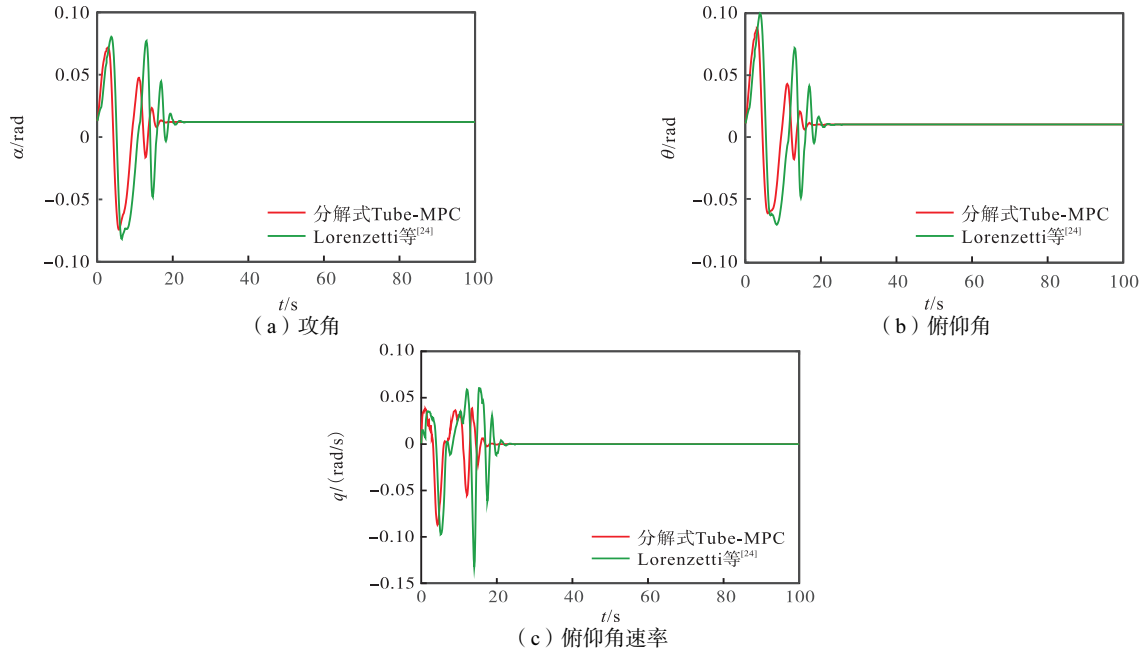


图 2 刚体状态对比

Fig.2 Comparison of rigid body states

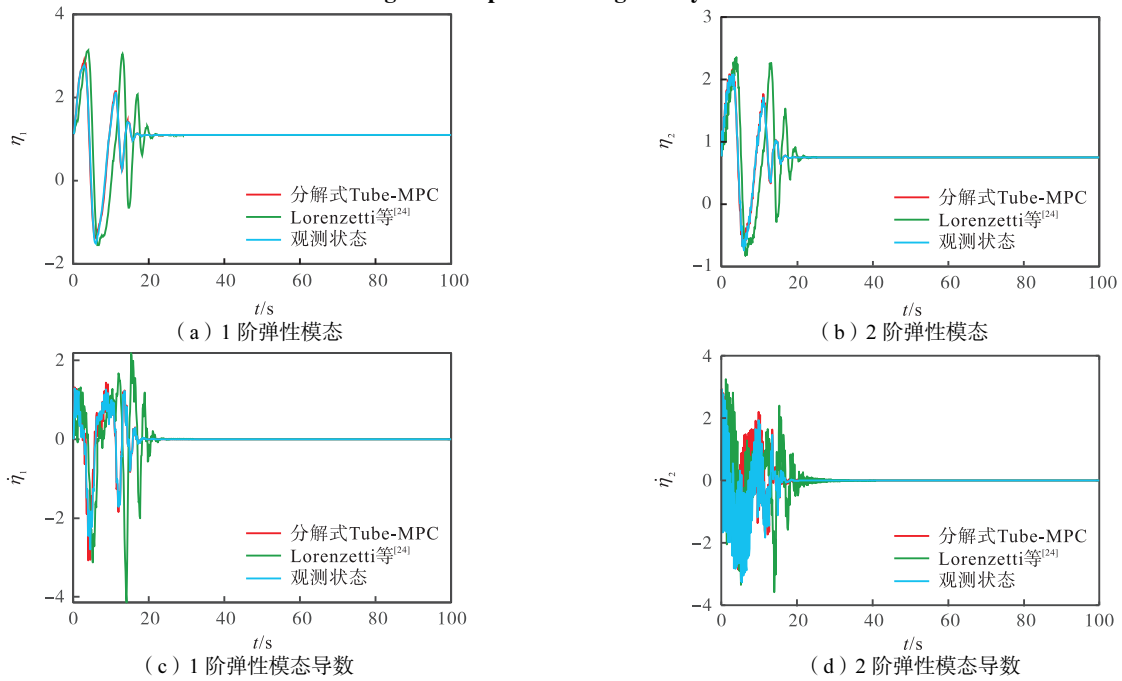


图 3 弹性模态对比

Fig.3 Comparison of flexible modes

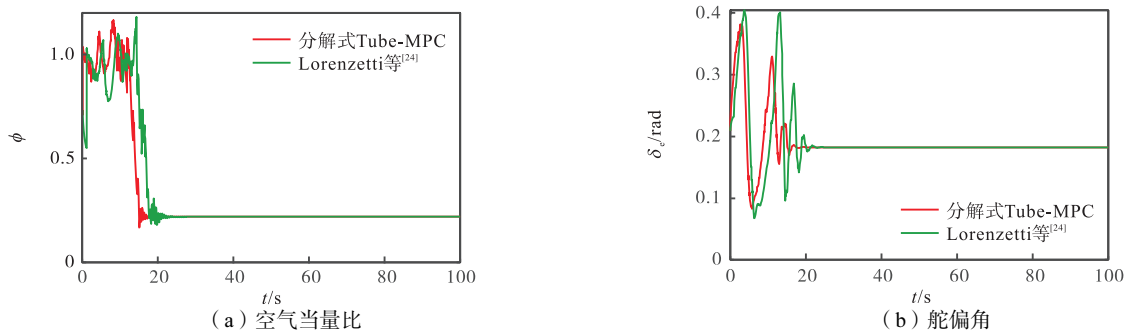


图 4 控制输入对比

Fig.4 Comparison of control inputs

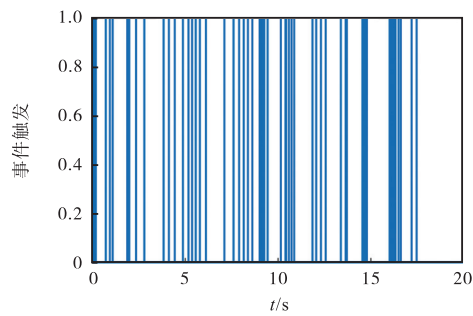


图 5 事件触发时刻

Fig.5 Event trigger time

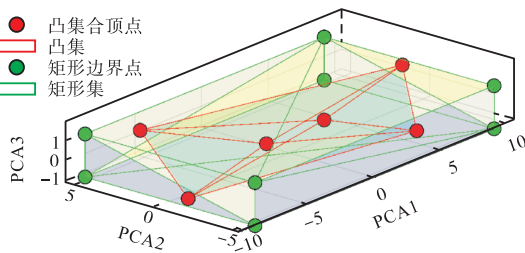


图 6 不变集对比

Fig.6 Comparison of invariant set

集,而本文方法已预先离线计算不变集序列,仅需在线调用即可。此外,在 10 个步长的运行时间方面,本文方法仅为 0.12,而对比方法高达 170.32,这一显著差异表明,事件触发机制有效减少了本文方法的计算量,从而大幅提升了计算效率。由此,可证明本文方法的有效性。

7 结 语

本文提出了一类基于事件触发的分解式输出反馈管道模型预测控制方法,以解决带有扰动和不确定性的弹性高超声速飞行器控制问题。通过雅可比线性化和张量积变换,构建包含扰动的多胞 LPV 模型。设计龙伯格状态观测器观测未知弹性状态。提出凸观测误差不变集的迭代算法。并结合附加集总扰动建立凸增广误差不变集。将预测状态管表示为各子状态管的闵可夫斯基和的形式,形成了分解式观测、标称和参考模型。基于线性矩阵不等式求解子辅助反馈控制增益和子标称控制增益。此外,设计子管输入约束缩减策略,根据既往子控制序列缩减每时刻的控制约束。为降低计算量和保守性,设计事件触发机制,离线求解观测误差不变集序列、在线确定观测误差对应的观测误差不变集。当不变集发生变化时,更新增广误差不变集和控制增益。仿真结果验证所提方法的有效性。

参考文献:

- [1] Chen M, Jiang C S, Wu Q X. Disturbance-observer-based robust flight control for hypersonic vehicles using neural networks[J]. *Advanced Science Letters*, 2011, 4(4/5): 1771-1775.
- [2] Yang X H, Lv W J, Hu C F, et al. Tube-model predictive control based on sum of squares for hypersonic vehicle with state-dependent input constraints[J]. *Transactions of The Institute of Measurement and Control*, 2022, 44(5): 1000-1013.
- [3] Ping X B. Output feedback robust MPC based on off-line observer for LPV systems via quadratic boundedness[J]. *Asian Journal of Control*, 2017, 19(4): 1641-1653.
- [4] 吴云洁, 王建敏, 刘晓东, 等. 带有干扰观测器的高超声速飞行器滑膜控制[J]. *控制理论与应用*, 2015, 32(6): 717-724.
Wu Yunjie, Wang Jianmin, Liu Xiaodong, et al. Disturbance-observer-based sliding mode control for hypersonic flight vehicle[J]. *Control Theory & Applications*, 2015, 32(6): 717-724(in Chinese).
- [5] Huang B, Li A J, Xu B. Adaptive fault tolerant control for hypersonic vehicle with external disturbance[J]. *International Journal of Advanced Robotic Systems*, 2017, 14(1): 1-7.
- [6] 齐乃明, 宋志国, 秦昌茂. 高超声速飞行器自抗扰 PID 姿态控制[J]. *弹箭与制导学报*, 2010, 30(5): 66-68.
Qin Naiming, Song Zhiguo, Qin Changmao. ADRC PID attitude control of a hypersonic flight vehicle[J]. *Journal of Projectiles, Rockets, Missiles and Guidance*, 2010, 30(5): 66-68(in Chinese).
- [7] Zheng X, Liu Z S, Yang Y, et al. Trajectory tracking for RBCC-powered hypersonic vehicle based on LADRC [J]. *Missiles and Space Vehicles*, 2019, 47(5): 84-90.
- [8] Wang Q, Stengel R F. Robust nonlinear control of a hypersonic aircraft[J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2000, 23(4): 577-585.
- [9] 王伟, 李建, 李爱军, 等. 基于 μ 综合方法的飞机纵向鲁棒飞行控制系统设计[J]. *西北工业大学学报*, 2006, 24(2): 138-142.
Wang Wei, Li Jian, Li Aijun, et al. Adding robustness to good command response of aircraft longitudinal flight control system[J]. *Journal of Northwestern Polytechnical University*, 2006, 24(2): 138-142(in Chinese).

- [10] Kuipers M, Ioannou P, Fidan B, et al. Robust adaptive multiple model controller design for an airbreathing hypersonic vehicle model[C]//Proceedings of AIAA Guidance, Navigation and Control Conference and Exhibit. Honolulu, USA, 2008: 1-21.
- [11] 孟中杰, 符文星. 高超声速飞行器鲁棒控制器设计[J]. 弹箭与制导学报, 2009, 29(2): 12-15.
Meng Zhongjie, Fu Wenxing. Robust control design for a hypersonic vehicle[J]. Journal of Projectiles, Rockets, Missiles and Guidance, 2009, 29(2): 12-15 (in Chinese).
- [12] Raghuraman V, Koeln J P. Tube-based robust MPC with adjustable uncertainty sets using zonotopes[C]//2021 American Control Conference. New Orleans, USA, 2021: 462-469.
- [13] Peschke T, Gorges D. Sequential multi-stage and tube-based robust MPC for constrained linear systems with multiplicative uncertainty[J]. IEEE Control Systems Letters, 2021, 5(6): 2150-2155.
- [14] Parsi A, Iannelli A, Smith R S. Scalable tube model predictive control of uncertain linear systems using ellipsoidal sets[J]. International Journal of Robust Nonlinear Control, 2022, 31(18): 1-22.
- [15] Rakovic S V, Kouvaritakis B, Cannon M, et al. Parameterized tube model predictive control[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2012, 57(11): 2746-2761.
- [16] Xu B, Wang D W, Zhang Y M, et al. DOB-based neural control of flexible hypersonic flight vehicle considering wind effects[J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2017, 64(11): 8676-8685.
- [17] Huang Y Q, Sun C Y, Qian C S, et al. Polytopic LPV modeling and gain-scheduled switching control for a flexible air-breathing hypersonic vehicle[J]. Journal of Systems Engineering and Electronics, 2013, 24(1): 118-127.
- [18] Hu X X, Wu L G, Hu C H, et al. Adaptive sliding mode tracking control for a flexible air-breathing hypersonic vehicle[J]. Journal of the Franklin Institute, 2012, 349(2): 559-577.
- [19] An H, Liu J X, Wang C H, et al. Approximate backstepping fault-tolerant control of the flexible air-breathing hypersonic vehicle[J]. IEEE/ASME Transactions on Mechatronics, 2015, 21(3): 1680-1691.
- [20] Zhang X Y, Xue W C, Zhao Y L. On observability analysis and observer design for a class of nonlinear uncertain systems with general elastic vibration dynamics[J]. Asian Journal of Control, 2022, 24(4): 2013-2024.
- [21] Parker J T, Bolender M A, Doman D B. Control-oriented modeling of an air-breathing hypersonic vehicle[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2007, 30(3): 856-869.
- [22] Qin W W, Zheng Z Q, Li Z, et al. Robust model predictive control for hypersonic vehicle based on LPV[C]//Proceedings of the 2010 IEEE International Conference on Information and Automation. Harbin, China, 2010: 1012-1017.
- [23] Bumroongsri P. Tube-based robust MPC for linear time-varying systems with bounded disturbances[J]. International Journal of Control, Automation, and Systems, 2015, 13(3): 620-625.
- [24] Lorenzetti J, Pavone M. A simple and efficient tube-based robust output feedback model predictive control scheme[C]//2020 European Control Conference. Petersburg, Russia, 2020: 1775-1782.

(责任编辑:孙立华)