

DOI:10.11784/tdxbz202502001

R-Graph: 面向机器人机构智能设计的表征与计算框架

孙涛, 王博, 霍欣明, 宋泽宏

(天津大学机构理论与装备设计教育部重点实验室, 天津 300350)

摘要: 智能化是机器人创新设计的必然趋势, 其核心在于利用人工智能技术从设计数据中学习机器人机构组成规律, 并模拟人类思维开展设计. 实现机器人智能设计需满足两个基本前提: 一是提出有效的机器人机构数字化表征方法, 全面、准确地描述机器人机构信息, 以便于设计数据的计算机识别和存储; 二是具备快速计算机器人机构运动、力学等性能的能力, 这些性能指标也反映了机器人机构设计需求. 本文提出一种新的数字化语言——机器人图结构(R-Graph), 用于表征和计算机器人机构及其性质. 首先, 利用异构图的节点和边分别表示机器人机构组成构件及其连接关系, 揭示 R-Graph 具有的性质, 分别定义节点特征和边特征的存储结构. 在此基础上, 提出了一种基于图相似度匹配的机构拓扑同构判别方法, 并利用图信息传递机制实现了机器人机构运动/力性质的自动求解. 最后, 讨论了 R-Graph 在机器人机构智能创新设计中的潜在应用. 与传统拓扑图相比, R-Graph 不仅能够捕捉运动变量及相关信息, 还将轴线关系的表示从布尔值转换为实数矩阵, 从而在欧几里得空间和非欧几里得空间中实现统一表征. 通过利用这一全面的信息表征结构, 能够实现机构运动和力的自动计算, 为机器人机构的智能设计提供结构化的数据基础. R-Graph 为机器人机构的智能设计提供了新的理论基础和工具, 有望推动机器人设计自动化和智能化的发展.

关键词: 机器人机构表征; 运动/力计算; 拓扑图; 智能设计

中图分类号: TH122 **文献标志码:** A **文章编号:** 0493-2137(2026)03-0221-12

Robot Graph Structure: A Representation and Computational Framework for Intelligent Design of a Robotic Mechanism

Sun Tao, Wang Bo, Huo Xinming, Song Zehong

(Key Laboratory of Mechanism Theory and Equipment Design of Ministry of Education, Tianjin University, Tianjin 300350, China)

Abstract: Intelligence represents an inevitable trend in the innovative design of robotics. Its core comprises the utilization of artificial intelligence to learn the laws governing the composition of robotic mechanisms from design data, as well as to simulate human thought in the design process. Two fundamental prerequisites are essential for realizing intelligent design in robotics: an effective digital representation of robotic mechanisms, which comprehensively and accurately describes their information, thereby facilitating computer recognition and storage, and a rapid computation of the performances of these robotic mechanisms, which is also the primary objective of mechanism design. In this study, a novel digital language—robot graph structure (R-Graph)—was introduced for the representation and computation of robotic mechanisms and their properties. In this structure, the nodes and edges of a heterogeneous graph were firstly used to represent the components of a robotic mechanism and their connecting relationships, respectively. Thereafter, the node and edge feature matrices were defined, followed by the analysis of the properties

收稿日期: 2025-02-05; 修回日期: 2025-03-20.

作者简介: 孙涛 (1983—), 男, 博士, 教授, stao@tju.edu.cn.

通信作者: 霍欣明, xmhuo@tju.edu.cn.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(52275028); 天津市杰出青年科学基金资助项目(22JCJQC00050); 天津市应用基础研究项目(22JCZDJC00350, 22JCYBJC01670).

Supported by the National Natural Science Foundation of China (No. 52275028), the Science Fund for Distinguished Young Scholars of Tianjin, China (No. 22JCJQC00050), the Applied Basic Research Program of Tianjin, China (No. 22JCZDJC00350, No. 22JCYBJC01670).

of R-Graph. On this basis, a method for discriminating the topological isomorphism of mechanisms was proposed based on graph similarity matching, yielding the automatic solution of the motion/force properties of the mechanisms based on graph information transfer mechanisms. Finally, the potential applications of R-Graph in the innovative, intelligent design of robotic mechanisms were explored. Compared with traditional topological graphs, the results reveal that the proposed R-Graph captures motion variables and related information, as well as transforms the representation of axis relationships from Boolean values to real number matrices, realizing unified representations in Euclidean and non-Euclidean spaces. Further, this comprehensive information representation structure can facilitate automatic motion/force computations, providing an institutionalized data foundation for intelligent robotic mechanism design. Overall, R-Graph offers a novel theoretical foundation, as well as tools, for intelligent robotic mechanism design, which can advance robotic design automation and intelligence.

Keywords: robotic mechanism representation; motion/force computation; topological graph; intelligent design

随着机器人技术的飞速发展,其应用领域正不断向极限环境拓展.快速开发满足特定需求的机器人机构,已成为学术界和工业界的研究热点与难点^[1].机器人智能设计作为突破传统设计范式的重要方向,旨在利用人工智能技术学习机构组成原理,模拟人类的创新思维,通过智能体与环境的交互实现创新设计^[2].然而,智能设计过程的实现面临诸多挑战,其中最为关键的是如何对机器人机构特征进行完整、准确的编码与存储,并正确理解组件间的复杂关系,从而实现设计元素的继承以及以功能和性能为导向的演化.因此,建立一种能够统一表示和计算机器人机构复杂多样特征的数字化语言,成为智能设计领域亟待解决的核心问题.

一般地,机器人机构特征可分为非欧几里得(非欧)特征和欧几里得(欧氏)特征 2 类.前者涵盖组件数量、类型及其连接关系等拓扑属性;后者包括杆件尺度、轴线夹角度量等几何属性及运动变量,用于性能计算.这些特征不仅具有不同的数据结构,而且相互耦合,实现其统一表征具有显著的挑战性.图结构作为一种能够高效存储非结构化数据的载体,为机器人特征的数字化编码提供了可行的框架^[3].

基于图的机构特征表征始于 20 世纪 60 年代,Freudenstein 等^[4-5]利用图的节点表示杆件,边表示运动副,提出了拓扑图,并定义了邻接矩阵作为其存储结构^[6].早期的拓扑图主要采用单色图描述平面机器人的拓扑结构^[7],随后 Ding 等^[8-9]引入双色节点表示多自由度复合铰链和连杆,并定义不同类型的边以表征连杆间关系及多自由度关节的连接.然而,传统拓扑图在表示空间机构的关节及其轴线关系时还存在一定的存在局限性.为此,Xia 等^[10]提出了一种图结构来描述关节轴线关系,与拓扑图共同表征空间机构的拓扑信息.Dai 等^[11]则通过运动空间变化重构操作来描述可重构机构的特性.Laman^[12]定义了图节点到

二维欧氏空间的映射函数,通过欧氏变换建立关节轴线的相对信息,并使用边表示距离或角度约束.然而,当机构中存在复合铰链时,该图结构无法唯一表示机构约束.Müller 等^[13-14]通过点、线和面等元素表征运动属性,使用节点权重表示组件的自由度,并通过边的数量表示关节节点对连杆节点的约束.Wittenburg^[15]提出了一种基于图的机构组件建模方法,用于特征计算.在拓扑设计研究中,学者们将知识转化为节点和边的约束,通过组合关节生成可行的机构,如平面机构、并联机构和可展开机构等^[16-17].

尽管如此,现有方法在表示和计算复杂空间机器人机构时仍面临以下挑战:①现有的表征方法聚焦于机器人机构的非欧特征(拓扑特征),难以通过节点和边的特征表达机器人机构的几何信息并进行计算;②在非欧特征(拓扑特征)表达方面,仍无法完整表达机构拓扑,尤其是关节和空间轴线关系等影响自由度和性能的关键信息.针对上述问题,本文拟提出一种新型图结构,用于表示、存储和计算机器人机构的欧几里得(几何特征)与非欧几里得特征(拓扑特征).主要贡献包括:①实现空间机器人构型特征的完整表示,涵盖复合关节和空间轴线关系;②基于图结构连接关系,提出适用于任意状态下的机构运动与力求解方法.

本文从非欧特征(拓扑特征)和欧氏特征(几何特征)的角度探讨机器人机构的表示与计算,重点介绍机器人图结构(robot graph structure, R-Graph)的定义,并提出基于图性质的拓扑同构判别方法以及运动与力自动计算方法.最后,本文讨论了 R-Graph 在机器人智能设计中的潜在应用,为未来研究提供新的思路和方向.

1 R-Graph

机器人由多个组件及连接这些组件的关节组成.

各组件和关节之间存在着紧密的耦合关系,这种耦合关系共同决定了机器人末端执行器的运动和力学性能. 鉴于机器人各组成部分及它们之间复杂的连接关系,从机构学的角度出发,定义集合 $G = \{\{v_j\}, \{v_L\}, (v_j, v_L)\}$ 来表征机器人信息. 其中, v_j 和 v_L 分别表示机器人的关节和组件, (v_j, v_L) 表示关节和组件间的连接关系. 这种定义形式能够将机器人的物理组成和相互关系以数学集合的形式呈现,方便进行理论分析与计算.

为了更直观且全面地展示机器人信息,将上述集合定义为一种可视化的数据结构——R-Graph. R-Graph 借助图论中的节点和边等元素清晰地描述机器人各部分组成及其复杂的连接关系,从而为机器人信息的数字化表征和计算提供有效工具.

1.1 R-Graph的定义

R-Graph 是一种加权异构图,记为 $G = (V, E, F_v, F_e)$. 其中, $V = \{v_1, v_2, \dots, v_N\}$ 表示图中所有节点的集合, $E = \{e_1, e_2, \dots, e_M\}$ 表示图中所有边的集合, $F_v \subseteq \mathbf{R}^{N \times p_v}$ 是节点的属性特征矩阵,每个节点的属性特征使用 p_v 维向量描述, $F_e \subseteq \mathbf{R}^{N \times N \times p_e}$ 是表征边特征的三阶张量,每 2 个节点间的边特征采用 p_e 维向量描述. 若两个节点间没有边连接,则该向量为 0.

1) 节点

如图 1 所示, R-Graph 由 2 种类型的节点构成: 一类是组件节点,包括固定基座(B)、末端执行器(O)以及连杆(L),其属性包括尺寸和形状;另一类是关节节点,包括转动副(R)、移动副(P)、螺旋副(H)、球副(S)、虎克副(U),属性包括是否为驱动关节和关节变量等.

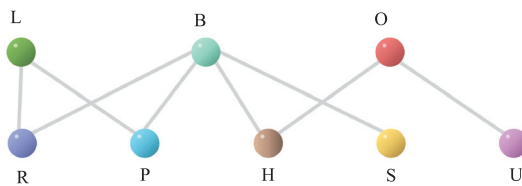


图 1 R-Graph 的组成
Fig.1 Components of R-Graph

节点类型的映射函数记为 $\phi: V \rightarrow A$, A 是节点类型的集合.

$$\begin{cases} v_i \in A \\ A = \{\{v_L\}, \{v_j\}\} \\ F_v \in \{\text{“尺度”, “运动变量”, “驱动/被动关节”}\} \end{cases} \quad (1)$$

2) 边

在 R-Graph 中有邻接关系的节点间均通过边来连接,边的属性用于表征组件和关节节点间的相对位置和方向. 边类型的映射函数记为 $\theta: E \rightarrow B$, B 为边类型的集合.

$$\begin{cases} e_i \in B \\ B = \{(v_L, v_j)\} \\ F_e \in \{\text{“方位”, “连接关系”}\} \end{cases} \quad (2)$$

3) 度

与节点 i 相连的边的个数称为该节点的度,记为 $m(v_i)$. 对于组件节点,度 $m(m > 0)$ 表示与其连接的关节数量. 图 2 展示了可能出现的组件节点的情况,上层为组件节点的几何表示,下层为组件节点对应 R-Graph 中的表示.

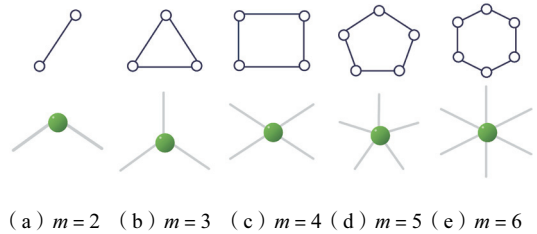


图 2 组件节点的度

Fig.2 Degree of body vertex

对于关节节点,其度数 m 至少为 2. 当 $m > 2$ 时,表示该关节为复合铰链. 如图 3 所示,上层为关节节点的几何表示,下层为关节节点对应 R-Graph 中的表示.

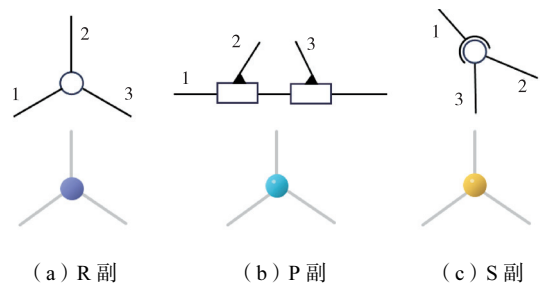


图 3 复合运动副表征

Fig.3 Multiple joint vertex

基于 R-Graph 的定义,采用 R-Graph 分别表示具有串联腿式结构的四足移动机器人、Rubik's Cube 混联机器人和五自由度并联加工机器人(4UPS-PSR),如图 4 所示.

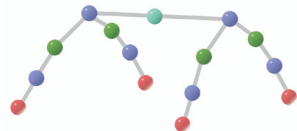
1.2 R-Graph 的性质

结合图论和 R-Graph 的定义, R-Graph 具有如下性质.

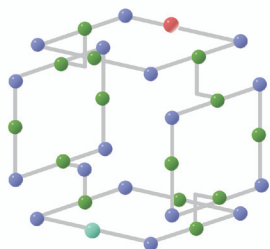
性质 1: 表征机器人信息的 R-Graph 均从节点-

固定基座 B 开始,依次连接关节节点和组件节点并以一个或多个节点-末端执行器 O 结束.

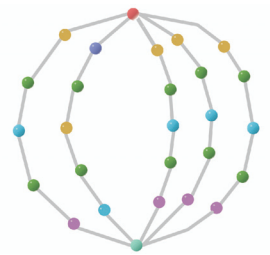
性质 2:如图 1 所示,组件节点集和关节节点集中的节点均通过边连接,且每条边所关联的两个节点分别属于这两个不同的节点集.因此,R-Graph 是不存在孤立节点的二部图.



(a) 四足移动机器人



(b) Rubik's Cube 混联机器人



(c) 五自由度并联加工机器人

● O ● B ● L ● R ● P ● S ● U

图 4 不同类型机器人的 R-Graph

Fig.4 Different types of robots represented by R-Graph

性质 3:机器人的运动学可以根据起始节点和末端节点间的路径传递过程进行分析.

给定 R-Graph,节点序列 v_0, v_1, v_2, ..., v_k 满足 (v_{i-1}, v_i) in E 对所有 1 <= i <= k 成立,则称该序列为节点 v_0 至 v_k 的路径 P,其长度指路径中边的数量.例如, v_0, v_1, v_2, ..., v_k 路径的长度为 k.如果路径中所有节点互不相同,则称为简单路径.如果路径的起点和终点相同且边不重复,则称为环.基于图论,搜索所有简单路径需要找出从源节点到目标节点的所有不重复路径.如果存在两条以上简单路径且每条路径至少包含 3 个节点,则表明该机器人具有闭环结构.如果末端节点的度数大于 2,那么该机器人为并联机构.如果末端节点是度数为 1 的组件节点,那么该机器人为混联机构.如果起始节点和末端节点之间不存在环,那么该机器人为串联机构.

性质 4:机构中某个关节的位置可以通过该节点

与起始节点间的距离进行描述.

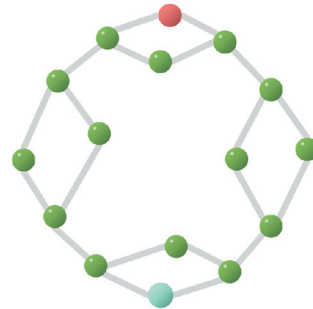
性质 5:假设在一个 R-Graph 中,采用集合 U subset V(G) 表示所有度为 2 的关节节点,通过 G-U = G[V \setminus U] 运算得到一个新的图结构,记为拓扑图 G_T = (V, E, F_v, F_e)

$$\begin{cases}
 v_i \in A \\
 A = \{B, O, R, P, H, S, U, L\} \\
 e_i \in B \\
 B = \{(v_L, v_j), (v_j, v_j)\} \\
 F_e \in \{\text{"关节类型"}\}
 \end{cases} \tag{3}$$

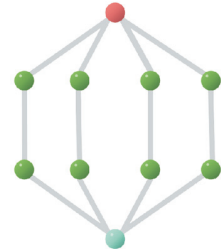
根据 R-Graph 的性质 5,可以得到表征机构拓扑信息的拓扑图.以四足移动机器人、Rubik's Cube 混联机器人和五自由度并联加工机器人为例,这 3 种机构的拓扑图如图 5 所示.图中的节点表征了机构中的组件(固定基座、末端执行器和连杆等),边表征了机构中的关节.该拓扑图与传统的机构拓扑图的区别在于其保留了度大于 2 的关节节点,表征了复合铰链的信息.



(a) 四足移动机器人



(b) Rubik's Cube 混联机器人



(c) 五自由度并联加工机器人

● O ● B ● L

图 5 不同类型机器人的拓扑图

Fig.5 Topological graphs of different robots

尽管如此,该拓扑图仍无法描述机构中关节轴线信息和关节轴线间的关系.平面机构、空间 Bennett

和空间球面机构的拓扑均可由图 6(a)使用 4R 机构的拓扑图表示. 因此, 为了准确地区分不同机构的类型, 需要在拓扑图中添加更多的机构信息(如关节轴线等). 如图 6(b)所示, 使用节点表征了关节和组件, 使用边表征了节点间的邻接关系. 根据边上的信息可以确定两个关节轴线间的相对方位, 已区别不同的机构类型.

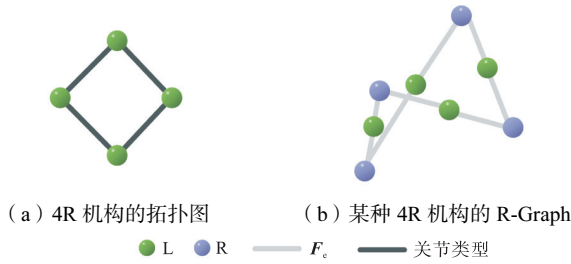


图 6 R-Graph 和拓扑图
Fig.6 R-Graph and topological graph

1.3 R-Graph 的存储结构

图的存储结构是指图中的节点和边以某种形式存储在计算机内存中的方式. 作为图论和计算机科学中的重要概念, 图的存储结构为图的计算机表示和计算提供了高效的工具. 由于图是一种非线性数据结构, 任意 2 个节点之间都可能存在一定的关系. 因此, 需要定义特定的存储结构来表示图的逻辑关系.

一般地, 拓扑图使用邻接矩阵或关联矩阵进行存储. 邻接矩阵描述组件之间的关系, 关联矩阵描述组件与关节间的关系. 两者均为二维矩阵, 数据维度受限.

为了能够记录更多的信息, R-Graph 的存储结构将通过以下两种方式进行扩展: ①节点不仅表征机构各个组件, 还将增加属性信息; ②以向量的形式定义并存储节点间的更多邻接信息.

1.3.1 节点的矩阵表征

节点的属性特征矩阵定义为

$$F_v = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ d_1 & d_2 & \cdots & d_n \end{bmatrix}_{4 \times n} \quad (4)$$

式中: a_i 表示第 i 个节点的类型, 使用表 1 中节点类型对应的布尔值进行表征; b_i 和 c_i 表示第 i 个节点的尺度参数和运动参数. 若该节点为组件节点, 则其运动参数为 0, 若该节点为关节节点, 则其尺度参数为 0; d_i 表示该节点属于主动关节还是被动关节. 当 $d_i=0$ 时, 表示关节为主动关节, 当 $d_i=1$ 时, 表示关节为被动关节.

表 1 关节节点的布尔值

Tab.1 Boolean values of the joint vertex

节点类型	布尔值
B	0
O	1
R	2
P	3
H	4
S	5
U	6
L	7

根据节点间相邻或不相邻的两种关系, R-Graph 的邻接矩阵表示为

$$A_d = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \\ v_1 & \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1n} \end{bmatrix} \\ v_2 & \begin{bmatrix} d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2n} \end{bmatrix} \\ \vdots & \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \\ v_n & \begin{bmatrix} d_{n1} & d_{n2} & \cdots & d_{nn} \end{bmatrix} \end{bmatrix}_{n \times n} \quad (5)$$

式中: 当两节点相邻时, $d_{ij}=1$; 当两节点不相邻时, $d_{ij}=0$. 度矩阵可以通过邻接矩阵计算得到

$$D_e = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^n d_{1k} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sum_{k=1}^n d_{2k} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sum_{k=1}^n d_{nk} \end{bmatrix}_{n \times n} \quad (6)$$

1.3.2 边的矩阵表征

为了能够区分存在拓扑同构性的机构, R-Graph 需要具备表征关节和组件间的方位关系等更多的信息的能力. 因此, 通过定义边的存储结构来表征所需信息.

如图 7 所示, 假设某个组件和第 i 个关节相连, 在组件的几何中心建立坐标系 $O_i-x_i y_i z_i$, 其中 x_i 沿着连杆方向, z_i 竖直向上, y_i 由右手螺旋法则确定. 在关节中心建立坐标系 $P_i-u_i v_i w_i$, 其中 w_i 与关节轴线方向重合, u_i 与 x_i 平行, 由 v_i 右手螺旋法则确定. 使用部件几何中心的坐标系和关节中心坐标系的相对方位表征关节节点相对于组件节点的方位特征, 在 R-Graph 中使用边的属性表示.

边的属性特征矩阵定义为

$$E_e = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \\ v_1 & \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & \cdots & e_{1n} \end{bmatrix} \\ v_2 & \begin{bmatrix} e_{21} & e_{22} & \cdots & e_{2n} \end{bmatrix} \\ \vdots & \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \\ v_n & \begin{bmatrix} e_{n1} & e_{n2} & \cdots & e_{nn} \end{bmatrix} \end{bmatrix}_{n \times n \times 7} \quad (7)$$

式中 e_{ij} 是 7 维向量, 表示关节轴线相对于组件的位置和方向. 如图 7 所示, 相对位置采用极坐标下的 ϕ 、 r 和 h 表示, 相对方向通过两个坐标系的相对转角 α 、 β 和 γ 表示. 关节节点和组件节点间的相邻性使用 d_{ij} 表示.

$$e_{ij} = [\phi \quad \alpha \quad \beta \quad \gamma \quad r \quad h \quad d_{ij}] \quad (8)$$

$$d_{ij} = \begin{cases} 1 & v_i \text{ 和 } v_j \text{ 相邻} \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (9)$$

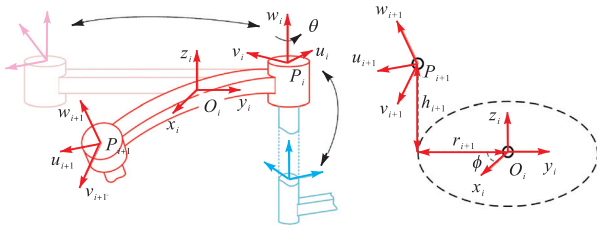


图 7 组件和关节坐标系的相对位置和方向

Fig.7 Relative position and orientation between body and joint coordinate systems

在本文提出的 R-Graph 中, 将关节与连杆间的布置形式定义为特征向量并将其赋予为边的属性. 结合式(4)定义了一个新的矩阵来表示关节和连杆的属性特征, 结合式(7)将邻接矩阵扩展为一个 $n \times n \times m$ 的三维矩阵. 对于 R-Graph 存储结构中新的定义矩阵不仅能够参数化地描述节点间的相邻关系而且包含了更多的元素特征. 如图 8 所示, 使用 R-Graph 表征的机构信息增加了 Np_v 和 N^2p_e 倍, 保存了节点间的空间关系等信息. 因此, 如图 6(b) 所示, 使用 R-Graph 定义的机器人机构可以容易地区分出 4R 机构的类型.

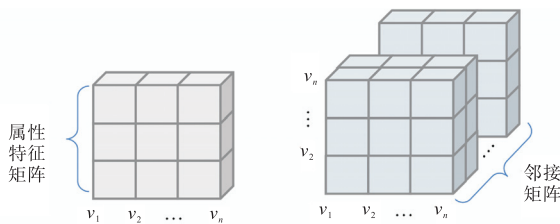


图 8 R-Graph 节点的属性特征矩阵和邻接矩阵

Fig.8 Vertex and adjacent matrices of R-Graph

基于传统的图对机构运动和力进行计算时, 无法直接使用邻接矩阵中的布尔值. 在 R-Graph 中, 连杆的尺寸信息存储在边的属性中, 能够利用这些数据方便地建立机器人的运动学模型. 使用线性向量描述末端执行器的位姿, 可以通过矩阵的齐次变换计算出连杆和关节等构件的位移和速度, 以进一步的分析机构的运动学性能.

2 R-Graph 的计算

2.1 机构拓扑的相似性计算与同构判别

在机器人机构发明过程中, 设计师常常从已知的机构中获得设计灵感, 找出成功案例的共同特征. 因此, 有必要基于定义的 R-Graph 对相似的拓扑结构进行识别. 假设存在两个拓扑结构 1 和 2, 如果它们的相似度越高, 那么将 1 转换为 2 所需的步骤就越少. 基于这一点, 图编辑距离被定义用来衡量两个图之间的相似性, 即把一个图转换为另一个图所需要的最少编辑操作次数, 包括增删节点和边. 相似拓扑的判别过程可概括为以下步骤.

步骤 1 拓扑结构与尺度无关, 可以通过移除 R-Graph 中度数为 2 的组件节点, 并将几何信息传递给连接节点的边来对其进行简化. 为了与拓扑图相区分, 将其定义为构型图 $G_c = (V, E, F_v, F_e)$

$$\begin{cases} v_i \in A, A = \{\{v_L\}, \{v_j\}\} \\ e_{ij} \in B, B = \{(v_L, v_j), (v_j, v_j)\} \\ F_v \in \left\{ \begin{array}{l} \text{“尺度”, “运动变量”,} \\ \text{“驱动/被动关节”} \end{array} \right\} \\ F_e \in \{ \text{“方位”, “连接关系”} \} \end{cases} \quad (10)$$

式中 $e_{ij} = [e_{ij}]$, 具体值根据表 2 确定.

表 2 边的布尔值

Tab.2 Boolean values of the edges

关系	几何表示	轴线夹角	是否存在轴线偏距	e_{ij}
平行		0	否	0
共线		0	是	1
垂直		$\frac{\pi}{2}$	否	2
相交		$0 \sim \frac{\pi}{2}$	是	3
正交		$\frac{\pi}{2}$	是	4
任意		$0 \sim \frac{\pi}{2}$	否	5

步骤 2 计算图编辑距离根据 Alberto^[18]对相似图变换的数学定义, 2 个图 G_1 和 G_2 间的图编辑距离表征为

$$GED(G_1, G_2) = \min_{(e_1, e_2, \dots, e_k) \in P(G_1, G_2)} \sum_{i=1}^k c(P_i) \quad (11)$$

式中: $P(G_1, G_2)$ 表示图 G_1 转换为图 G_2 的编辑路径的集合; $c(P_i) \geq 0$ 表示每条编辑路径 P_i 的操作次数.

$GED(G_1, G_2)$ 表示两个 R-Graph 之间的相似度, 值越低表示越相似. 当 $GED(G_1, G_2) = 0$ 时, 表示无需

将图 G_1 转换为图 G_2 . 此时, 图 G_1 和图 G_2 具有相同的图不变量: ①节点数和每个节点的度数; ②任意两个节点之间的边; ③环的数目. 换言之, 图 G_1 和图 G_2 具有同构性.

2.2 基于 R-Graph 的运动学性能计算

运动和力的自动计算在机构分析中具有至关重要的意义, 特别是在某一瞬时状态或初始状态. 这些性能指标能够为机构的设计、优化和性能评估提供关键的信息和依据, 确保机构能够安全、高效地实现预期的功能.

2.2.1 运动特征的计算

在某个瞬时 t , 节点 i 的运动特征函数可定义为

$$\mathbf{h}'_i = \hat{\theta}_i \boldsymbol{\xi}_i \quad (12)$$

式中: $\mathbf{h}'_i \subseteq \text{se}(3)$; $\hat{\theta}_i = \theta_i + \varepsilon d_i$, θ_i 和 d_i 为关节运动参数; $\boldsymbol{\xi}_i$ 表示单位运动轴线. 根据旋量理论可知, 运动轴线的矢量形式可以表达为

$$\boldsymbol{\xi}_i = [s_i \quad \mathbf{r}_i \times s_i + \rho_i s_i]^\top \quad (13)$$

式中: s_i 和 \mathbf{r}_i 分别表示运动轴线的方向矢量和位置矢量; ρ_i 为节距. 需要注意的是, 组件节点在 t_0 时刻的运动特征函数 $\mathbf{h}'_i = \mathbf{0}$.

基于机器人机构运动传递的特性, 节点运动信息的传递过程具有“从末端节点向下传递, 从起始节点向上更新”的特点. 假设两个相邻节点 i 和 j , 它们与起始节点的距离分别为 $d(v_i)$ 和 $d(v_j)$, 则节点 i 和 j 之间的运动信息传递函数定义为

$${}^j \mathbf{m}'_i = f_A(\mathbf{h}'_i, \mathbf{e}'_{ij}) \quad (14)$$

式中 \mathbf{e}'_{ij} 为节点 i 和 j 之间具有矢量形式的边的特征, 反映了机器人组件的结构特征, 不具有时变性. 基于运动学计算原理, 节点 i 和 j 之间的运动信息传输函数可以进一步表示为

$${}^j \mathbf{m}'_i = \mathbf{e}^{\mathbf{h}'_i} {}^j \mathbf{T} \quad (15)$$

式中: ${}^j \mathbf{m}'_i \subseteq \text{SE}(3)$; $\mathbf{e}^{\mathbf{h}'_i}$ 表示运动变换的指数积形式; ${}^j \mathbf{T}$ 为 \mathbf{e}'_{ij} 的齐次矩阵形式

$${}^j \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ [d \times] \mathbf{R} & \mathbf{R} \end{bmatrix} \quad (16)$$

式中 $\mathbf{d} = [x \quad y \quad z]^\top$ 和 $\mathbf{R} = \mathbf{R}_x(\alpha) \mathbf{R}_y(\beta) \mathbf{R}_z(\gamma)$ 分别表示位置矢量和姿态变换矩阵. $\mathbf{R}_x(\alpha)$, $\mathbf{R}_y(\beta)$, $\mathbf{R}_z(\gamma)$ 都是 3×3 阶的旋转矩阵. 位置矢量可以根据 R-Graph 定义的边的属性特征中的 ϕ 、 r 和 h 3 个参数通过式 (17) 计算得到. 姿态变换矩阵可以根据 R-Graph 定义的边的属性特征中的 α 、 β 和 γ 3 个参数计算得到.

$$\begin{cases} x = r \cos \phi \\ y = r \sin \phi \\ z = h \end{cases} \quad (17)$$

因此, 从末端节点到节点 i 的运动传递函数可以通过式 (18) 计算得到

$${}^i \mathbf{m}_n = {}^i \mathbf{T} \mathbf{e}^{\mathbf{h}_{n+1}} \dots \mathbf{e}^{\mathbf{h}_{n-1}} {}^n \mathbf{T} \quad (18)$$

由于每个节点都有独特的运动特性, 从起始节点通过不同路径传递到节点 i 的运动函数是等价的. 假设有 k 条传输路径, 则可以得到运动方程

$${}^i \mathbf{m}_{n,1} = {}^i \mathbf{m}_{n,2} = \dots = {}^i \mathbf{m}_{n,k} \quad (19)$$

通过求解以上方程, 可以得到关节节点的运动变量. 结合式 (13) 构造出机构中各个关节的运动轴线旋量后, 各个支链的运动旋量系 \mathcal{S}_i 由 n 个关节的运动旋量构成

$$\mathcal{S}_i = (\boldsymbol{\xi}_1 \quad \boldsymbol{\xi}_2 \quad \dots \quad \boldsymbol{\xi}_n) \quad (20)$$

支链的约束旋量 \mathcal{S}_C 则通过互易运算得到

$$\mathcal{S}_{i,i}^\top \mathcal{S}_C = \mathbf{0} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (21)$$

机构的约束旋量系由各支链的约束旋量构成, 机构的自由度等于机构约束旋量系的零空间的秩. 根据 R-Graph 表征的机构信息求得机构的自由度可以用于判断 R-Graph 表征结构的合理性以及关节变量计算的正确性.

接着, 下一时刻的关节节点的运动信息可以使用式 (22) 进行更新

$$\mathbf{h}_i^{t+1} = f_U(\mathbf{h}'_i, \mathbf{e}_{ij}) \mathbf{h}'_i \quad (22)$$

关节节点 i 的运动信息更新函数可以定义为

$$f_U(\mathbf{h}'_i, \mathbf{e}_{ij}) = {}^i \mathbf{T} \mathbf{e}^{\theta_{i+1} \mathbf{h}'_{i+1}} \dots \mathbf{e}^{\theta_{n-1} \mathbf{h}'_{n-1}} {}^n \mathbf{T} \quad (23)$$

基于速度的线性叠加原理, 组件节点 i 的运动信息更新函数定义为

$$\mathbf{h}_i^{t+1} = f_U(\mathbf{h}_i^k, \mathbf{e}_{ij}) = \sum_{k=1}^{i-1} \mathbf{h}_i^k \quad (24)$$

利用式 (22) ~ (24), 即可得到更新后的节点运动信息. R-Graph 中节点的运动信息传递与更新过程如图 9 所示.

为了能够将计算的机构中各组件的速度进行可视化表征, 根据 R-Graph 的定义将基于 R-Graph 的速度图拓展为机构的速度图. 机构速度图的定义和性质如下.

当机构在某个瞬时 t 时, 将机构的速度图定义为 $G_V = (V_t, E_t, \mathbf{F}_{v_t}, \mathbf{F}_{e_t})$. $V_t = \{v_1, v_2, \dots, v_N\}$ 表示具有质心速度特征的组件节点, 使用颜色的深浅区分速度的大小. $E_t = \{e_1, e_2, \dots, e_M\}$ 表示连接节点的边的集合, 其与节点的速度有关. 通过计算多个瞬时的机构组件

速度,可以构建机构组件速度变化时序图,如图 10 所示.

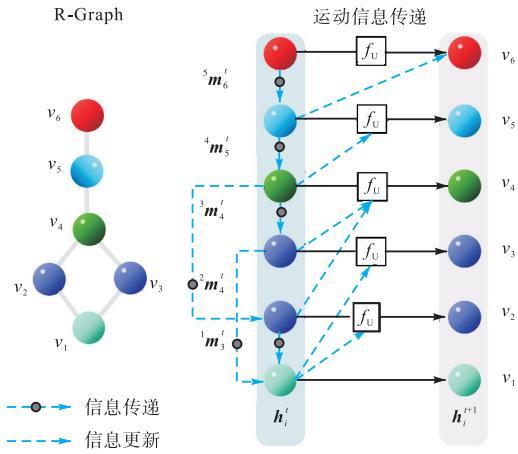


图 9 R-Graph 中的运动信息传递过程
Fig.9 Motion information transfer in R-Graph

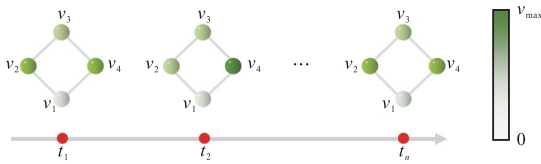


图 10 连杆节点速度
Fig.10 Velocity of linkage G_v

性质:速度图的边空间构成一个线性空间 V_1

$$V_1 = [\xi_1^* \ \xi_2^* \ \dots \ \xi_n^*] \quad (25)$$

对于开环机构,其速度图的边空间为机构的雅可比矩阵.

2.2.2 力特征的计算

节点 i 在时间 t 的力信息函数被定义为

$$h_{i,t} = [\tau \ f]^T \quad (26)$$

式中 f 、 τ 分别表示机构组件受到的力和力矩. 基于力平衡原理,采用向下递归的方法将力信息从末端节点传递到起始节点.

$${}^j m_i = {}^j W_i h_{i,t} \quad (27)$$

式中 ${}^j W_i$ 从节点 i 传递到其相邻节点 j 的力信息权重矩阵,可通过力平衡方程求解. 假设一个节点的度为 k ,则

$$f_U : W_1 + W_2 + \dots + W_k = E \quad (28)$$

更新节点 j 的力信息

$$h_{j,t} = {}^j W_i [\tau_i + r_i \times f_i \ f_i]^T + \dots + {}^j W_k [\tau_k + r_k \times f_k \ f_k]^T \quad (29)$$

对于被动关节节点,其力信息仅包含关约束力,满足

$$h_{i,t} h_{i,t} = 0 \quad (30)$$

对于驱动关节节点,除了关约束力之外,还包

括沿着移动关节移动方向的驱动力或绕旋转关节轴的驱动力矩.

当力传递路径中不包含度大于 2 的节点时,可通过力传递建立关节驱动力与末端载荷间的映射关系,即力雅可比矩阵. 根据各节点的静力平衡方程,可以得到机构的约束映射方程

$$F_h = Gf \quad (31)$$

式中 G 是约束和广义载荷之间的映射矩阵,包括驱动力、约束力. R-Graph 中节点的力信息传递与更新过程如图 11 所示.

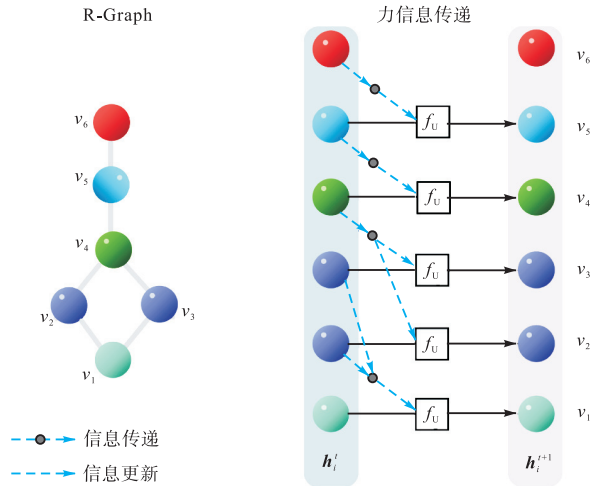


图 11 R-Graph 中的力信息传递与更新过程
Fig.11 Process of force information transfer and update in R-Graph

基于 R-Graph 的受力图:为了能够将计算的机构中各组件的受力情况进行可视化表征,根据 R-Graph 的定义将其拓展为机构受力图.

基于约束力和运动之间的互易关系,在 R-Graph 的基础上添加约束力、约束力偶、驱动力和驱动力偶节点,并将更新后的图定义为力特征图. 根据约束和运动关系,定义共面、垂直和任意 3 种类型的边. 力节点与运动副节点之间的连接关系满足:①约束力与旋转运动共面,且与平移运动垂直;②约束力矩与旋转运动垂直,与平移运动呈任意关系. 以五自由度并联加工机器人(4UPS-PSR)为例,其受力图如图 12 所示.

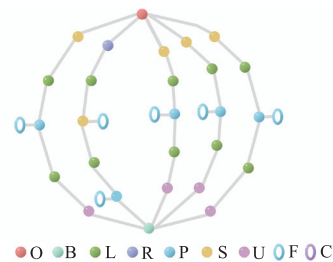


图 12 4UPS-PSR 机构的受力图
Fig.12 Force graph of 4UPS-PSR

2.3 基于 R-Graph 的机构信息表征和计算案例

为验证 R-Graph 表征与计算框架的有效性,并支撑后续智能设计任务,本节以典型四自由度并联加工机器人 2RPS-2UPS 机构为例,阐述 R-Graph 的建模流程与性能计算能力,同时为后续的智能设计框架构建训练数据集。

四自由度并联加工机器人 2RPS-2UPS 整机三维模型如图 13(a)所示。该机构包含 2 条 RPS 支链和 2 条 UPS 支链,属于面对称机构,主要用于高速重载的加工环境。该机构的简图如图 13(b)所示,动、静平台坐标系位于动静平台中心,各支链与动平台铰接位置分布于半径为 r 的圆上,RPS 支链和 UPS 支链与静平台铰接位置分布于半径为 R_1 和 R_2 的圆上。具体

位置由角度参数 θ_1 、 θ_2 、 θ_3 和 θ_4 确定,机构参数具体数值如表3所示。该机构中各支链的 P 副为驱动关节。

根据该机构的几何和拓扑信息,结合 R-Graph 的定义和存储结构对其进行表征,其 R-Graph 如图 13(c)所示。

表 3 2RPS-2UPS 机构参数

Tab.3 Parameters of 2RPS-2UPS

结构参数	数值/mm	结构参数	数值/(°)
r	250	θ_1	30
R_1	250	θ_2	15
R_2	500	θ_3	30
h	225	θ_4	60
H	750		

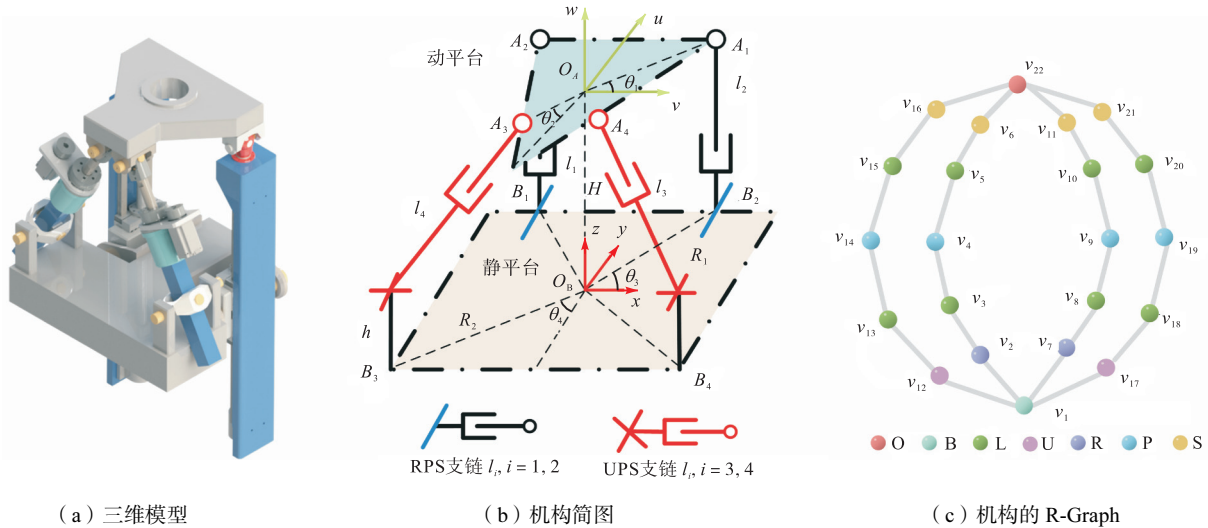


图 13 2RPS-2UPS 机构三维模型、机构简图和 R-Graph

Fig.13 Three-dimensional model, mechanism diagram, and R-Graph of 2RPS-2UPS

基于 R-Graph 表征的机构节点属性特征矩阵为

$$F_v = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & \cdots & v_{19} & v_{20} & v_{21} & v_{22} \\ 0 & 2 & 7 & 3 & \cdots & 3 & 7 & 5 & 1 \\ [R_1 \ R_2] & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & r \\ 0 & c_2 & 0 & c_4 & \cdots & c_{19} & 0 & c_{21} & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}_{4 \times 22} \quad (32)$$

式中各关节节点的运动参数未知,其中存在 4 个独立参数。

边的属性特征矩阵维度为 3,第 1 条 RPS 支链和第 3 条 UPS 支链的边的属性表征如下

$$\begin{cases} e_{1,2} = [30 & -90 & 0 & 0 & R_1 & 0 & 1] \\ e_{2,3} = [0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1] \\ e_{3,4} = [0 & 90 & 0 & 0 & 0 & l_1 & 1] \\ e_{4,5} = [0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1] \\ e_{5,6} = [0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1] \\ e_{6,22} = [30 & 0 & 0 & 0 & r & 0 & 1] \end{cases} \quad (33)$$

$$\begin{cases} e_{1,12} = [210 & -90 & 0 & 0 & R_2 & h & 1] \\ e_{12,13} = [0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1] \\ e_{13,14} = [0 & 90 & 0 & 0 & 0 & l_3 & 1] \\ e_{14,15} = [0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1] \\ e_{15,16} = [0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1] \\ e_{16,22} = [255 & 0 & 0 & 0 & r & 0 & 1] \end{cases} \quad (34)$$

式中 l_1 和 l_3 为两条支链中 P 副的关节变量。

通过上述信息,结合式(12)~(19),求解动平台在初始位姿下这两条支链中各关节的关节变量,如表 4 所示。多自由度关节的关节变量使用多个单自由度关节变量表示。

表 4 2RPS-2UPS 机构参数

Tab.4 Parameters of 2RPS-2UPS

RPS 支链关节	关节变量	UPS 支链关节	关节变量
R	0°	U	[35.1° 0°]
P	750.0 mm	P	641.4 mm
S	[0° 0° 0°]	S	[0° 35.1° 0°]

结合式(13)、(20)~(21)计算得到机构的自由度为 4, 该机构具有 x 、 z 轴方向的移动以及 x 、 y 轴方向的转动自由度。

该机构的 RPS 支链和 UPS 支链的运动信息传递过程如图 14 所示。

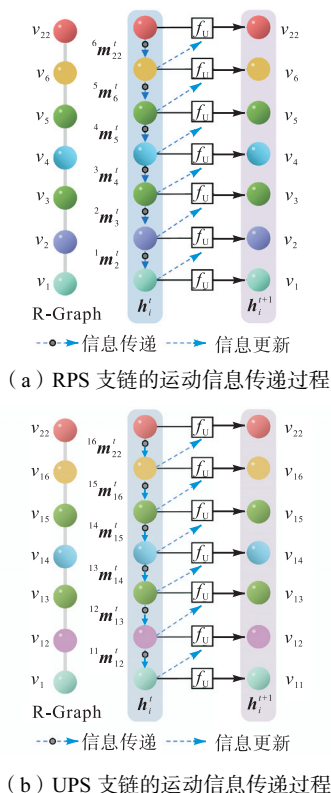


图 14 2RPS-2UPS 机构各支链的运动信息传递过程
Fig.14 Motion information transfer process of each limb of 2RPS-2UPS

给定动平台轨迹方程

$$\begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \sin t \\ H + 50 \sin t \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20^\circ \sin t \\ -20^\circ \sin t \end{bmatrix} \quad (35)$$

则动平台的速度方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \cos t \\ 10 \cos t \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20^\circ \cos t \\ -20^\circ \cos t \end{bmatrix} \quad (36)$$

结合式(21)~(23), 若已知末端的运动则能够基于 R-Graph 中的节点信息传递过程计算各关节的运动和速度, 并根据速度叠加计算得到机构中各连杆的速度并构造组件节点速度图。在 $t_0 = 0 \text{ s}$, $t_1 = 1 \text{ s}$, $t_2 = 2 \text{ s}$ 时刻机构中组件节点的速度图如图 15 所示。

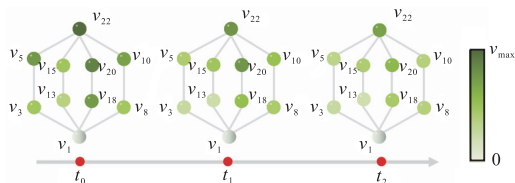


图 15 2RPS-2UPS 机构不同时刻的速度
Fig.15 Velocity of 2RPS-2UPS at different time

基于 R-Graph 的机器人机构智能设计框架通过多维信息融合与动态计算实现了设计知识的系统化表征与推理。同时便于将机器人机构设计案例统一以图结构的方式进行表征和存储, 以构建设计案例数据集, 形成信息表征-计算推理-知识积累的闭环架构, 为机器人机构的智能创新设计奠定了理论、技术和数据基础。

3 R-Graph在机器人智能设计中的潜在应用

R-Graph 可以作为机器人智能设计的语言工具, 用于识别、记录和存储机器人机构信息, 并对机构进行学习 and 创新设计。

(1) R-Graph 提供了统一的方式来具体识别、记录和传递机器人机构的所有信息, 是设计实例与数据之间的桥梁。

(2) 设计知识可以通过图形计算存储为设计数据。机器人的结构和性能特征可以通过图神经网络等图算法从数据中进行学习。

(3) R-Graph 可以通过添加/删除节点和更新边来记录不同时刻下机构拓扑和尺寸信息, 跟踪拓扑演化和尺寸优化设计的过程。因此, 诸如新型机器人生成和交互式设计等下游任务可以通过多模态学习、图生成模型等图智能模型来实现。

本节将围绕 R-Graph 在机器人机构智能创新设计中的核心应用场景展开论述, 包括机构生成式设计和与环境交互设计两方面, 并以此为导向为后续研究提供技术路径。

3.1 机器人生成式设计框架

机器人的设计过程必须满足设计要求, 且一般都蕴含着专业的知识和专家经验。智能设计为机构创新发明提供了一种新思路: 通过人工智能从以前的设计案例中学习设计原理并用于生成新的机器人机构。

如图 16 所示, 首先采用 R-Graph 对 M 个现有机器人机构进行表征并计算, 同时以文本形式描述这些机器人机构所适用的设计需求。随后, 通过编码器将 R-Graph 和文本分别表示为高维、连续的向量。在此基础上, 利用图文对比学习模型构建机器人机构与其应用场景之间的映射关系。因此, 在输入新的设计需求后, 可以通过相似度匹配算法, 获得与设计需求相似的机构作为初始机构。当现有机器人机构数据规模足够大时, 可形成机器人设计大模型。

在此基础上, 使用概率生成模型(例如变分图神经网络)进行新机构的生成。首先, 利用图编码器将学习这些图的分布特征 $f_\theta\{z|\mathbf{G}\}$, 采样器从学习到的

分布中对潜在表示进行采样,以生成具有特定属性的新图 $z \sim p(z)$. 解码器将从学习的分布中采样的潜在表示反向解析为图结构 $f_{\theta}\{G|z\}$,从而生成新的 R-Graph.

在此框架中, R-Graph 将机器人机构包含的多样几何符号转化为计算机可以理解的非结构化数据,方便采用多模态学习模型、图生成式模型等人工智能算法进行学习.

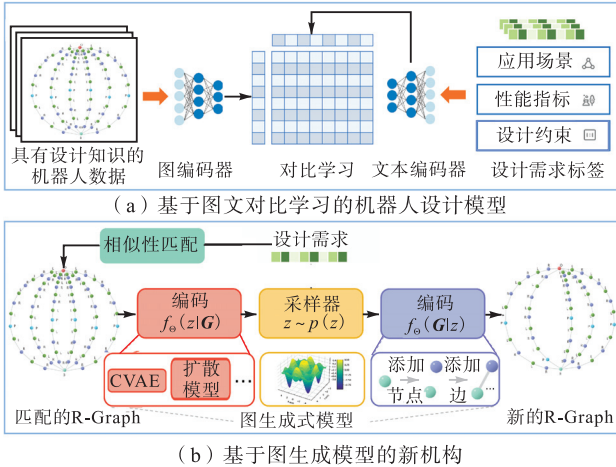


图 16 基于 R-Graph 的机器人机构生成式设计框架

Fig.16 Framework of robotic generative design based on R-Graph

3.2 基于与环境交互的机器人设计框架

随着机器人技术的快速发展,其应用领域正不断向极端环境拓展.在此背景下,如何设计能够适应多样化复杂服役环境并高效执行特定任务的机器人机构,已成为当前亟待解决的关键问题.

具身智能是人工智能与现实环境交互的重要形态,将机器人赋予人一样观察、移动和说话的能力,通过与真实物理世界的交互完成特定任务,实现对物理世界的直接或间接影响^[19-20]. 赋予机器人智能化思考的能力有助于突破现有的知识边界,增强机器人在环境中的自主学习能力.

如图 17 所示,基于具身智能的机器人机构设计通过建立仿真环境与物理世界的内外 2 层模型:内层与环境进行交互,利用强化学习算法评估机器人在环境中的表现并给予奖励;外层则采用优化算法设计机器人机构的拓扑结构与尺寸.在这个过程中,机器人学习自身结构变化与奖励的规则的前提是需要建立数据结构与三维实体模型之间的转换. R-Graph 因集成了机器人机构的拓扑与尺寸的信息并与物理模型具有一一映射关系,所以能够为与环境交互的机器人拓扑与尺寸设计提供基础.

以移动机器人的设计为例,与环境交互设计的具体流程如下.

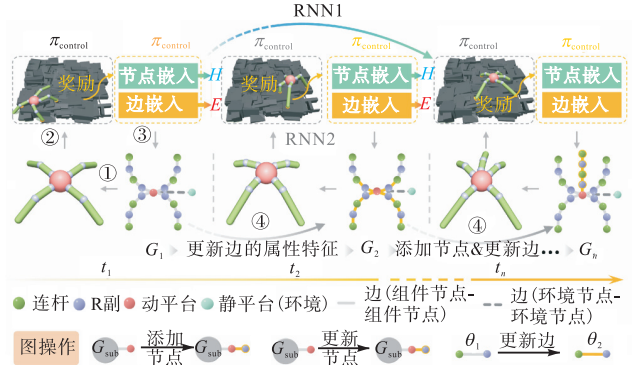


图 17 面向高运动性能的移动机器人设计框架

Fig.17 Framework of mobile robot design toward high kinematic performance

步骤 1 利用 R-Graph 中边上的特征信息计算关节与组件的相对坐标,基于连接关系构建具备拓扑结构与尺寸的机器人物理本体,即三维模型,并根据环境需求、组件质量和关节力等信息进行完善.此时, R-Graph 作为数据结构层与物理本体层之间的双向转换工具.

步骤 2 使用图元素表征环境对象信息并作为超节点连接到机器人的 R-Graph 上,以描述机器人与环境之间的交互关系.基于具身智能方法提供控制策略并评估机器人形态的运动能力,从而为机器人形态演化提供策略.

步骤 3 R-Graph 的演化过程通过图神经网络实现图信息的聚合与存储,并结合循环神经网络 (recurrent neural network, RNN) 对信息进行预测.在时间 t ,对 R-Graph 的节点与边的特征进行嵌入得到特征向量,运动性能记为 Y_t ,下一个时间步的图变化向量表示为 ΔX_t .将向量组合 $[X_t, Y_t, \Delta X_t]$ 作为 RNN 的输入,预测下一时间步的运动性能 Y_{t+1} ,从而获得该时刻机器人的图变化向量.

步骤 4 在时间 t ,根据演化策略对 R-Graph 进行图操作,例如添加节点和边、选择节点等.通过添加节点和边的特征更新 R-Graph 并将其作为 $t+1$ 时刻的机器人机构状态和信息表征图,重复步骤 2 直至获得高运动性能的机器人.

除运动学性能外,设计过程中还可以考虑力的传递特性.例如,机械加工任务对机器人的刚度和动态性能提出更高的要求.在与环境交互的设计过程中可以将力的信息传递作为机器人设计的预测指标.

4 结论

本文介绍了一种新的机器人机构的统一表示框架 R-Graph,为智能创新设计提供表征、存储和计算

工具. R-Graph 的特点总结如下.

(1) 引入了关节轴线、尺度以及关节运动特性等度量信息, 准确、完备地表示了机器人机构的欧氏信息和非欧信息, 便于计算机进行高效的识别和存储, 为智能化设计奠定了基础.

(2) 借助图结构自身的信息传递机制, R-Graph 能够对机构的运动和力等关键性能进行快速计算与分析. 将经验性的设计知识转化为可量化的参数, 从而实现基于数据的设计优化.

R-Graph 构建了一个全面机器人机构信息表示和计算框架, 有望简化和自动化重复性的设计流程. 在此基础上, 未来的研究将基于提出的智能设计框架开展机器人机构智能创新设计及案例研究, 进一步验证基于 R-Graph 的机器人机构智能设计框架的可行性. 同时通过在 R-Graph 的基础上开发复杂数据库和算法, 探索其在智能设计领域更广泛的应用.

参考文献:

- [1] Jing G Q, Qin X Y, Wang H Y, et al. Developments, challenges, and perspectives of railway inspection robots[J]. *Automation in Construction*, 2022, 138: 104242.
- [2] Zhao A, Xu J, Konaković-Luković M, et al. RoboGrammar: Graph grammar for terrain-optimized robot design[J]. *ACM Transactions on Graphics*, 2020, 39(6): 1-16.
- [3] Mruthyunjaya T S. Kinematic structure of mechanisms revisited[J]. *Mechanism and Machine Theory*, 1999, 34(7): 279-320.
- [4] Freudenstein F, Dobrjanskyj L. On a theory for the type synthesis of mechanisms[C]//*Proceedings of 11th International Congress of Applied Mechanics*. Berlin, Germany, 1966: 420-428.
- [5] Freudenstein F. The basic concepts of Polyá's theory of enumeration, with application to the structural classification of mechanisms[J]. *Journal of Mechanisms*, 1967, 2(3): 275-290.
- [6] Talabá D. Mechanical models and the mobility of robots and mechanisms[J]. *Robotica*, 2014, 33(1): 181-193.
- [7] Yang W, Ding H, Zi B, et al. New graph representation for planetary gear trains[J]. *Journal of Mechanical Design*, 2018, 140(1): 012303.
- [8] Ding H, Zhao J, Huang Z. Unified topological representation models of planar kinematic chains[J]. *Journal of Mechanical Design*, 2009, 131(11): 1145031-1145036.
- [9] Ding H, Yang W, Huang P, et al. Automatic structural synthesis of planar multiple joint kinematic chains[J]. *Journal of Mechanical Design*, 2013, 135(9): 091007.
- [10] Xia Z H, Tian C X, Li L Q, et al. The novel synthesis of origami-inspired mechanisms based on graph theory[J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2024, 192: 105547.
- [11] Dai J S, Jones J R. Matrix representation of topological changes in metamorphic mechanisms[J]. *Journal of Mechanical Design*, 2005, 127(4): 837-840.
- [12] Laman G. On graphs and rigidity of plane skeletal structures[J]. *Journal of Engineering Mathematics*, 1970, 4(4): 331-340.
- [13] Müller A, Shai O. Constraint graphs for combinatorial mobility determination[J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2017, 108: 260-275.
- [14] Müller A. Generic mobility of rigid body mechanisms[J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2009, 44(6): 1240-1255.
- [15] Wittenburg J. *Dynamics of Systems of Rigid Bodies*[M]. Wiesbaden: Vieweg & Teubner Verlag, 1977.
- [16] Woo L S. Type synthesis of plane linkages[J]. *Journal of Manufacturing Science and Engineering*, 1967, 89(1): 159-170.
- [17] Lu Y, Ye N J. Type synthesis of parallel mechanisms by utilizing sub-mechanisms and digital topological graphs[J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2017, 109: 39-50.
- [18] Alberto S. Distance measure based on tree-graph-grammars: A way of recognizing hidden and deformed 3D complex objects[C]//*Proceedings in International Conference on Pattern Recognition*. Montreal, Canada, 1984: 739-741.
- [19] 卢策吾, 王鹤. 具身智能[EB/OL]. https://www.ccf.org.cn/Media_list/gzwyh/jsysdwyh/2023-07-22/794317.tml, 2023-07-22.
- [20] 张伟男, 刘挺. 具身智能的研究与应用[J]. *智能系统学报*, 2025, 20(1): 255-262.

(责任编辑: 王晓燕)