

DOI:10.11784/tdxbz202504037

交通荷载作用下低填方路堤加筋体受力及 变形解析方法研究

庄妍^{1,2}, 陆运生², 陈帝琳¹, 李金鑫², 张永攀^{2,3}

(1. 华东交通大学土木建筑学院, 南昌 330013; 2. 东南大学土木工程学院, 南京 211890;
3. 青海省交通规划设计研究院有限公司, 西宁 810001)

摘要: 在软土地区广泛采用的桩承式加筋路堤中, 交通荷载的作用以及下部桩-土的不均匀沉降是导致低填方路堤产生显著变形的主要因素。这类结构中的关键力学现象包括土拱效应和张拉膜效应, 使得加筋材料内部的应变分布呈现出从桩间软土上方逐渐向桩顶增加的趋势, 并且在桩帽边缘处达到最大值。加筋体内部的最大应变不仅受到上部路堤自重及过往车辆等动态负载的影响, 还与桩间距、下层软土的压缩性能密切相关。为深入理解这一复杂问题, 本文引入了 Kirchhoff 薄板理论作为分析框架。基于此假设将加筋体及其垫层视为遵循 Kirchhoff 条件的理想化薄板模型进行处理。具体而言, 在 4 根支撑桩之间的区域里, 设定了 1 种特定形式的挠度函数, 该函数由幂函数与双曲正弦函数组成, 用以描述加筋材料在水平方向上的弯曲行为。通过求解满足 Kirchhoff 薄板平衡微分方程及相应几何约束条件下的未知参数, 推导获得加筋体在桩间软土上方区域内沉降分布与应变分布的解析表达式。研究结果表明: 当加筋体位于两根相邻桩之间时, 其垂直方向上的最大位移通常出现在这两根桩中心连线的中点位置, 而最大拉伸或压缩应变则集中在每个桩顶部边缘附近。同时, 本文还分析了加筋体刚度和桩净距对加筋体桩间最大应变的影响。本文为优化设计此类特殊地质条件下使用的桩承式加筋路堤提供了重要的理论依据和技术支持。

关键词: 低填方路堤; 交通荷载; 土拱效应; 加筋体应变; Kirchhoff 假定

中图分类号: TU447

文献标志码: A

文章编号: 0493-2137(2026)03-0286-13

Research on Analytical Method of Force and Deformation of Reinforcement in Low-Fill Embankment Under Traffic Loading

Zhuang Yan^{1,2}, Lu Yunsheng², Chen Dilin¹, Li Jinxin², Zhang Yongpan^{2,3}

(1. School of Civil Engineering and Architecture, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China;

2. School of Civil Engineering, Southeast University, Nanjing 211890, China;

3. Qinghai Provincial Transportation Planning Design and Research Institute Co., Ltd., Xining 810001, China)

Abstract: In the pile-supported reinforced embankment widely used in soft soil areas, the effect of traffic load and the uneven settlement of the lower pile-soil are the main factors leading to the significant deformation of low-fill embankment. The key mechanical phenomena in this kind of structure include soil arching effect and tensile membrane effect, which makes the strain distribution inside the reinforced material gradually increase from the top of soft soil between piles to the pile top and reach the maximum at the edge of the pile cap. The maximum strain inside the reinforced body is not only affected by the self-weight of the upper embankment and the dynamic load of passing vehicles, but also closely related to the pile spacing and the compression performance of the lower soft soil. In order to deeply understand this complex problem, the Kirchhoff thin plate theory is introduced as an analytical framework in this paper. Based on this assumption, the stiffened body and its cushion are treated as an idealized thin plate model

收稿日期: 2025-04-29; 修回日期: 2025-09-12.

作者简介: 庄妍 (1982—), 女, 博士, 教授.

通信作者: 庄妍, joanna_zhuang@163.com.

基金项目: 国家自然科学基金优秀青年科学基金资助项目 (51922029); 国家自然科学基金资助项目 (52178316).

Supported by the National Natural Science Foundation for Excellent Youth Science Fund Project of China (No. 51922029), the National Natural Science Foundation of China (No. 52178316).

that follows the Kirchhoff condition. Specifically, in the area between four supporting piles, a specific form of deflection function is set up, which is composed of a power function and a hyperbolic sine function to describe the bending behavior of the reinforced material in the horizontal direction. By solving the Kirchhoff thin plate equilibrium differential equation and the unknown parameters under the corresponding geometric constraints, the analytical expressions of settlement distribution and strain distribution of the reinforced body in the area above the soft soil between piles are derived. Results show that when the reinforced body is located between two adjacent piles, the maximum displacement in the vertical direction usually occurs at the midpoint of the center line of the two piles, while the maximum tensile or compressive strain is concentrated near the top edge of each pile. At the same time, the influence of reinforcement stiffness and pile spacing on the maximum strain between reinforced piles is also analyzed. This study provides an important theoretical basis and technical support for optimizing the design of pile-supported reinforced embankments used under such special geological conditions.

Keywords: low-fill embankment; traffic load; soil arching effect; reinforcement strain; Kirchhoff's assumption

在桩承式加筋路堤中,加筋体(包含土工格栅、土工格室等)支承在软土地基上方,用于承担上部路堤填土传递的荷载,并将荷载通过拉膜效应传递至桩顶,以达到减少桩土不均匀沉降、提高桩承式路堤整体承载性能的目的.分析桩承式加筋路堤中软土沉降及加筋体应力应变分布的理论方法主要有两种思路:一种方法是将加筋体视为土工格栅和加筋垫层这两种材料组成的整体,二者依靠筋-土界面相互作用^[1-4];另一种是把由土工格栅和加筋垫层视为一个宏观的复合整体,其材料性质在加筋体内部均匀分布,垫层填料与土之间的相互作用只对该种复合材料的性质产生影响,而且不出现在应力应变的计算中.对于加筋体应力应变及桩土荷载分担比的研究,主要有两部分:一是加筋体的模型简化和力学假设以及其挠度函数的推导,二是下部软土地基的力学模型假设^[5-8]. 闫澍旺等^[9]通过大挠度薄板理论模拟加筋垫层的受力和变形,并结合功能原理推导了桩土应力比等参数. 王一楠等^[10]通过悬链线方法假定土工格栅的变形状态,并由此推导出土拱形态、高度以及桩顶应力. 王建军等^[11]通过将路面结构简化成 Euler-Bernoulli 梁,将路堤填土和加筋体简化为无剪切变形的 Timoshenko 梁,下部地基简化为考虑应力扩散的三参数 Kerr 弹性地基模型,运用能量法与势能驻值原理,推导并求解了沉降微分控制方程. 李晓龙等^[12]将加筋体视为受到上部荷载和下部地基反力共同作用下的空间薄膜,基于最小势能原理推导了高度非线性的方程组,应用薄膜分析中比拟方程法求解计算了加筋体的拉力和变形. Fang 等^[13]建立了模拟路面结构和加筋体的双 Euler-Bernoulli 梁模型,将路堤填土和地基软土简化为一系列的弹簧-阻尼系统,利用傅里叶级数进行求解,对荷载速度、桩刚度和配筋模量的影响进行了详细的参数化分析.

通过上述已有文献总结可以发现,对于理论分析中的加筋体结构简化,主要有以下几种: Euler-Bernoulli 梁,大挠度空间薄板或 Kirchhoff 小挠度空间薄板,空间薄膜.对于路堤填土及下部地基软土的模型处理,主要包括 Winkler 地基模型、Kelvin 地基模型和 Pastenak 地基模型.通过简化的地基模型,可以对加筋体的拉力和变形、桩土应力分配、地基最大沉降、土拱形态等进行理论解释和推导,但以往的研究结果大多具有一定的局限性,不能全面真实地反映桩承式路堤内部的承载机理和变形特征. 王一楠等^[10]和李晓龙等^[12]的理论推导均假设加筋体与下部软土脱离,忽略了软土对加筋体的支承作用. 王建军等^[11]和 Fang 等^[13]均采用弹性地基梁模型来模拟加筋体,但其仅是二维平面尺度的分析,无法真实模拟加筋体在外部荷载作用下的三维立体变形特点和受力特征.

因此,已有的关于桩承式路堤中加筋体承载机理和变形特征的研究存在着诸多不足和缺陷.在实际工程中,加筋体具有小扰度及三维立体空间变形特点和受力特征,同时在交通荷载和软土地基综合作用下桩间加筋体的应力应变存在变化而非均匀分布.基于此,本文引入一种符合 Kirchhoff 假定的小挠度薄板理论,从而在三维空间内分析加筋体的受力和变形,同时考虑了下部地基的反力和地基软土的压缩固结,全面真实地分析了不同因素对桩承式路堤中加筋体的承载机理和变形特征的影响.

孙璐等^[14]求解了 Kelvin 地基上无限大 Kirchhoff 薄板的振动方程. 姚海林等^[15]引入了 Kirchhoff 薄板假设,从路面几何不平整出发,得到了不平整路面上的动荷载表达式,分析了荷载速度.路面不平整波长、不平整幅值以及地基阻尼和地基刚度对板的动力响应的影响.从已有的研究也可以发现,符合

Kirchhoff 假定的空间薄板也被应用于路面结构的分析中,加筋垫层和路面在材料和结构上具有一定的相似性,因此将符合 Kirchhoff 假定的薄板应用于加筋体受力和变形的分析中也具有一定的合理性。

在低填方路堤中为避免路堤变形沉降,通常对加筋体材料性质做进一步要求,如在英国《加筋土及加筋填土规范》BS8006-1^[16]中规定:低路堤采用土工格栅加固时,宜采用不可延伸材料或预应力土工格栅,以限制跨中挠度并确保其不超过设计允许值。考虑到钢塑格栅等不可延伸土工格栅在纵横向极限状态下的伸长率(应变)通常不超过 3%,其应力应变基本呈线弹性应变特征,因此满足将加筋体和加筋垫层简化为 Kirchhoff 薄板模型的基本条件要求。

对于支承在桩顶上方的加筋垫层,由于其厚度相对于其平面尺寸较小,按照一般力学中关于板的定义,即当 $1/80 \sim 1/100 < s/b < 1/5 \sim 1/8$ 时,可以将其看作薄板,其中 s 为板的厚度, b 为较短边的平面尺寸。在此区间内,计算结果较为准确,可以将该薄板视作符合 Kirchhoff 假定的小挠度薄板。关于 Kirchhoff 薄板的假定条件,具体可见下文。通过该假定条件并结合弹性力学中的基本公式,可以将薄板内部的应力、应变简化为薄板在 z 方向上挠度函数 $w(x, y)$ 的函数。根据相关土拱理论和计算公式,可以计算该薄板受到由土拱传递到加筋垫层上方的分布荷载 $p(x, y)$ 以及下部软土受到压缩所提供的支承力 $k_s w/U$, 其中 k_s 为基床反力系数(MPa/m),一般由室内试验或原位试验获得; U 为地基土的固结度。假定 $w(x, y)$ 由与 x 和 y 相关的幂函数以及双曲正弦函数两部分组成,结合 Kirchhoff 薄板在几个桩顶位置处的边界条件与 Kirchhoff 薄板的控制微分方程,可以获得挠度函数 $w(x, y)$ 的具体分布形式。再结合弹性力学中的几何方程和物理方程,获得加筋垫层内部的应力、应变分布函数,由此推导加筋体的应力、应变分布,以及桩间地基软土的最大沉降、桩土应力比等力学参数特征。

1 基于 Kirchhoff 薄板假设的加筋体承载机理的解析方法

1.1 Kirchhoff 薄板假设基本理论

Kirchhoff 薄板假设最早是由德国物理学家 Kirchhoff 提出,用于求解板厚 s 远小于其平面尺寸的小挠度薄板问题^[17],如图 1 所示。该文从三维弹性力学的变分开始,引进了关于薄板的变形假设,后来被不断改进,形成了较为完善的 Kirchhoff 薄板假

设,其主要包括以下内容。

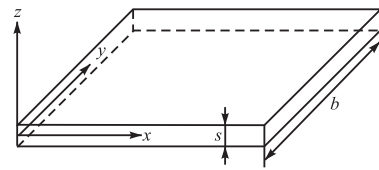


图 1 Kirchhoff 薄板
Fig.1 Kirchhoff thin plate

当板厚相对于板的平面尺寸很小时,可以将板看做薄板。当板受到平行于板面荷载作用时,可以将其简化为平面应力问题来处理,即只考虑 σ_x 、 σ_y 和 τ_{xy} 的分布。相应地, σ_z 、 τ_{zx} 和 τ_{zy} 均可忽略不计。此处 σ_x 、 σ_y 和 σ_z 分别为沿 3 个坐标轴方向的正应力, τ_{xy} 、 τ_{zx} 、 τ_{zy} 分别为沿 3 个坐标轴方向的切应力。当外力作用方向与板面垂直时,可归结为薄板的弯曲问题。为了便于计算,本文中矢量相关的符号仅代表其数值大小,不包含其方向。

在杆件的拉伸、压缩或弯曲问题中,原先与杆件轴线垂直的平面受力后仍为平面,且仍与变形之后的杆件轴线垂直,此为材料力学中的平截面假定。张福范^[18]通过具体算例(如悬臂矩形板的弯曲)验证了 Kirchhoff 理论的有效性,指出在满足几何前提的情况下剪切应变对应的位移量级远小于中面挠度,且法线偏折角度可忽略。Bonaldi 等^[19]通过数值方法验证了 Kirchhoff 理论的变形量级关系,指出当 h 小于等于平面尺寸的 $1/10$ 时,剪切应变引起的法线偏折角度比弯曲转角小一个数量级以上。Ciarlet 等^[20]从数学角度重构了 Kirchhoff 理论的边界条件,证明当板厚满足几何约束时,横向剪切变形对整体刚度矩阵的贡献可忽略不计。而在薄板的弯曲问题中,假设变形前垂直于板中面的直线在弯曲变形后仍为直线,且垂直于弯曲之后的板中面,即在平行于板中面的面上没有剪应变,即

$$\gamma_{zx} = 0, \gamma_{zy} = 0 \tag{1}$$

式中 γ_{zx} 和 γ_{zy} 为各坐标面上的剪切应变。

厚度恒定假设如下。在薄板受力发生弯曲变形的过程中,板厚始终不发生变化,即 $\epsilon_z = 0$, 其中 ϵ_z 为 z 轴方向的正应变。由此推知,板内任意一点的挠度在 x 、 y 不发生改变的情况下,不随 z 值的变化而发生改变,即挠度 w 只是 x 、 y 的函数,其可表示为

$$w = w(x, y) \tag{2}$$

中面无伸缩假设如下。在薄板发生弯曲的过程中,板的中面不发生伸缩,即

$$u_{(z=0)} = 0, v_{(z=0)} = 0 \tag{3}$$

式中 u 和 v 分别为薄板在 x 方向和 y 方向上的位移分量。

忽略厚度方向正应力假设如下. σ_x 、 σ_y 和 τ_{xy} 为主要应力, τ_{zx} 和 τ_{zy} 为次要应力, σ_z (挤压应力) 为更次要应力, 在计算中板厚度方向上的正应力可以忽略, 即 $\sigma_z = 0$.

中面法线绕坐标轴的转动如下. 在薄板的弯曲过程中, 薄板中面法线会绕坐标轴 x 轴和 y 轴转动, 产生转角 θ_x 和转角 θ_y , 即

$$\theta_x = \frac{\partial w}{\partial y} \quad (4)$$

$$\theta_y = -\frac{\partial w}{\partial x} \quad (5)$$

1.2 薄板的基本方程

1.2.1 几何方程

一般三维弹性体的剪切应变和剪切位移之间的几何方程基本公式为

$$\begin{cases} \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \\ \gamma_{zy} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \end{cases} \quad (6)$$

式中 γ_{xy} 为相应坐标面上的剪切应变.

结合式(1), 可以推导出

$$\begin{cases} u = -z \frac{\partial w}{\partial x} + f_1(x, y) \\ v = -z \frac{\partial w}{\partial y} + f_2(x, y) \end{cases} \quad (7)$$

结合式(3), 可以得

$$\begin{cases} f_1(x, y) = 0 \\ f_2(x, y) = 0 \end{cases} \quad (8)$$

将式(8)代入式(7), 可得

$$\begin{cases} u = -z \frac{\partial w}{\partial x} \\ v = -z \frac{\partial w}{\partial y} \end{cases} \quad (9)$$

由式(9)可知, 对于符合 Kirchhoff 假设的薄板, 其内部任意一点沿 x 、 y 方向的位移仅是其板挠度的函数, 且和其在 z 方向上的坐标有关.

一般三维弹性体的几何方程为

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \end{cases} \quad (10)$$

式中 ε_x 和 ε_y 分别为 x 、 y 方向的正应变.

将式(9)代入到式(10), 可以得到薄板内部沿 x 向和 y 向应变与板挠度之间的关系, 即

$$\begin{cases} \varepsilon_x = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \varepsilon_y = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \gamma_{xy} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{cases} \quad (11)$$

结合式(4)、(5)和(11), 可以看出在 x 轴、 y 轴方向上的应变 ε_x 、 ε_y 分别是薄板弯曲曲面在 x 轴、 y 轴方向上的曲率的函数, 剪切应变 γ_{xy} 是弯曲曲面在 x 轴、 y 轴方向上的扭率的函数.

1.2.2 物理方程(应力、应变关系)

根据式(5), 即薄板在平面法向上的应力 $\sigma_z = 0$, 可以将一般三维弹性问题中的物理方程简化为薄板弯曲问题中的物理方程, 即

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu\sigma_y) \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \mu\sigma_x) \\ \gamma_{xy} = \frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{xy} \end{cases} \quad (12)$$

式中: E 为弹性模量; μ 为泊松比.

式(12)可等价于

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y) \\ \sigma_y = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_y + \mu\varepsilon_x) \\ \tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\mu)}\gamma_{xy} \end{cases} \quad (13)$$

将式(11)代入式(13), 可以获得弯曲薄板内部应力与其挠度之间的关系, 即

$$\begin{cases} \sigma_x = -\frac{Ez}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ \sigma_y = -\frac{Ez}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ \tau_{xy} = -\frac{Ez}{1+\mu} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{cases} \quad (14)$$

通过上述的基本假定和弹性力学中的基本推导, 可以获知符合 Kirchhoff 假定的薄板内部任意一点的应力、应变以及位移均与该薄板挠度函数 $w = w(x, y)$ 与板厚度方向坐标 z 有关, 且与板的材料性质有关, 因此只要求出挠度函数 $w = w(x, y)$ 在整块薄板上的分布函数, 便可以获知该薄板内部及表面的应力、应变及位移分布.

1.3 薄板微分控制方程

对于符合 Kirchhoff 假设的薄板,其控制偏微分方程为

$$D\nabla^2\nabla^2w = q = p(x, y) - \frac{k_s}{U}w \quad (15)$$

式中: ∇^2 为拉普拉斯算子,其具体表现形式为 $\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$; D 为薄板的抗弯刚度,其值为 $Et^3/[12(1-\mu^2)]$; q 为外荷载.

形如式(15)右侧的 $k_s w/U$ 项即为地基对加筋体的支承反力^[21]. 应当注意的是,偏微分方程式(15)仅在软土上方成立;对于桩顶位置的加筋体,其受到的下部支撑反力不是式(15)右侧的第 2 项,所以,对于式(15),仅在四桩角点构成的区域 $A_0B_0C_0D_0$ 内部求解其挠度分布函数,计算示意如图 2 所示.

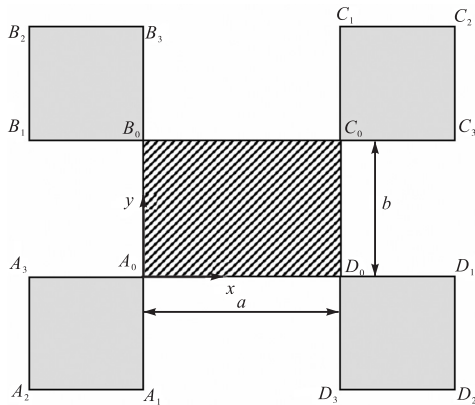


图 2 $w(x, y)$ 的分布区域(图中阴影部分)

Fig.2 Distribution area of $w(x, y)$, which is the shadow part in the figure

由于式(15)求解其一般意义上的通解形式较为复杂,为了简化计算,在此处可以引入在结构力学中的挠度叠加方法,即对于一般梁挠度的求解,可以分别计算两个外荷载作用下对一点产生的挠度 w_1 和 w_2 ,当两个外荷载同时作用时,结构产生的挠度 w 是两个挠度 w_1 与 w_2 的叠加,即 $w = w_1 + w_2$. 此处也可以分别计算上部外荷载、地基反力各自作用下的挠度分布函数,然后予以叠加,得到薄板的挠度分布函数.

因此,对于上述微分方程特解的求解,可以将其分解为下述两个微分方程的求解,它们分别是仅受上部传递荷载作用和仅受下部地基反力作用的控制偏微分方程,即

$$D\nabla^4w = p(x, y) \quad (16)$$

$$D\nabla^4w = -\frac{k_s}{U}w \quad (17)$$

对于式(17),假设其特解形式为

$$w_1 = A[e^{\alpha_1 x + \varphi_1} + e^{-(\alpha_1 x + \varphi_1)}] + B[e^{\alpha_2 y + \varphi_2} + e^{-(\alpha_2 y + \varphi_2)}] \quad (18)$$

将式(18)代入到式(17),可以得到

$$A\alpha_1^4 [e^{\alpha_1 x + \varphi_1} + e^{-(\alpha_1 x + \varphi_1)}] + B\alpha_2^4 [e^{\alpha_2 y + \varphi_2} + e^{-(\alpha_2 y + \varphi_2)}] = -\frac{k_s}{DU} \{ A[e^{\alpha_1 x + \varphi_1} + e^{-(\alpha_1 x + \varphi_1)}] + B[e^{\alpha_2 y + \varphi_2} + e^{-(\alpha_2 y + \varphi_2)}] \} \quad (19)$$

比较式(19)的左、右两部分,可以得到(注意此处 k_s 为负值)

$$\alpha_1^4 = \alpha_2^4 = -\frac{k_s}{DU} \quad (20)$$

此时,令 $\gamma = \alpha_1 = \alpha_2 = [-k_s/(DU)]^{1/4}$.

对于式(16),由于其右侧为一常数,左侧的拉普拉斯算子中包含 w 对 x 的 4 阶偏导、对 y 的 4 阶偏导和对 xy 的混合 4 阶偏导,故该微分方程的特解包含幂级数中的 x^4 项、 y^4 项和 x^2y^2 项.

可以假设其特解形式为

$$w_2 = \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 y + \beta_4 x^2 + \beta_5 xy + \beta_6 y^2 + \beta_7 x^3 + \beta_8 y^3 + \beta_9 x^4 + \beta_{10} x^2 y^2 + \beta_{11} y^4 \quad (21)$$

对比式(16)和式(21),可以得到

$$24(\beta_9 + \beta_{11}) + 4\beta_{10} = \frac{p(x, y)}{D} \quad (22)$$

故式(15)的偏微分控制方程的一个特解形式为

$$w(x, y) = \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 y + \beta_4 x^2 + \beta_5 xy + \beta_6 y^2 + \beta_7 x^3 + \beta_8 y^3 + \beta_9 x^4 + \beta_{10} x^2 y^2 + \beta_{11} y^4 + A[e^{\alpha_1 x + \varphi_1} + e^{-(\alpha_1 x + \varphi_1)}] + B[e^{\alpha_2 y + \varphi_2} + e^{-(\alpha_2 y + \varphi_2)}] \quad (23)$$

1.4 几何边界条件及参数求解

θ_{xB_0} 对于位于桩顶上方的加筋垫层,假定其为符合 Kirchhoff 假设的薄板,其在桩顶位置上方处的 4 个角点分别假设为 A_0 、 B_0 、 C_0 和 D_0 点,桩间土上方位置处的荷载沿 x 轴和 y 轴呈对称分布,且以原点为中心呈中心对称分布,如图 3 所示. 假设挠度函数为仅与 x, y 坐标相关的幂函数形式,由于下部的桩为完全刚性桩,不发生竖向变形,且桩底部为刚性持力层,故在 A_0 、 B_0 、 C_0 和 D_0 点处的板平面法向方向的挠度

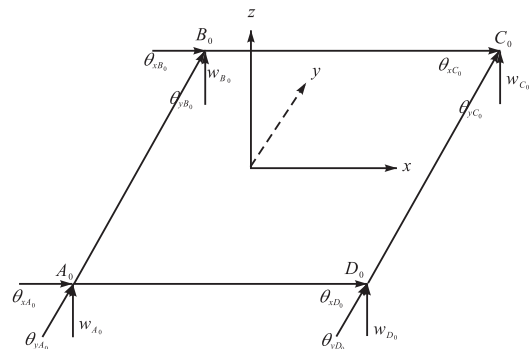


图 3 转角和位移示意

Fig.3 Schematic of angle and displacement

w_A 、 w_B 、 w_C 和 w_D 均为 0。由于上部荷载的对称分布, 在 A_0 、 B_0 、 C_0 和 D_0 处的转角 $\theta_{x_{A_0}}$ 、 $\theta_{y_{A_0}}$ 、 $\theta_{x_{B_0}}$ 、 $\theta_{y_{B_0}}$ 、 $\theta_{x_{C_0}}$ 、 $\theta_{y_{C_0}}$ 、 $\theta_{x_{D_0}}$ 和 $\theta_{y_{D_0}}$ 大小均相等, 由这 12 个边界条件可以求解式(23)中的未知参数。

将 $w(0, 0) = 0$ 代入式(23)可以得

$$\beta_1 + A(e^{\varphi_1} + e^{-\varphi_1}) + B(e^{\varphi_2} + e^{-\varphi_2}) = 0 \quad (24)$$

同理, 由 B_0 、 C_0 和 D_0 点位置处挠度为 0, 可以确定下述方程组, 即

$$\begin{cases} \beta_1 + \beta_2 a + \beta_4 a^2 + \beta_7 a^3 + \beta_9 a^4 + \\ A[e^{\alpha_1 a + \varphi_1} + e^{-(\alpha_1 a + \varphi_1)}] + B(e^{\varphi_2} + e^{-\varphi_2}) = 0 \\ \beta_1 + \beta_3 b + \beta_6 b^2 + \beta_8 b^3 + \beta_{11} b^4 + \\ A(e^{\varphi_1} + e^{-\varphi_1}) + B[e^{\alpha_2 b + \varphi_2} + e^{-(\alpha_2 b + \varphi_2)}] = 0 \\ \beta_3 ab + \beta_{10} a^2 b^2 = 0 \end{cases} \quad (25)$$

将式(23)代入到式(4)和式(5), 可以求得 θ_x 和 θ_y 的函数表达式为

$$\begin{cases} \theta_x = \beta_3 + \beta_5 x + 2\beta_6 y + 3\beta_8 y^2 + 2\beta_{10} x^2 y + \\ 4\beta_{11} y^3 + B\alpha_2 [e^{\alpha_2 y + \varphi_2} - e^{-(\alpha_2 y + \varphi_2)}] \\ \theta_y = -\{\beta_2 + 2\beta_4 x + \beta_5 y + 3\beta_7 x^2 + 2\beta_{10} x y^2 + \\ 4\beta_9 x^3 + A\alpha_1 [e^{\alpha_1 x + \varphi_1} - e^{-(\alpha_1 x + \varphi_1)}]\} \end{cases} \quad (26)$$

在 $x=0$ 、 $y=0$ 处, θ_x 与 θ_y 方向相反, 即 $\theta_{x_{A_0}} = -\theta_{y_{A_0}}$, 由此可得

$$\beta_3 + B\alpha_2 (e^{\varphi_2} - e^{-\varphi_2}) = \beta_2 + A\alpha_1 (e^{\varphi_1} - e^{-\varphi_1}) \quad (27)$$

在 $x=0$ 、 $y=b$ 处, θ_x 与 θ_y 方向相同, 即 $\theta_{x_{B_0}} = \theta_{y_{B_0}}$, 由此可得

$$\begin{aligned} \beta_3 + 2\beta_6 b + 3\beta_8 b^2 + 4\beta_{11} b^3 + \\ B\alpha_2 [e^{\alpha_2 b + \varphi_2} - e^{-(\alpha_2 b + \varphi_2)}] + \beta_2 + \\ \beta_5 b + A\alpha_1 (e^{\varphi_1} - e^{-\varphi_1}) = 0 \end{aligned} \quad (28)$$

在 $x=a$ 、 $y=0$ 处, θ_x 与 θ_y 方向相同, 即 $\theta_{x_{D_0}} = \theta_{y_{D_0}}$, 由此可得

$$\begin{aligned} \beta_3 + \beta_5 a + B\alpha_2 (e^{\varphi_2} - e^{-\varphi_2}) + \beta_2 + 2\beta_4 a + 3\beta_7 a^2 + \\ 4\beta_9 a^3 + A\alpha_1 [e^{\alpha_1 a + \varphi_1} - e^{-(\alpha_1 a + \varphi_1)}] = 0 \end{aligned} \quad (29)$$

再由条件 $\theta_x|_{x=0, y=0} = \theta_x|_{x=a, y=0}$, 可以得到

$$\beta_5 a = 0 \quad (30)$$

同理, 由条件 $\theta_y|_{x=0, y=0} = \theta_y|_{x=0, y=b}$, 也可以得到

$$\beta_5 b = 0 \quad (31)$$

即

$$\beta_5 = 0 \quad (32)$$

由 $\theta_x|_{x=0, y=b} = \theta_x|_{x=a, y=b}$ 及 $\theta_y|_{x=a, y=0} = \theta_y|_{x=a, y=b}$ 可以得到

$$\beta_{10} = 0 \quad (33)$$

将式(32)和(33)代入式(25)中的第3式, 可以验证

证关系 $\beta_5 = \beta_{10} = 0$ 。

将式(27)代入式(28)和式(29), 结合式(32), 可以得

$$\begin{aligned} 2\beta_3 + 2\beta_6 b + 3\beta_8 b^2 + 4\beta_{11} b^3 + B\alpha_2 [e^{\alpha_2 b + \varphi_2} + e^{-(\alpha_2 b + \varphi_2)}] + \\ B\alpha_2 [e^{\varphi_2} - e^{-\varphi_2}] = 0 \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} 2\beta_2 + 2\beta_4 a + 3\beta_7 a^2 + 4\beta_9 a^3 + A\alpha_1 [e^{\alpha_1 a + \varphi_1} + e^{-(\alpha_1 a + \varphi_1)}] + \\ A\alpha_1 [e^{\varphi_1} + e^{-\varphi_1}] = 0 \end{aligned} \quad (35)$$

对于式(23), 其由三角级数的部分(式(18))和幂级数的部分(式(21))两部分组成, 挠度函数 $w(x, y)$ 分别以过板平面中心的两个轴即 X 轴和 Y 轴为对称轴呈对称分布, 故其组成部分 $w_1(x, y)$ 和 $w_2(x, y)$ 也应以这两个轴呈轴对称分布。由 $w_1(x, y)$ 的对称性关系, $(a/2, 0)$ 和 $(0, b/2)$ 均为挠度函数的极值点, 即

$$\frac{\alpha_1 a}{2} + \varphi_1 = 0 \quad (36)$$

$$\frac{\alpha_2 b}{2} + \varphi_2 = 0 \quad (37)$$

由 $w_2(x, y)$ 关于 y 轴的对称性可以得到, 令 $f(x) = w_2(x, 0)$, 则 $f(x)$ 对 x 的 1 阶导数 df/dx 、2 阶导数 $d^2 f/dx^2$ 和 3 阶导数 $d^3 f/dx^3$ 均在点 $(a/2, 0)$ 处等于 0, $f(x)$ 的各阶导数分别为

$$f(x) = \beta_2 x + \beta_4 x^2 + \beta_7 x^3 + \beta_9 x^4 \quad (38)$$

$$\frac{df}{dx} = \beta_2 + 2\beta_4 x + 3\beta_7 x^2 + 4\beta_9 x^3 \quad (39)$$

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = 2\beta_4 + 6\beta_7 x + 12\beta_9 x^2 \quad (40)$$

$$\frac{d^3 f}{dx^3} = 6\beta_7 + 24\beta_9 x \quad (41)$$

将 $f(x)$ 的 3 阶导数在 $(a/2, 0)$ 处的导数均为 0 这一条件代入到式(39)~(41)中, 令 $\beta_9 = \beta$, 得到各个参数的表达式为

$$\begin{cases} \beta_9 = \beta \\ \beta_7 = -2a\beta \\ \beta_4 = 3a^2\beta/2 \\ \beta_2 = -a^3\beta/2 \end{cases} \quad (42)$$

同理, 令 $g(y) = w_2(0, y)$, 由挠度函数 $w_2(x, y)$ 关于 x 轴的对称性可以得到 $g(y)$ 对 y 的 1 阶导数 dg/dy 、2 阶导数 $d^2 g/dy^2$ 和 3 阶导数 $d^3 g/dy^3$ 均在点 $(0, b/2)$ 处等于 0, 令 $\beta_{11} = \alpha$, 可以得到各参数的表达式为

$$\begin{cases} \beta_{11} = \alpha \\ \beta_8 = -2b\alpha \\ \beta_6 = 3b^2\alpha/2 \\ \beta_3 = -b^3\alpha/2 \end{cases} \quad (43)$$

由式(36)和(37)可以得

$$\begin{cases} e^{\alpha_1} = e^{\frac{\alpha_1 a}{2}} \\ e^{\alpha_2} = e^{\frac{\alpha_2 b}{2}} \end{cases} \quad (44)$$

将式(44)代入式(24), 可以得

$$\beta_1 + A\left(e^{-\frac{\alpha_1 a}{2}} + e^{\frac{\alpha_1 a}{2}}\right) + B\left(e^{-\frac{\alpha_2 b}{2}} + e^{\frac{\alpha_2 b}{2}}\right) = 0 \quad (45)$$

为了简化表达, 将 $\exp(\gamma a/2)$ 简记为 m , 将 $\exp(\gamma b/2)$ 简记为 n , 则式(45)可以写为 $\beta_1 + A(m + 1/m) + B(n + 1/n) = 0$, 为了保证由双曲正弦函数在 $A_0B_0C_0D_0$ 各边引起的跨中挠度相等, 令 $A = B$.

由式(22)和(33)可得

$$\beta_9 + \beta_{11} = \frac{p(x, y)}{24D} \quad (46)$$

结合式(42)、(43)和(46), 可以得

$$\alpha + \beta = \frac{p(x, y)}{24D} \quad (47)$$

将式(47)代入式(43)中, 可以得

$$\begin{cases} \beta_{11} = \frac{p}{24D} - \beta \\ \beta_8 = -2b\left(\frac{p}{24D} - \beta\right) \\ \beta_6 = \frac{3}{2}b^2\left(\frac{p}{24D} - \beta\right) \\ \beta_3 = -\frac{1}{2}b^3\left(\frac{p}{24D} - \beta\right) \end{cases} \quad (48)$$

将式(42)、(45)和(48)代入式(27)可以得

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}b^3\left(\frac{p}{24D} - \beta\right) + B\gamma\left(\frac{1}{n} - n\right) = \\ -\frac{1}{2}a^3\beta + A\gamma\left(\frac{1}{m} - m\right) \end{aligned} \quad (49)$$

从式(49)中可以看出, 未知待求解参数还有 A 和 β , 此时还剩下一个方程, 所以还需补充一个边界条件, 保证方程的求解.

将式(23)代入式(9), 结合式(32)和(33)可以得到

$$\begin{cases} u = -z\left[\beta_2 + 2\beta_4x + 3\beta_7x^2 + 4\beta_9x^3 + \right. \\ \left. A\alpha_1\left(e^{\alpha_1x+\varphi_1} - e^{-(\alpha_1x+\varphi_1)}\right)\right] \\ v = -z\left[\beta_3 + 2\beta_6y + 3\beta_8y^2 + 4\beta_{11}y^3 + \right. \\ \left. B\alpha_2\left(e^{\alpha_2x+\varphi_2} - e^{-(\alpha_2x+\varphi_2)}\right)\right] \end{cases} \quad (50)$$

由于加筋垫层不与桩顶发生相对滑动, 所以薄板在与桩顶 4 个角点的接触点处不发生沿 x 方向和 y 方向的位移, 即 $u(0, 0, -t/2) = u(0, b, -t/2) = u(a, b, -t/2) = u(a, 0, -t/2) = v(0, 0, -t/2) = v(0, b, -t/2) = v(a, b, -t/2) = v(a, 0, -t/2) = 0$.

将上述边界条件代入式(50), 由挠度函数的对称

性可知, 只要确保 $u(0, 0, -t/2) = 0$, 其余边界条件即自动实现, 由此可得

$$\beta_2 + A\alpha_1(e^{\alpha_1} - e^{-\alpha_1}) = 0 \quad (51)$$

将式(42)和(44)代入到式(51)中, 可以得

$$-\frac{1}{2}a^3\beta + A\gamma\left(\frac{1}{m} - m\right) = 0 \quad (52)$$

联立式(45)、(49)和(52), 对 A 和 β 以及 β_1 进行求解, 可以得

$$\begin{cases} A = \frac{a^3 p}{48D\gamma\left(\frac{1-m^2}{m} + \left(\frac{a}{b}\right)^3 \frac{1-n^2}{n}\right)} \\ \beta_1 = -\frac{a^3 p(mn+1)(m+n)}{48D\gamma\left(n(1-m^2) + m\left(\frac{a}{b}\right)^3 (1-n^2)\right)} \\ \beta = \frac{p}{24D\left(1 + \left(\frac{a}{b}\right)^3 \frac{m}{n} \frac{1-n^2}{1-m^2}\right)} \end{cases} \quad (53)$$

将所有求解获得的已知量代入式(23), 可以得到符合薄板微分控制方程的挠度函数的一个特解形式, 具体表达形式为

$$\begin{aligned} w(x, y) = & \frac{p}{24D\left(1 + \left(\frac{a}{b}\right)^3 \frac{m}{n} \frac{1-n^2}{1-m^2}\right)} \cdot \\ & \left(-\frac{1}{2}a^3x + \frac{3}{2}a^2x^2 - 2ax^3 + x^4\right) + \\ & \frac{p}{24D}\left(1 - \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{a}{b}\right)^3 \frac{m}{n} \frac{1-n^2}{1-m^2}\right)}\right) \cdot \\ & \left(-\frac{1}{2}b^3y + \frac{3}{2}b^2y^2 - 2by^3 + y^4\right) + \\ & \frac{a^3 p}{48D\gamma\left(\frac{1-m^2}{m} + \left(\frac{a}{b}\right)^3 \frac{1-n^2}{n}\right)} \left(e^{\gamma x - \frac{\gamma a}{2}} + e^{\frac{\gamma a}{2} - \gamma x}\right) + \\ & \frac{a^3 p}{48D\gamma\left(\frac{1-m^2}{m} + \left(\frac{a}{b}\right)^3 \frac{1-n^2}{n}\right)} \left(e^{\gamma y - \frac{\gamma b}{2}} + e^{\frac{\gamma b}{2} - \gamma y}\right) - \\ & \frac{a^3 p(mn+1)(m+n)}{48D\gamma\left(n(1-m^2) + m\left(\frac{a}{b}\right)^3 (1-n^2)\right)} \end{aligned} \quad (54)$$

上述所求得的式(54)为端承桩条件下软土上方加筋体挠度分布函数, 此时的边界条件中桩角点位置处的挠度可以视为 0. 当桩为摩擦桩时, 4 桩角点位置处会产生竖向位移 δ_0 , 摩擦桩的竖向位移 δ_0 是与桩侧摩阻力以及桩顶荷载相关的参数, 此时式(45)可

以写为

$$\beta_1 + A\left(m + \frac{1}{m}\right) + B\left(n + \frac{1}{n}\right) = -\delta_0 \quad (55)$$

对于式(53), 将式(45)替换成式(55), 对 β_1 重新进行求解, 结果可得

$$\beta_1 = -\delta_0 - \frac{a^3 p(mn+1)(m+n)}{48D\gamma\left[n(1-m^2) + m\left(\frac{a}{b}\right)^3(1-n^2)\right]} \quad (56)$$

此时式(54)可以改写为式(57), 即

$$\begin{aligned} w(x,y) = & \frac{p}{24D\left[1 + \left(\frac{a}{b}\right)^3\left(\frac{m}{n}\right)\frac{1-n^2}{1-m^2}\right]} \cdot \\ & \left(-\frac{1}{2}a^3x + \frac{3}{2}a^2x^2 - 2ax^3 + x^4\right) + \\ & \frac{p}{24D}\left[1 - \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{a}{b}\right)^3\frac{m}{n}\frac{1-n^2}{1-m^2}\right]}\right] \cdot \\ & \left(-\frac{1}{2}b^3y + \frac{3}{2}b^2y^2 - 2by^3 + y^4\right) + \\ & \frac{a^3p}{48D\gamma\left[\frac{1-m^2}{m} + \left(\frac{a}{b}\right)^3\frac{1-n^2}{n}\right]} \left(e^{\gamma x - \frac{\gamma a}{2}} + e^{\frac{\gamma a}{2} - \gamma x}\right) + \\ & \frac{a^3p}{48D\gamma\left[\frac{1-m^2}{m} + \left(\frac{a}{b}\right)^3\frac{1-n^2}{n}\right]} \left(e^{\gamma y - \frac{\gamma b}{2}} + e^{\frac{\gamma b}{2} - \gamma y}\right) - \\ & \frac{a^3p(mn+1)(m+n)}{48D\gamma\left[n(1-m^2) + m\left(\frac{a}{b}\right)^3(1-n^2)\right]} - \delta_0 \quad (57) \end{aligned}$$

2 计算方法的建立与验证

2.1 路堤荷载及固结度

2.1.1 土拱作用下软土上方荷载 $p(x, y)$

Terzaghi^[22]在平面活动门试验中证实了土拱效应的存在, 并且提出了对应的等沉降模型, 推导了软土上方的应力分布函数(这里加筋体上部的荷载是由上部土拱传递而来的), 具体表达形式为

$$\sigma_v = \frac{\gamma_0 B' - c}{K \tan \varphi} \left(1 - e^{-K \tan \varphi \left(\frac{z'}{B'}\right)}\right) + q e^{-K \tan \varphi \left(\frac{z'}{B'}\right)} \quad (58)$$

式中: γ_0 为路堤填土的容重, kN/m^3 ; c 为路堤填土黏聚力, kPa ; φ 为路堤填土内摩擦角, $(^\circ)$; K 为土压力系数, 无量纲, 假定其为常数; z' 为加筋体上方路堤填

土高度, m ; B' 为太沙基活动门试验中的活动门宽度, m .

Hewlett 等^[23]考虑了 3 维空间中的土拱效应, 并且假设分布在软土地基上方的荷载是均匀的. 此外, 还有一些学者在研究中也提出了类似的假设和观点, 其中李晓龙等^[12]在研究中采用了 van Eekelen 等^[24]的同心圆土拱模型计算上部路堤填土通过土拱效应传递到加筋体上方的压力, 并且假设该压力在软土地基上方均匀分布.

此外, 英国《加筋土及加筋填土规范》BS 8006-1^[16]推荐了一种基于 Maston 地下管道理论^[25]的土拱效应计算方法, 其计算所得的桩顶平均压力及软土上方平均压力表达式分别为

$$\sigma_p = \left(\frac{C_c a'}{H}\right)^2 (\gamma_0 H + q) \quad (59)$$

$$\sigma_s = \frac{(\gamma_0 H + q) \left[s'^2 - a'^2 \left(\frac{C_c a'}{H}\right)^2\right]}{s'^2 - a'^2} \quad (60)$$

式中: σ_p 为桩顶平均压力, kPa ; σ_s 为软土上方平均压力, kPa ; C_c 为土拱效应系数, 对于一般端承桩而言, $C_c = 1.9H/a - 0.18$; H 为路堤填土高度, m ; s' 为桩间距, m ; a' 为桩帽边长, m .

2.1.2 固结度

微分控制方程式(15)中的固结度是一个与土体自身性质(渗透系数、初始孔隙比、压缩系数等)以及时间相关的参数, 根据 Terzaghi^[22]的一维固结理论, 可以得到其具体表达式分别为

$$U_t = 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} e^{-\frac{m^2 \pi^2 T_v}{4}} \quad (61)$$

$$T_v = \frac{C_v t}{H^2} \quad (62)$$

$$C_v = \frac{k(1+e_0)}{a'' \gamma_w} \quad (63)$$

式中: k 为软土的渗透系数, cm/s ; e_0 为软土的初始孔隙比, 无量纲; a'' 为土体压缩系数, MPa^{-1} ; γ_w 为水的容重, kN/m^3 ; C_v 为竖向固结系数, m^2/s ; H' 为软土排水高度, m , 单面排水时为填土高度 H , 双面排水时为 $H/2$; t 为固结时间, s ; T_v 为竖向固结时间因数, 无量纲.

对于式(61), 其右侧为一收敛很快的级数, 当固结度大于 30% 时可以近似取其第 1 项, 因此可以近似得到固结度的近似表达式为

$$U_t = 1 - \frac{8}{\pi^2} e^{-\frac{\pi^2 T_v}{4}} \quad (64)$$

2.2 加筋体变形及软土沉降分析

2.2.1 交通荷载作用下地基土沉降

对于一般地基层的基床反力系数,不同的规范也给出了取值的相关规定,例如《地下铁道、轻轨交通岩土工程勘察规范》^[26]中指出,基床反力系数在现场的取值采用 K_{30} 方法,在室内可采用三轴试验或固结试验的方法测得地基土的基床反力系数,并给出了一般基床反力系数的经验值.《城市轨道交通岩土工程勘察规范》^[27]给出了室内固结试验与基床反力系数 k_s 之间的对应关系式,即

$$k_s = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{e_1 - e_2} \times \frac{1 + e_m}{h_0} \quad (65)$$

式中: σ_1 和 σ_2 为应力增量, kPa; e_1 和 e_2 为相应的孔隙比减小量; $e_m = (e_1 + e_2)/2$; h_0 为样品高度, m.

2.2.2 加筋体应变分析

为了简化运算表达,将挠度函数的表达式简记为

$$w(x,y) = A_m \left(-\frac{1}{2}a^3x + \frac{3}{2}a^2x^2 - 2ax^3 + x^4 \right) + B_m \left(-\frac{1}{2}b^3y + \frac{3}{2}b^2y^2 - 2by^3 + y^4 \right) + C_m \left(e^{\gamma x - \frac{\gamma a}{2}} + e^{\frac{\gamma a}{2} - \gamma x} \right) + D_m \left(e^{\gamma y - \frac{\gamma b}{2}} + e^{\frac{\gamma b}{2} - \gamma y} \right) - E_m \quad (66)$$

式中 A_m 、 B_m 、 C_m 、 D_m 和 E_m 分别为与土拱传递荷载和加筋体材料参数相关的系数.

将弯曲薄板内部应力与其挠度之间的关系式代入到式(66),得到加筋体上表面正应力 σ_x 的表达式为

$$\sigma_x = -\frac{Et_0}{2(1-\mu^2)} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) \quad (67)$$

式中 t_0 为加筋体挠度.

在两桩间的应力表达式为

$$\sigma_x = -\frac{Et_0}{2(1-\mu^2)} \left\{ A_m (3a^2 - 12ax + 12x^2) + C_m \left(\gamma^2 e^{\gamma x - \frac{\gamma a}{2}} + \gamma^2 e^{\frac{\gamma a}{2} - \gamma x} \right) + \mu \left[B_m (3b^2y - 12by + 12y^2) + D_m \left(\gamma^2 e^{\gamma y - \frac{\gamma b}{2}} + \gamma^2 e^{\frac{\gamma b}{2} - \gamma y} \right) \right] \right\} \quad (68)$$

由于加筋体的上表面处的主要应力 σ_x 、 σ_y 和 τ_{xy} 均不为 0,为了求解沿两桩桩间方向加筋体肋条的应力应变分布,可以将所有已知参数代入式(68),从而得到正应力 σ_x 的表达式.

2.2.3 试验验证

为了验证理论推导结果的可靠性,将理论推导软土及桩顶沉降值结果与试验数据相对比.模型槽的内部尺寸为 $2.0\text{ m} \times 1.8\text{ m} \times 2.3\text{ m}$,模型槽总体可以分为上部结构和下部结构:下部结构包括软土地基、细砂垫层、砾石垫层,上部结构主要包括加筋体、上部砂土路堤以及面层.由于模型槽下半部分的桩为刚性桩,共有 4 个,矩形桩帽规格为 $0.5\text{ m} \times 0.5\text{ m} \times 0.1\text{ m}$,与直径 0.5 m 、高 0.6 m 的圆柱形桩身连接.图 4 为模型槽示意.

在模型槽 4 桩角点围成的区域内,选取合适的分析板厚 s 对于结果的准确性是至关重要的.在郑俊杰等^[28]和张军等^[29]关于薄板的相关研究中,薄板厚度取为 $8 \sim 12\text{ cm}$.但在本文所提出的方法的实际计算过程中,笔者发现在不同的桩净距下采用同样的薄板

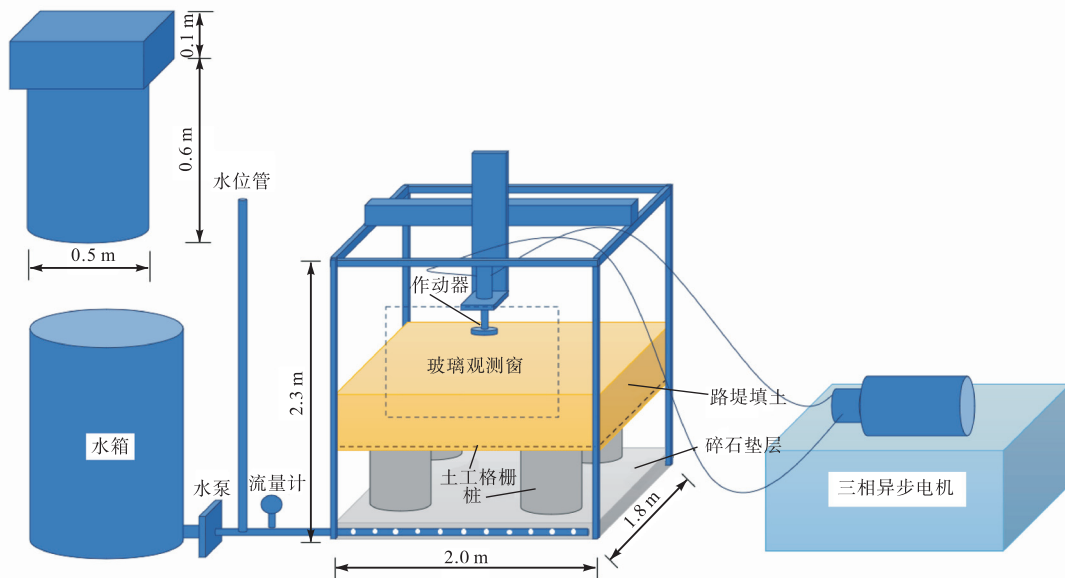


图 4 模型槽示意

Fig.4 Schematic of model slot

厚度会导致计算结果产生较大偏差. 基于此, 将加筋体及其上、下方的 7.25 cm 砂土层视作 Kirchhoff 薄板进行处理, 此时 s 为 72.5 mm, b 为 1450 mm, s/b 为 1/20, 符合 Kirchhoff 假定中对薄板板厚与较短边之比 s/b 的限制.

由于土拱效应的存在, 路堤中的土压力系数并不为定值, 同时为了考虑作用在路面的交通荷载, 将上述相关参数代入式 (60), 可以得到作用于软土上方的土压力 σ_s 的值为 9.49 kPa.

将所有相关试验参数代入式 (66) 中, 可以得到模型槽试验中加筋体挠度表达式, 为了分析两桩间及桩顶沉降, 求解挠度分布函数在 A_0D_0 之间的具体分布形式, 其表达式为

$$w(x,0) = 2.2320(-0.108x + 0.54x^2 - 1.2x^3 + x^4) - 1.0894 \times 10^{-6} \times (e^{29.72x-8.9154} + e^{8.9154-29.72x}) + 8.1113 \times 10^{-3} \quad (69)$$

式中参数单位为 m.

在本次选取的试验数据中, p_0 取 25 kN, f 取在 4.17 Hz 交通荷载作用下加筋垫层上方多点位移计所获取的沉降值^[30]. 在理论计算中, 交通荷载考虑将作动器通过加载板传递给路堤面层的交通荷载等效为作用在面层上的均布荷载, 其中 p_0 取 25 kN, 面层平面尺寸为 1.6 m × 1.2 m, 均布荷载 q 取 13.02 kPa, 桩顶及软土上方沉降理论与试验对比分析结果见图 5. 由式 (69) 计算得到的软土上方两桩正中心沉降值为 9.970 mm, 试验结果为 8.783 mm, 相对误差约为 13.51%, 同时可见相对于试验中的软土沉降值, 理论计算所获得的结果对于软土上方沉降的预测偏保守.

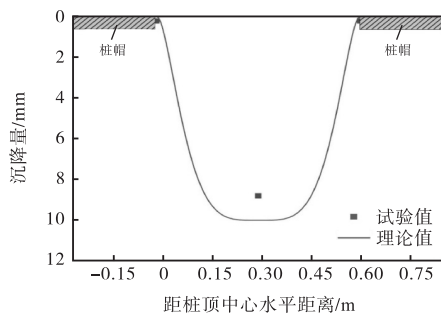


图5 沉降分布理论计算值与实际值对比

Fig.5 Comparison between theoretical calculation and actual values of settlement distribution

本模型槽试验中取其在两桩之间的最大沉降值, 即 $s_0 = 9.970$ mm, 代入式 (68) 得到 x 轴方向正应力值为

$$\sigma_x = -0.1963 \times [2.2319 \times (1.08 - 7.2x + 12x^2) - 1.0894 \times 10^{-6} \times (883.16e^{29.7180x-8.9154} + 883.16e^{8.9154-29.7180x}) - 2.3878] \quad (70)$$

该试验中采用的加筋体为钢塑型土工格栅按照《公路工程土工合成材料 土工格栅 第1部分: 钢塑格栅》^[31]的标准生产, 其纵横向最大抗拉强度为 30 kN/m. 本试验中使用的加筋体厚度为 1.5 mm, 通过正应力 σ_x 的表达式以及加筋体的抗拉刚度可以获得加筋体中的应变分布理论表达式 ε_x (此处应变用百分数表示) 为

$$\varepsilon_x = -314.045 \times [2.2319 \times (1.08 - 7.2x + 12x^2) - 1.0894 \times 10^{-6} \times (883.16e^{29.7180x-8.9154} + 883.16e^{8.9154-29.7180x}) - 2.3878] \quad (71)$$

将理论计算出的两桩间应变分布与室内模型试验监测应变数据对比, 具体结果见图 6, 结果表明: 两桩间应变分布理论计算趋势与室内试验结果一致, 桩间应变理论值为 0.22%, 试验值为 0.26%, 相对误差为 14.50%. 理论推导给出的桩间最大应变位于桩帽边缘处.

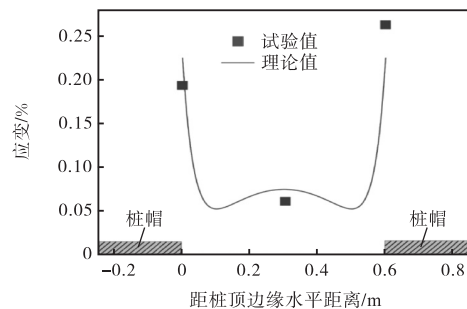


图6 两桩桩间应变理论值与试验值对比

Fig.6 Comparison between theoretical and test values of strain between two piles

3 计算结果与分析

为了研究加筋体刚度及桩净距等不同影响因素对于两桩间加筋体最大应变的影响, 对于式 (68), 将加筋体在两桩间 x 向的应力分布转化为桩间应变的表达式, 即

$$\varepsilon_x = -\frac{Et'_0h'_0}{2(1-\mu^2)J} \left\{ A_m (3a''^2 - 12a''x + 12x^2) + C_m \left(\gamma^2 e^{\gamma x - \frac{\gamma a''}{2}} + \gamma^2 e^{\frac{\gamma a''}{2} - \gamma x} \right) + \mu \left[B_m (3b'^2 y - 12b'y + 12y^2) + D_m \left(\gamma^2 e^{\gamma y - \frac{\gamma b'}{2}} + \gamma^2 e^{\frac{\gamma b'}{2} - \gamma y} \right) \right] \right\} \quad (72)$$

式中: h'_0 为加筋体厚度; J 为加筋体刚度; t'_0 为加筋体在两桩间的最大挠度; a'' 和 b' 分别为桩在两个方向上的桩净距.

3.1 加筋体刚度对桩间最大应变的影响

为了研究加筋体刚度对加筋体两桩间最大应变的影响,选取路堤均布荷载 10 kPa、路堤高度 2 m、垫层弹性模量 40 MPa、泊松比 0.30、软土基床反力系数 20 MPa/m、固结度 100%的工况,在 3 种不同的桩净距下,将加筋体桩间最大应变与加筋体刚度的关系绘制于图 7.

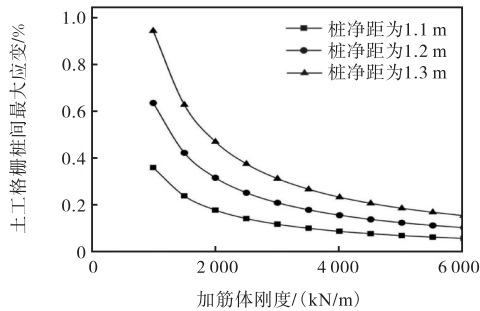


图 7 加筋体刚度与桩间最大应变的关系

Fig.7 Relationship between stiffness of reinforced body and maximum strain between piles

从图 7 中可以看出,桩间加筋体最大应变随着加筋体刚度的增大而减小,在桩净距为 1.1 m 的条件下,当加筋体刚度从 1 500 kN/m 增大到 6 000 kN/m 时,桩间最大应变从 0.36% 减小到 0.06%,减小了 84% 左右.另一方面,桩净距的增大也会导致桩间最大应变的增大.

3.2 交通荷载对桩间最大应变的影响

为了研究交通荷载对加筋体两桩间最大应变的影响,选取加筋体刚度 1 000 kN/m、路堤高度 2 m、垫层弹性模量 40 MPa、泊松比 0.30、软土基床反力系数 20 MPa/m、固结度 100%的工况,在 3 种不同的桩净距条件下,将交通荷载与加筋体桩间最大应变的关系绘制于图 8.

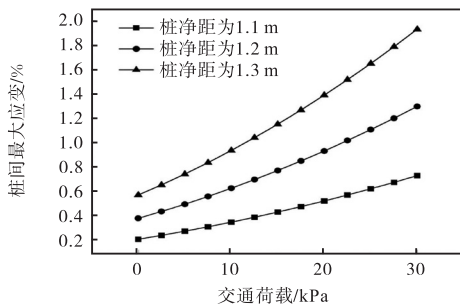


图 8 交通荷载与桩间最大应变的关系

Fig.8 Relationship between traffic load and maximum strain between piles

从图 8 中可以看出,加筋体桩间应变随着交通荷载的增大而增大,在桩净距为 1.1 m 的条件下,当交通荷载从 10 kPa 增大到 30 kPa 时,桩间最大应变从

0.36% 增大到 0.74%,增大了近 1 倍.

4 结 论

本文建立了在交通荷载作用下低填方路堤中的加筋体挠度分布方程,并通过薄板的基本关系得到了加筋体在两桩间的应变分布函数,通过将理论方法与工程实例对比,验证了本文所提方法的可靠性.本文得出的主要结论如下.

(1) 两桩间的加筋体挠度(软土沉降)最大值出现在相邻两桩中心点连线中心位置处,桩-土不均匀沉降会导致加筋体中产生张拉膜效应,即桩间应变会从软土上方向着桩帽边缘逐渐增大,桩间最大应变约为最小应变的 3 倍.

(2) 桩间最大应变出现在桩帽边缘位置处,桩间最大应变是加筋体设计需要考虑的最不利因素,其值与相邻两桩的净距离有关,且随着桩净距的增大而增大.

(3) 加筋体应变会受到加筋体自身的材料特性的影响.在加筋体处于线弹性范围内,较大的加筋体刚度有利于降低桩间最大应变.在实际工程施工中,应当根据实际条件选用合适刚度的加筋体.

(4) 加筋体的桩间最大应变会受到交通荷载的影响.在实际设计过程中,会将交通荷载等效为均布荷载进行处理,随着交通荷载的增大,加筋体的桩间最大应变也会随之增大.

(5) 本文基于 Kirchhoff 薄板假设的加筋体承载机理的解析方法,采用了 Kirchhoff 薄板的静态控制方程,其推导公式中土拱传递到加筋体上方压力和软土地基对加筋体的支承反力均简化假定为均布力,将试验中作动器通过加载板传递给路堤面层的荷载等效为作用在面层上的均布荷载计算,是基于准静态应力分布下的分析计算方法.针对此问题需进一步开展相关研究,以验证其适用性.

(6) 本文只研究了低填方钢塑土工格栅加筋路堤中 Kirchhoff 薄板假设的加筋体承载机理的解析方法.当采用不可延伸土工格栅材料时,土工格栅应力、应变不呈现弹性应变特征,因此 Kirchhoff 薄板模型理论将不再适用.

(7) 本文仅限于单层加筋条件下的桩间最大应变的理论推导和解释.多层加筋也被广泛应用于桩承式路堤的工程建设中,对于多层加筋条件下的桩间最大应变的推导和预测,需要引入更科学合理的理论模型进行阐释.

参考文献:

- [1] Liu S, Yu H Y, Zhao C, et al. Evolution of soil arching in geosynthetic-reinforced pile-supported embankment of a high-speed railway under long-term train traffic loading and excessive subsoil settlement[J]. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 2025, 151(5): 04025028.
- [2] Zhang D, Yang G Q, Li T, et al. Model tests study of multi-layer geosynthetic-reinforced pile-supported embankments and evaluation of analytical design models [J]. *Transportation Geotechnics*, 2025, 51: 101521.
- [3] Xiong C X, Guo Z X, Xing Z Q, et al. An analytical solution for settlement of pile-supported reinforced low embankment considering lateral friction along pile shaft [J]. *Transportation Geotechnics*, 2025, 50: 101478.
- [4] Agarwal E, Luo N, Liu K W. Probabilistic analyses of geosynthetic-reinforced pile-supported embankments using design methods and 3D finite element models considering soil variability[J]. *Geotextiles and Geomembranes*, 2025, 53(2): 559-576.
- [5] Nguyen T C B, Vu D L, Pham M T, et al. 3D numerical investigation of soil arching in deep cement mixing and stiffened deep cement mixing pile-supported embankments[J]. *Transportation Infrastructure Geotechnology*, 2025, 12(1): 13.
- [6] Xu C B, Zhang J, Zheng J J, et al. Influence of pile type on the load transfer mechanism in pile-supported low embankments under cyclic loading[C]//5th International Conference on Transportation Geotechnics. Sydney, Australia, 2024: 259-267.
- [7] Li G Y, Xu C, Yoo C, et al. Performance of unreinforced and geogrid-reinforced pile-supported embankments under localized surface loading: Analytical investigation[J]. *Geotextiles and Geomembranes*, 2025, 53(1): 260-276.
- [8] Sun R, Jiang X, Zhang L, et al. DEM analysis of load transfer in double-layer geosynthetic-reinforced pile-supported embankments[J]. *Computational Particle Mechanics*, 2025, 12(1): 721-735.
- [9] 闫澍旺, 郎瑞卿, 孙立强, 等. 基于薄板理论的刚性桩网复合地基桩土应力比计算[J]. *岩石力学与工程学报*, 2017, 36(8): 2051-2060.
- Yan Shuwang, Lang Ruiqing, Sun Liqiang, et al. Calculation of pile-soil stress ratio in composite foundation with rigid pile-net based on plate theory[J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2017, 36(8): 2051-2060 (in Chinese).
- [10] 王一楠, 陈梅君. 悬链线法计算桩承式加筋路堤的土拱形态[J]. *岩土工程学报*, 2021, 43(增2): 276-279.
- Wang Yinan, Chen Meijun. Forms of soil arch in GRPS embankment by catenary method[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2021, 43(Suppl 2): 276-279 (in Chinese).
- [11] 王建军, 陈福全, 李大勇. 低填方加筋路基沉降的Kerr模型解[J]. *岩土力学*, 2019, 40(1): 250-259.
- Wang Jianjun, Chen Fuquan, Li Dayong. A simple solution of settlement for low reinforced embankments on Kerr foundation[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2019, 40(1): 250-259 (in Chinese).
- [12] 李晓龙, 史宏彦. 基于比拟方程法的桩承式加筋体三维分析方法[J]. *岩土工程学报*, 2020, 42(5): 925-933.
- LI Xiaolong, Shi Hongyan. 3-D analysis method for pile-supported geosynthetic reinforcements based on analog equation method[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2020, 42(5): 925-933 (in Chinese).
- [13] Fang H, Zheng J J, Liu Y, et al. Analytical solutions of the dynamic response of a dual-beam model for a geosynthetic reinforced pile-supported embankment under moving load[J]. *Computers and Geotechnics*, 2022, 142: 104563.
- [14] 孙璐, 邓学钧. 运动负荷下黏弹性 Kelvin 地基上无限大板的稳态响应[J]. *岩土工程学报*, 1997, 19(2): 14-22.
- Sun Lu, Deng Xuejun. Steady response of infinite plate on viscoelastic Kelvin foundation to moving load[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 1997, 19(2): 14-22 (in Chinese).
- [15] 姚海林, 卢正, 罗海宁, 等. 交通荷载作用下 Kelvin 地基上不平整路面的动力响应分析[J]. *岩土力学*, 2009, 30(4): 890-896.
- Yao Hailin, Lu Zheng, Luo Haining, et al. Dynamic response of rough pavement on Kelvin foundation subjected to traffic loads[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2009, 30(4): 890-896 (in Chinese).
- [16] BS 8006-1 Code of Practice for Strengthened/Reinforced Soils and Other Fills, Incorporating Corrigendum 1[S]. London: British Standards Institution, 2012.
- [17] Kiendl J, Bletzinger K U, Linhard J, et al. Isogeometric shell analysis with Kirchhoff-Love elements[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineer-*

- ing, 2009, 198(49/50/51/52): 3902-3914.
- [18] 张福范. 以 Kirchhoff 薄板理论解狭长矩形截面杆的约束扭转[J]. 应用数学和力学, 1982, 3(4): 463-476.
Zhang Fufan. On the restrained torsion of narrow rectangular cross section by Kirchhoff's thin plate theory[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 1982, 3(4): 463-476(in Chinese).
- [19] Bonaldi F, Di Pietro D A, Geymonat G, et al. A hybrid high-order method for Kirchhoff-Love plate bending problems[J]. ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis, 2018, 52(2): 393-421.
- [20] Ciarlet P G, Mardare C. An intrinsic formulation of the Kirchhoff-Love theory of linearly elastic plates[J]. Analysis and Applications, 2018, 16(4): 565-584.
- [21] 张玲, 程钦桂, 赵明华. 基于双层 Euler 梁理论的土工格室加筋体变形计算[J]. 湖南大学学报(自然科学版), 2017, 44(9): 114-121.
Zhang Ling, Cheng Qingui, Zhao Minghua. Deformation calculation of geocell reinforcement based on the double Euler beams theory[J]. Journal of Hunan University(Natural Sciences), 2017, 44(9): 114-121(in Chinese).
- [22] Terzaghi K. Theoretical Soil Mechanics[M]. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1943.
- [23] Hewlett W J, Randolph M F. Analysis of piled embankment[J]. Ground Engineering, 1988, 21(3): 12-18.
- [24] van Eekelen S J M, Bezuijen A, van Tol A F. An analytical model for arching in piled embankments[J]. Geotextiles and Geomembranes, 2013, 39: 78-102.
- [25] Spangler M G, Handy R L. Soil Engineering[M]. London: Intext Educational Publishers, 1973.
- [26] GB 50307—1999 地下铁道、轻轨交通岩土工程勘察规范[S]. 北京: 中国计划出版社, 1999.
GB 50307—1999 Code on Geotechnical Investigations for Metro and Light Rail Transit[S]. Beijing: China Planning Press, 1999(in Chinese).
- [27] GB 50307—2012 城市轨道交通岩土工程勘察规范[S]. 北京: 中国计划出版社, 2012.
GB 50307—2012 Code for Geotechnical Investigations of Urban Rail Transit[S]. Beijing: China Planning Press, 2012(in Chinese).
- [28] 郑俊杰, 张军, 马强, 等. 双向增强体复合地基桩土应力比三维分析[J]. 华中科技大学学报(自然科学版), 2010, 38(2): 83-86.
Zheng Junjie, Zhang Jun, Ma Qiang, et al. Three dimensional analysis of pile-earth stress ratio of biaxial reinforcement composite foundation[J]. Journal of Huazhong University of Science & Technology(Natural Science Edition), 2010, 38(2): 83-86(in Chinese).
- [29] 张军, 郑俊杰, 马强. 路堤荷载下双向增强体复合地基受力机理分析[J]. 岩土工程学报, 2010, 32(9): 1392-1398.
Zhang Jun, Zheng Junjie, Ma Qiang. Mechanical performance of biaxial reinforcement composite foundation under embankment loads[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2010, 32(9): 1392-1398(in Chinese).
- [30] JT/T925.1—2014 公路工程土工合成材料 土工格栅 第 1 部分: 钢塑格栅[S]. 北京: 人民交通出版社股份有限公司, 2014.
JT/T925.1—2014 Geosynthetics in Highway Engineering — Geogrids — Part 1: Steel-Plastic Compound Geogrid[S]. Beijing: People's Communications Publishing House Co., Ltd., 2014(in Chinese).
- [31] 陆运生. 交通荷载作用下低填方路堤加筋体工作性能研究[D]. 南京: 东南大学土木工程学院, 2024.
Lu Yunsheng. Study on the Working Performance of Reinforced Body of Low Fill Embankment Under Traffic Load[D]. Nanjing: School of Civil Engineering, Southeast University, 2024(in Chinese).

(责任编辑: 武立有)