

DOI:10.11784/tdxbz202503035

振动冲击复合载荷下岩石力学响应及能量 消耗规律的理论研究

赵环帅^{1,2}, 潘永泰¹, 乔鑫¹, 姜婷³, 刘杰⁴, 赵英嘉¹

(1. 中国矿业大学(北京)化学与环境工程学院, 北京 100083;

2. 河北省智能装备数字化设计及过程仿真重点实验室(唐山学院), 唐山 063000;

3. 华中师范大学城市与环境科学学院, 武汉 430079;

4. 辽宁工程技术大学力学与工程学院, 阜新 123000)

摘要: 针对目前非线性载荷下岩石力学响应的研究主要以单一加载方式为主, 而关于非线性载荷复合作用下岩石的力学响应研究相对较少, 且研究方法多集中于物理试验与数值模拟, 缺少理论分析支持. 为此, 本文总结了非线性载荷分类及其在破岩中的优势, 并结合岩石介质的力学特性与基本模型, 选择了弹性元件和黏性元件并联形式的 Kelvin-Voigt 模型, 对岩石进行力学建模. 在此基础上, 分析了自由振动、简谐振动及冲击载荷下岩石的力学响应, 并建立了振动冲击复合载荷下岩石的力学响应方程, 进一步探讨了岩石的能量消耗规律. 最后, 采用准脆性材料青砂岩, 通过颗粒流模拟验证了理论研究结果. 结果表明, 在外部加载过程中, 振幅对岩石内部颗粒扰动具有放大作用, 能量吸收量与振幅的平方、激振频率及阻尼成正比, 且每个运动周期中吸收的能量与简谐振动系统总能量之比为常数. 同时, 激振力越大, 用于摩擦的能量消耗也越大, 振动激励对岩石能量吸收及破裂具有一定的促进作用. 研究结果为非线性载荷下岩石的破裂机理及能量消耗规律研究提供了理论基础.

关键词: 岩石力学; 青砂岩; 颗粒流模拟; 振动冲击复合载荷; Kelvin-Voigt 模型; 力学响应方程; 能量消耗规律
中图分类号: TU452 **文献标志码:** A **文章编号:** 0493-2137(2026)05-0474-13

Theoretical Study on the Mechanical Response and Energy Consumption Law of Rock Under Vibration-Impact Composite Loading

Zhao Huanshuai^{1,2}, Pan Yongtai¹, Qiao Xin¹, Jiang Ting³, Liu Jie⁴, Zhao Yingjia¹

(1. School of Chemical and Environmental Engineering, China University of Mining and Technology-Beijing, Beijing 100083, China; 2. Key Laboratory of Intelligent Equipment Digital Design and Process Simulation of Hebei

Province, Tangshan University, Tangshan 063000, China;

3. College of Urban and Environmental Sciences, Central China Normal University, Wuhan 430079, China;

4. School of Mechanics and Engineering, Liaoning Technical University, Fuxin 123000, China)

Abstract: Regarding the current research on the mechanical response of rock under nonlinear loading, single-loading methods are mainly used, and relatively limited research on the mechanical response of rock under the combined action of nonlinear loading has been conducted. Moreover, research methods mostly focus on physical experiments and numerical simulations, lacking the support of theoretical analyses. This paper summarized the classification of nonlinear loading and its advantages in rock breaking and combined the mechanical properties and basic models of rock media to select the Kelvin-Voigt model in parallel with elastic and viscous elements for the mechanical modeling of a rock. On this basis, the mechanical response of rock under free vibration, harmonic vibration, and impact load-

收稿日期: 2025-03-28; 修回日期: 2025-04-23.

作者简介: 赵环帅(1980—), 男, 博士, 副研究员, zhaohuanshuai@163.com.

通信作者: 潘永泰, panyongtai@cumtb.edu.cn.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(52074308); 河北省教育厅科学研究项目(ZC2026264); 唐山学院博士创新项目(BC2025014ZD).

Supported by the National Natural Science Foundation of China(No. 52074308), the Science Research Project of Hebei Education Department(No. ZC2026264), the Doctoral Research Startup Fund Project of Tangshan University(No. BC2025014ZD).

ing was analyzed, and the mechanical response equation of rock under vibration-impact composite loading was established, further exploring the energy consumption law of rock. Finally, the theoretical research results were verified through particle flow simulation using quasi-brittle material, i.e., green sandstone. The research results show that during the external loading process, the amplitude has an amplifying effect on the disturbance of particles inside the rock. The energy absorption is proportional to the square of the amplitude, the excitation frequency, and damping, and the ratio of the energy absorbed in each motion cycle to the total energy of the harmonic vibration system is constant. Meanwhile, the greater the excitation force, the greater the energy consumption for friction. Moreover, the vibration excitation has a certain promoting effect on the energy absorption and fracture of rock. The research results provide a theoretical basis for the study of the fracture mechanism and energy consumption law of rock under nonlinear loading.

Keywords: rock mechanics; green sandstone; particle flow simulation; vibration-impact composite loading; Kelvin-Voigt model; mechanical response equation; energy consumption law

岩石作为自然界中的一种天然介质,是工业生产中最常见、应用最广泛的基础材料,也是重要的工业原料与矿产资源. 由于岩石是多种矿物的集合体,其内部矿物力学性质存在显著差异,因此,在外部加载过程中,岩石往往表现出复杂的力学特性,例如弹性、塑性及黏性等^[1]. 目前,国内外相关学者在研究岩石介质的力学特性或断裂机理时,通常采用将岩石介质理想化,并结合其变形特征建立各种力学模型. 总体而言,常见的岩石力学模型主要包括弹性模型、塑性模型、黏弹性模型及黏弹塑性模型等,且不同的岩石力学模型具有各自的优缺点及适用范围. 然而,在研究过程中,选择合理的力学模型能准确反映岩石的实际力学行为,使分析结果更接近真实工况,从而精确预测岩石在各种工程载荷作用下的变形与破坏过程. 这不仅有助于提高工程分析的准确性,还能确保设计的合理性以及项目的安全性^[2],因此,岩石力学模型的合理选择对于工程实践具有极其重要的意义.

目前,关于岩石外部载荷的研究主要以单一加载方式为主,而复合载荷对岩石破裂特征及其力学性质的影响研究较少,且鲜有研究各加载方式之间的相互影响. 此外,现有研究方法主要为物理试验与数值模拟,缺少理论分析的支持. 然而,在实际工程应用中,岩石的破碎过程往往是由多种加载方式共同作用的结果. 例如,选矿工业中常见的惯性圆锥破碎机,主要依靠强烈振动产生的简谐振动力和可以调节的冲击力来实现对岩石的选择性破碎,而振动与冲击加载的结合能产生协同效应,从而显著提高破岩速度和效果^[3]. 因此,未来的研究方向应更加关注多种加载方式复合作用下的岩石破裂特性及其相互影响机制^[4-5].

基于此,本文总结了非线性载荷分类及其在破岩中的优势,结合岩石介质的力学特性与基本模型,选

择了弹性元件和黏性元件并联形式的 Kelvin-Voigt 模型,对岩石进行力学建模. 在此基础上,分析了自由振动、简谐振动及冲击载荷下岩石的力学响应,并建立了振动冲击复合载荷下岩石的力学响应方程,进一步探讨了岩石的能量消耗规律. 最后,采用准脆性材料青砂岩,通过颗粒流模拟验证了理论研究结果,以期为非线性载荷下岩石的破裂机理及能量利用效率研究提供理论基础.

1 非线性载荷分类及破岩优势

目前,在工业实际应用过程中,常采用机械力破碎的方法对物料进行破碎,主要的破碎方法包括压碎、劈碎、折断、磨碎、冲击和振动破碎等. 但总体而言,根据外部载荷与加载时间或变形的关系,破碎过程可以分为线性载荷或非线性载荷两种类型(图 1),非线性载荷是指载荷与响应之间的关系不是线性的,即随着载荷的增加,结构的变形或受力以非线性的方式变化,其在破碎过程中的主要优势如下.

(1) 在破碎效果方面,线性加载通常是按照固定比例增加力,而非线性加载(如冲击加载)能产生瞬间的高能量,使岩石内部产生更多的裂纹,裂纹扩展速度更快,而且这些裂纹更容易扩展和交叉,从而更高效地破碎岩石,这有利于提高破碎作业的效率.

(2) 在能量利用方面,和常规加载方式相比,非线性加载能够更精准地控制能量的输入和释放. 通

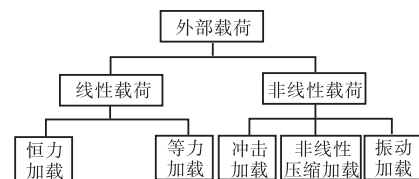


图 1 外部载荷分类^[6]

Fig.1 External loading classification^[6]

过采取合理的非线性加载方式,可以用较少的能量输入达到更好的岩石破碎效果,从而降低能耗.

(3) 在研究岩石的力学特性方面,非线性加载有助于深入了解岩石在复杂应力状态下的力学响应. 由于地下岩石在地质构造运动等过程中承受的是复杂多变的非线性力,而非线性载荷研究能够更真实地模拟岩石实际的受力环境,为岩石破碎研究提供更符合实际工况的理论依据.

综上可知,由于在各种工业破碎应用过程中,最常见外部载荷为非线性载荷(如冲击、振动、劈裂和挤压破碎等),这些载荷通常会导致材料和结构发生复杂的非线性动态响应(几何非线性、材料非线性和接触非线性等). 因此,对非线性载荷的准确分析,更能真实地反映材料在实际复杂工况下的受力情况,对于确保结构的安全性和可靠性具有非常重要的实际意义^[7-8].

2 岩石介质的力学模型

2.1 基本元件

1) 弹性元件

在外部载荷下,假如材料的变形特性符合胡克定律,则该材料通常被视为胡克体,其是一种理想的弹性体,特性表现为在外力作用下能够恢复到原始状态. 力学模型和本构关系如图 2 所示. 图中: σ 为应力, ε 为应变, k 为刚度系数.

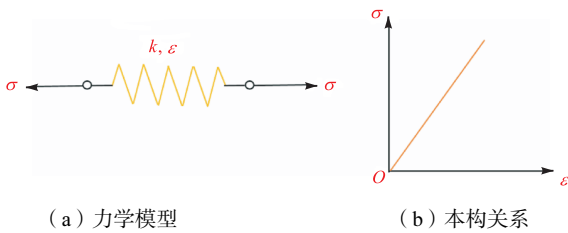


图 2 胡克体力学模型和本构关系

Fig.2 Mechanical model and constitutive relation of Hooke body

2) 塑性元件

当物体所受到的外部应力到达材料自身的屈服极限时,则开始产生塑性变形. 在理想状态下,具有这一特性的物体通常被称为塑性体,用于描述岩石在外力作用下发生永久变形的能力. 力学模型和本构关系如图 3 所示. 图中 σ_s 为材料的屈服强度.

3) 黏性元件

当物体的应力与应变速率成正比时,即认为符合牛顿流动定律,该物体可视为牛顿流体,即黏性元件,其是一种理想的黏性体,用于描述了岩石在应力

作用下随时间变化的特性. 力学模型和本构关系如图 4 所示. 图中 η 为牛顿黏性系数.

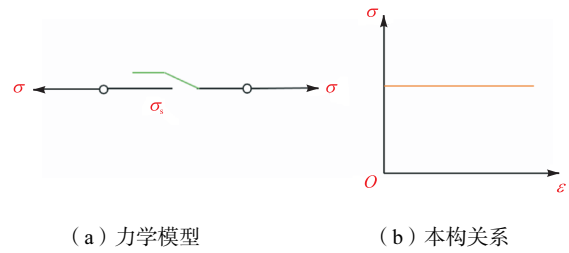


图 3 塑性体力学模型和本构关系

Fig.3 Mechanical model and constitutive relation of plastic body

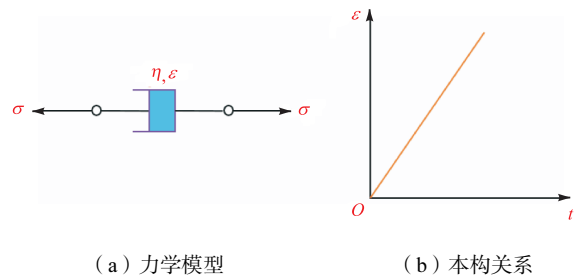


图 4 牛顿流体的力学模型和本构关系

Fig.4 Mechanical model and constitutive relation of Newtonian fluid

2.2 组合模型

1) St. Venant 模型

St. Venant 模型由弹簧和摩擦片串联组成(图 5),其力学特性表现为理想弹塑性体. 该模型是一种理想化的弹塑性体模型,其特点包括无蠕变、无松弛以及无弹性后效^[9].



图 5 St. Venant 模型
Fig.5 St. Venant model

St. Venant 模型的本构方程为

$$\begin{cases} \sigma < \sigma_s & \varepsilon = \frac{\sigma}{k} \\ \sigma \geq \sigma_s & \varepsilon \rightarrow \infty \end{cases} \quad (1)$$

2) Kelvin-Voigt 模型

Kelvin-Voigt 模型是黏弹性体(图 6),其由胡克体与牛顿体,即弹簧与阻尼器并联组成,用于描述材料在应力作用下的变形和恢复行为. 该模型强调材料的黏弹性特性,即应变滞后于应力,并且在卸载后应变会逐渐恢复,同时该模型属于稳定蠕变模型,有弹性后效,但模型本身并不具备松弛行为,即无法模拟应力松弛现象^[10-13].

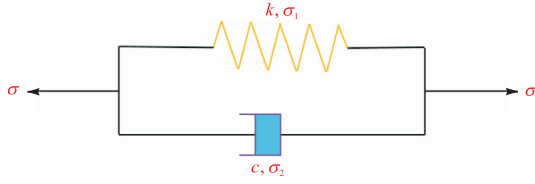


图6 Kelvin-Voigt模型
Fig.6 Kelvin-Voigt model

Kelvin-Voigt 模型的本构方程为

$$\sigma = k\varepsilon + c\dot{\varepsilon} \quad (2)$$

式中 c 为黏性阻尼系数。

除此之外,在岩石的研究过程中还存在以下组合模型。

(1) Maxwell 模型:由弹簧和阻尼器串联组成,能描述岩石的瞬时弹性变形及随时间发展的黏性流动,适用于研究岩石在短期快速加载和长期蠕变条件下的力学行为,如岩石在冲击荷载下的响应^[14-17]。

(2) Bingham 模型:结合了黏弹性和塑性的特点,有初始的弹性阶段,当应力超过屈服应力后表现出黏塑性流动,适用于描述具有明显屈服特性和黏性流动的岩石材料,如软岩或含有大量黏土矿物的岩石^[18-20]。

(3) Drucker-Prager 模型:在考虑岩石的黏弹塑性基础上,引入了与静水压力相关的屈服准则,能更好地反映岩石在复杂应力状态下的强度和变形特性,常用于岩土工程中的数值计算,如地下隧道的稳定性分析^[21-24]。

(4) Burgers 模型:由 Maxwell 和 Kelvin-Voigt 模型串联组成。Burgers 模型还可以用来描述一些具有复杂黏弹性行为的材料,一般应用在岩土工程、地质力学等领域^[25-28]。

2.3 岩石力学模型选择

由于 Kelvin-Voigt 模型是一种用于描述材料黏弹性行为的数学模型,适用于分析具有固体性质的材料在恒定应力或循环载荷下的变形和恢复特性,该模型通过弹簧(弹性元件)和阻尼器(黏性元件)的并联组合,能够反映材料在应力作用下的瞬时弹性变形及随后的黏弹性松弛行为。而岩石的弹性应变值通常较小,如在单轴压缩实验中,岩石的弹性应变值通常在较小范围(0.006 0 ~ 0.002 1)内波动^[29]。

综上所述,鉴于岩石介质的特性以及模型的适用性,本文将岩石视为一种具有弹性和黏性特性的复合材料,并采用弹性元件与黏性元件并联的 Kelvin-Voigt 模型进行力学建模分析,该模型能够有效描述岩石在应力作用下的变形和恢复行为,其力学模型如图 7 所示,图中 m 为岩石质量。

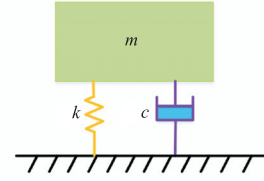


图7 岩石力学模型
Fig.7 Mechanical model of rock

3 非线性加载下岩石力学响应

3.1 自由振动下岩石力学响应

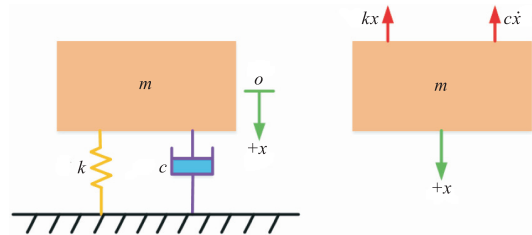
岩石单自由度振动系统如图 8 所示。用 x 表示岩石质量块相对于静平衡位置的振动位移,取向为正。由图 8 (b) 可得受力分析如下。

(1) 黏性阻尼力 F_1 与速度 \dot{x} 成正比,且阻尼力的方向与速度方向相反,即可表示为

$$F_1 = -c\dot{x} \quad (3)$$

(2) 弹簧受力 F_2 与位移 x 成正比,且弹簧受力的方向与速度方向相同,即可表示为

$$F_2 = kx \quad (4)$$



(a) 系统组成 (b) 受力图

图8 岩石单自由度振动系统

Fig.8 Single-degree-of-freedom vibration system of rock

综上,采用牛顿定律得到岩石单自由度振动系统运动微分方程为

$$m\ddot{x} = -c\dot{x} - kx \quad (5)$$

或

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad (6)$$

为了求解方程(6),假设解的形式为

$$x(t) = Ce^{st} \quad (7)$$

式中 C 和 s 为待定常数。

将式(7)代入式(6),可得如下特征方程:

$$ms^2 + cs + k = 0 \quad (8)$$

该特征方程的根为

$$s_{1,2} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} \quad (9)$$

由这两个根可得方程(6)的两个特解为

$$x_1(t) = C_1 e^{s_1 t} \tag{10}$$

$$x_2(t) = C_2 e^{s_2 t} \tag{11}$$

因此,方程(6)的通解为这两个特解的线性组合,即

$$x(t) = C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t} = C_1 e^{\left[\frac{-c}{2m} + \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} \right] t} + C_2 e^{\left[\frac{-c}{2m} - \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} \right] t} \tag{12}$$

式中 C_1 、 C_2 为两个任意的常数,可由系统的初始条件来确定。

将式(9)中根式的值为零的阻尼系数称为临界阻尼系数,用 c_c 表示,即

$$\left(\frac{c_c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m} = 0 \tag{13}$$

或

$$c_c = 2m\sqrt{\frac{k}{m}} = 2\sqrt{km} = 2m\omega_n \tag{14}$$

式中 ω_n 为岩石的固有频率, $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$ 。

对于有阻尼系统,阻尼系数与临界阻尼系数的比值称为阻尼比,也称为相对阻尼系数,用 ζ 表示,即

$$\zeta = \frac{c}{c_c} = \frac{c}{2m\omega_n} = \frac{c}{2\sqrt{mk}} \tag{15}$$

由式(14)和式(15)可得

$$\frac{c}{2m} = \frac{c}{c_c} \frac{c_c}{2m} = \zeta\omega_n \tag{16}$$

因此

$$s_{1,2} = \left(-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)\omega_n \tag{17}$$

故通解(12)可转化为

$$x(t) = C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t} = C_1 e^{(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t} + C_2 e^{(-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t} \tag{18}$$

可见,特征根 s_1 和 s_2 以及通解(18)的数值取决于阻尼。

一般情况下,岩石通常表现为欠阻尼状态^[30](欠阻尼也称为小阻尼或弱阻尼),对于欠阻尼的情况 ($\zeta < 1$ 或 $c < c_c$ 或 $c/2m < \sqrt{k/m}$), $\zeta^2 - 1$ 是负的,因此, s_1 和 s_2 可分别表示为

$$s_1 = \left(-\zeta + i\sqrt{1 - \zeta^2}\right)\omega_n \tag{19}$$

$$s_2 = \left(-\zeta - i\sqrt{1 - \zeta^2}\right)\omega_n \tag{20}$$

故通解转换为如下形式:

$$x(t) = C_1 e^{(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t} + C_2 e^{(-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t} = e^{-\zeta\omega_n t} \left\{ C_1 e^{i\sqrt{1 - \zeta^2}\omega_n t} + C_2 e^{-i\sqrt{1 - \zeta^2}\omega_n t} \right\} = e^{-\zeta\omega_n t} \left\{ (C_1 + C_2) \cos(\sqrt{1 - \zeta^2}\omega_n t) + \right.$$

$$\left. i(C_1 - C_2) \sin(\sqrt{1 - \zeta^2}\omega_n t) \right\} = e^{-\zeta\omega_n t} \left\{ C_1' \cos(\sqrt{1 - \zeta^2}\omega_n t) + C_2' \sin(\sqrt{1 - \zeta^2}\omega_n t) \right\} = X_0 e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\sqrt{1 - \zeta^2}\omega_n t + \phi_0) = X e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\sqrt{1 - \zeta^2}\omega_n t - \phi) \tag{21}$$

式中 (C_1', C_2') 、 (X, ϕ) 和 (X_0, ϕ_0) 为任意常数,可根据具体的初始条件来确定。

对于初始条件 $x(t=0) = x_0$ 和 $\dot{x}(t=0) = \dot{x}_0$, 可求得 C_1' 与 C_2' 分别为

$$C_1' = x_0 \tag{22}$$

$$C_2' = \frac{\dot{x}_0 + \zeta\omega_n x_0}{\sqrt{1 - \zeta^2}\omega_n} \tag{23}$$

因此,解的具体形式为

$$x(t) = e^{-\zeta\omega_n t} \cdot \left(x_0 \cos(\sqrt{1 - \zeta^2}\omega_n t) + \frac{\dot{x}_0 + \zeta\omega_n x_0}{\sqrt{1 - \zeta^2}\omega_n} \sin(\sqrt{1 - \zeta^2}\omega_n t) \right) \tag{24}$$

常数 (X, ϕ) 和 (X_0, ϕ_0) 可以表示为

$$X = X_0 = \sqrt{C_1'^2 + C_2'^2} = \frac{\sqrt{x_0^2\omega_n^2 + \dot{x}_0^2 + 2x_0\dot{x}_0\zeta\omega_n}}{\sqrt{1 - \zeta^2}\omega_n} \tag{25}$$

$$\phi = \arctan\left(\frac{C_1'}{C_2'}\right) = \arctan\left(\frac{x_0\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}}{x_0 + \zeta\omega_n x_0}\right) \tag{26}$$

$$\phi_0 = \arctan\left(-\frac{C_2'}{C_1'}\right) = \arctan\left(-\frac{x_0 + \zeta\omega_n x_0}{x_0\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}}\right) \tag{27}$$

式(24)所描述的运动是角频率为 $\sqrt{1 - \zeta^2}\omega_n$ 的有阻尼简谐运动。但由于 $e^{-\zeta\omega_n t}$ 项的存在,系统的振幅将随着时间的推移按指数规律逐渐减小,弱阻尼系统的衰减振动如图 9 所示。

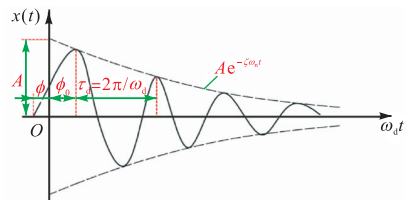


图 9 弱阻尼系统的衰减振动

Fig.9 Attenuation vibration of weak damping system

令阻尼振动的频率

$$\omega_d = \sqrt{1 - \zeta^2}\omega_n \tag{28}$$

可以看出,有阻尼自由振动的频率 ω_d 总小于无

阻尼自由振动的固有频率 ω_n 。由式(28)可知,有阻尼系统自由振动的频率随着阻尼的增大而减小,阻尼振动频率与阻尼的关系如图10所示^[31]。

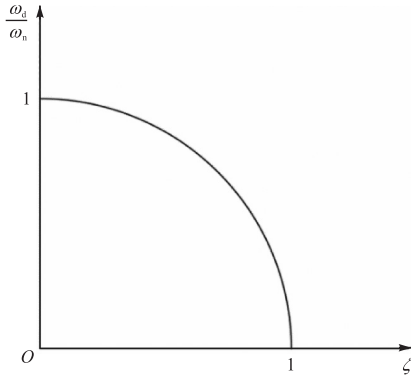


图10 阻尼振动频率与阻尼的关系

Fig.10 Relationship between damping vibration frequency and damping

3.2 振动载荷下岩石力学响应

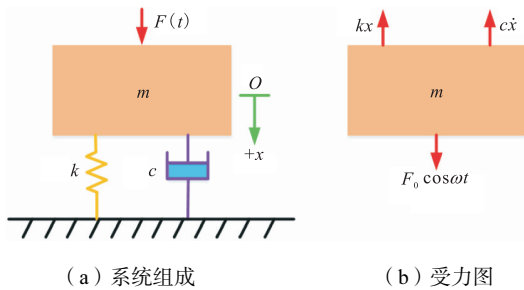
岩石单自由度简谐振动系统如图11所示,假设简谐振动激励力为

$$F_1(t) = F_0 \cos \omega t \quad (29)$$

式中 F_0 为简谐振动力的最大值。

根据图11(b),简谐振动激励方程可表示为

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \cos \omega t \quad (30)$$



(a) 系统组成

(b) 受力图

图11 岩石单自由度简谐振动系统

Fig.11 Single-degree-of-freedom harmonic vibration system of rock

该振动平衡微分方程为二阶常系数线性非齐次微分方程,其解主要由两部分组成:强迫振动基和自由振动基,在受系统阻尼的影响下,自由振动基在经过不断衰减后最终会消失,而剩余的解即为稳定的等幅强迫振动基,即方程的特解。

式(30)的特解也是简谐函数形式,假定为

$$x_p(t) = A \cos(\omega t - \phi) \quad (31)$$

式中 A 与 ϕ 为待定常量,分别表示力学响应的幅值与相位角。

将式(31)代入式(30)中,得

$$A[(k - m\omega^2) \cos(\omega t - \phi) -$$

$$c\omega \sin(\omega t - \phi)] = F_0 \cos \omega t \quad (32)$$

运用下列三角函数关系:

$$\cos(\omega t - \phi) = \cos \omega t \cos \phi + \sin \omega t \sin \phi \quad (33)$$

$$\sin(\omega t - \phi) = \sin \omega t \cos \phi - \cos \omega t \sin \phi \quad (34)$$

在式(32)中再令方程两边 $\cos \omega t$ 和 $\sin \omega t$ 的系数分别相等,则可得

$$A[(k - m\omega^2) \sin \phi - c\omega \cos \phi] = F_0 \quad (35)$$

$$A[(k - m\omega^2) \cos \phi - c\omega \sin \phi] = 0 \quad (36)$$

式(35)与式(36)的解为

$$A = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + c^2 \omega^2}} \quad (37)$$

$$\phi = \arctan \frac{c\omega}{k - m\omega^2} \quad (38)$$

将式(37)和式(38)代入式(31)中,可得到方程(30)的特解为

$$x_p(t) = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + c^2 \omega^2}} \cdot \cos\left(\omega t - \arctan \frac{c\omega}{k - m\omega^2}\right) \quad (39)$$

令简谐振动力的最大值 F_0 作用下的变形:

$$\delta_{st} = \frac{F_0}{k} \quad (40)$$

频率比为

$$r = \frac{\omega}{\omega_n} \quad (41)$$

则得

$$R = \frac{A}{\delta_{st}} = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} \quad (42)$$

$$\phi = \arctan \left[\frac{2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \right] = \arctan \frac{2\zeta r}{1-r^2} \quad (43)$$

式中 R 为振幅放大系数或振幅比,其随频率比 r 与阻尼比 ζ 变化如图12所示,由图12可知,由于岩石的阻尼比范围通常为 $0.003 \sim 0.300$ ^[32],在频率比 r 较小时,振幅具有一定放大作用。

综上,方程(30)的全解为

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) \quad (44)$$

式中 $x_h(t)$ 由式(21)确定。由此可得

$$x(t) = e^{-\zeta \omega_n t} \left(C_1' \cos(\sqrt{1-\zeta^2} \omega_n t) + C_2' \sin(\sqrt{1-\zeta^2} \omega_n t) \right) +$$

$$\frac{F_0}{\sqrt{(k-m\omega^2)^2+c^2\omega^2}} \cos\left(\omega t - \arctan \frac{c\omega}{k-m\omega^2}\right) \quad (45)$$

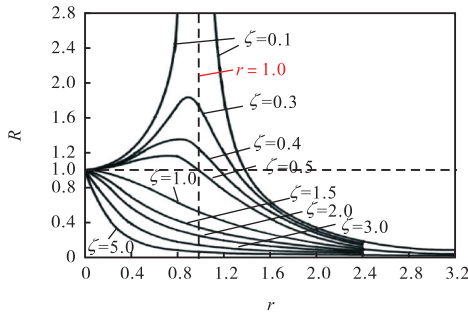


图 12 振幅放大系数随频率比的变化

Fig.12 Relationship between amplitude amplification factor and frequency ratio

对于小阻尼系统, 则

$$x(t) = X_0 e^{-\zeta\omega_n t} \cos(\omega_d t - \phi_0) + A \cos(\omega t - \phi) \quad (46)$$

式中: A 和 ϕ 分别由式 (42) 和式 (43) 确定; X_0 和 ϕ_0 根据初始条件确定.

对初始条件 $x(t=0) = x_0$, $\dot{x}(t=0) = \dot{x}_0$, 由式 (46) 得

$$x_0 = X_0 \cos \phi_0 + A \cos \phi \quad (47)$$

$$\dot{x}_0 = -\zeta\omega_n X_0 \cos \phi_0 + \omega_d X_0 \sin \phi_0 + \omega A \sin \phi \quad (48)$$

由式 (47) 和式 (48) 即可求得 X_0 与 ϕ_0 分别为

$$X_0 = \left[(x_0 - A \cos \phi)^2 + \frac{1}{\omega_d^2} (\zeta\omega_n x_0 + \dot{x}_0 - \zeta\omega_n A \cos \phi - \omega A \sin \phi)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (49)$$

$$\phi_0 = \arctan \left[\frac{\zeta\omega_n x_0 + \dot{x}_0 - \zeta\omega_n A \cos \phi - \omega A \sin \phi}{\omega_d (x_0 - A \cos \phi)} \right] \quad (50)$$

由此可得

$$x(t) = \left[(x_0 - A \cos \phi)^2 + \frac{1}{\omega_d^2} (\zeta\omega_n x_0 + \dot{x}_0 - \zeta\omega_n A \cos \phi - \omega A \sin \phi)^2 \right]^{\frac{1}{2}} e^{-\zeta\omega_n t} \cos \left\{ \omega_d t - \arctan \left[\frac{\zeta\omega_n x_0 + \dot{x}_0 - \zeta\omega_n A \cos \phi - \omega A \sin \phi}{\omega_d (x_0 - A \cos \phi)} \right] \right\} + \frac{\delta_{st}}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} \cos \left(\omega t - \arctan \frac{2\zeta r}{1-r^2} \right) \quad (51)$$

3.3 冲击载荷下岩石力学响应

非周期变化的激振力大小随时间改变, 通常仅在一定固定时长内作用, 达到该时段后便不再施加. 最简单的非周期变化的激振力是冲击力 F , 这种力较

大, 但作用时间 Δt 却很短. 根据动力学理论, 这一冲量的大小能够通过它所引发的系统动量变化来衡量. 如果 \dot{x}_1 和 \dot{x}_2 分别代表质量块 m 在受到冲击前后的速度, 如果用 I 来表示冲量 $F\Delta t$ 的大小, 则可得冲量为

$$I = F\Delta t = m\dot{x}_2 - m\dot{x}_1 \quad (52)$$

则其一般形式为

$$I = \int_t^{t+\Delta t} F dt \quad (53)$$

单位冲量 f 定义为

$$f = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_t^{t+\Delta t} F dt = F dt = 1 \quad (54)$$

可以看出, 要使 $F dt$ 为有限值, F 就应该趋向于无穷大 (因为 dt 是趋于 0 的), 作用在 $t=0$ 时刻的单位冲量也可以用狄拉克函数 $\delta(t)$ 来表示. 在 $t=\tau$ 时刻的狄拉克 δ 函数记作 $\delta(t-\tau)$, 其性质如下:

$$\delta(t-\tau) = 0 \quad (55)$$

当 $t \neq \tau$ 时, 可得

$$\int_0^\infty \delta(t-\tau) dt = 1 \quad (56)$$

$$\int_0^\infty \delta(t-\tau) F(t) dt = F(\tau) \quad (57)$$

式中 $0 < \tau < \infty$.

因此, 在 $t=\tau$ 时刻作用的冲量可以记作

$$F(t) = I\delta(t-\tau) \quad (58)$$

单位冲量 $f=1$ 发生在时间 $t=0$ 时, 同样可用狄拉克 δ 函数表示为

$$f = f\delta(t) = \delta(t) \quad (59)$$

振幅大小为 F 的冲量在 $t=0$ 作用时可定义为

$$F = I\delta(t) \quad (60)$$

具有黏性阻尼的弹簧-质量系统在 $t=0$ 时受到一个单位冲量作用的情况如图 13 所示.

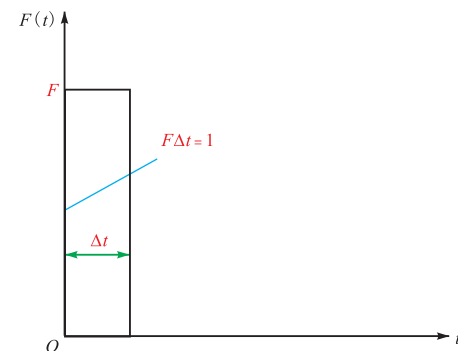


图 13 黏性阻尼的弹簧-质量系统单位冲量

Fig.13 Unit impulse of a spring-mass system with viscous damping

对于欠阻尼系统, 由式 (24) 可得该方程的解为

$$x(t) = e^{-\zeta\omega_n t} \left(x_0 \cos \omega_d t + \frac{\dot{x}_0 + \zeta\omega_n x_0}{\omega_d} \sin \omega_d t \right) \quad (61)$$

如果在施加单位冲量之前质量块处于静止状态，即在 $t < 0$ 或 $t = 0^-$ 时 $x = \dot{x} = 0$ ，由动量定理可得单位冲量为

$$f = m\dot{x}(t=0) - m\dot{x}(t=0^-) = m\dot{x}_0 \quad (62)$$

故初始条件为

$$x(t=0) = x_0 = 0 \quad (63)$$

$$\dot{x}(t=0) = \dot{x}_0 = \frac{1}{m} \quad (64)$$

根据式(63)和式(64)，可将式(61)简化为

$$x(t) = g(t) = \frac{e^{-\zeta\omega_d t}}{m\omega_d} \sin \omega_d t \quad (65)$$

式(65)为单自由度系统受到单位冲量时的响应，称为单位脉冲响应函数，记作 $g(t)$ ，如图 14 所示。

如果冲量的大小从 1 变为 I ，那么初始速度 x_0 就是 I/m ，而系统的响应为

$$x(t) = \frac{Ie^{-\zeta\omega_d t}}{m\omega_d} \sin \omega_d t = Ig(t) \quad (66)$$

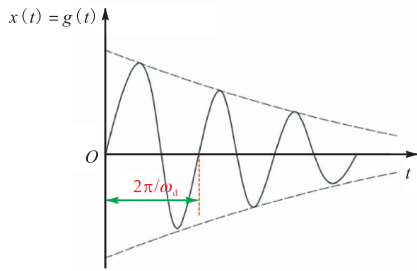


图 14 单自由度系统受到单位冲量时响应

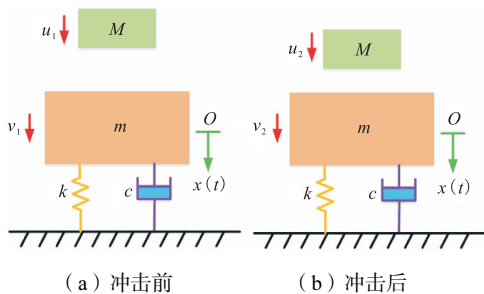
Fig.14 Response of a single-degree-of-freedom system under unit impulse

岩石单自由度冲击系统如图 15 所示，冲击质量块 m 是由弹性元件和黏性元件构成的黏性阻尼单自由度系统。假设质量为 M 的物块、质量为 m 的岩石块冲击前的速度分别为 u_1 、 v_1 ，冲击后的速度分别为 u_2 、 v_2 ，根据动量守恒定律，得到

$$Mu_1 + mv_1 = Mu_2 + mv_2 \quad (67)$$

或

$$M(u_1 - u_2) = -m(v_1 - v_2) \quad (68)$$



(a) 冲击前

(b) 冲击后

图 15 岩石单自由度冲击系统

Fig.15 Single-degree-of-freedom impact system of rock

根据能量守恒定律，得到

$$\frac{1}{2}Mu_1^2 + \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}Mu_2^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 \quad (69)$$

或

$$\frac{1}{2}M(u_2^2 - u_1^2) = -\frac{1}{2}m(v_1^2 - v_2^2) \quad (70)$$

式(70)可以改写为

$$\frac{1}{2}M(u_1 + u_2)(u_1 - u_2) = -\frac{1}{2}m(v_1 + v_2)(v_1 - v_2) \quad (71)$$

将式(68)代入式(71)得到

$$u_1 - v_1 = -(u_2 - v_2) \quad (72)$$

由于在碰撞之前物块 M 与物块 m 的速度分别为 u_1 和 $v_1 = 0$ ，由式(68)和(72)可以得到碰撞发生后的瞬间速度为

$$M(u_1 - u_2) = -m(0 - v_2) = mv_2 \quad (73)$$

$$v_2 = \frac{Mu_1}{m} - \frac{Mu_2}{m} \quad (74)$$

以及

$$u_1 - 0 = v_1 = -(u_2 - v_2) = v_2 - u_2 \quad (75)$$

式(74)和式(75)的解为

$$u_2 = \frac{M - m}{M + m}u_1 \quad (76)$$

$$v_2 = \frac{2M}{M + m}u_1 \quad (77)$$

质量块 M 的动量改变由下式确定：

$$M(u_2 - u_1) = M\left(\frac{M - m}{M + m} - 1\right)u_1 = -\left(\frac{2Mm}{M + m}\right)u_1 \quad (78)$$

在碰撞时，施加在质量 M 上的冲量为

$$\int_0^t f(\tau) d\tau = -\left(\frac{2Mm}{M + m}\right)u_1 \quad (79)$$

根据牛顿第三定律，施加在质量块 m 的脉冲与施加在质量块 M 上的脉冲大小相等，但方向相反。在此冲量作用下质量块 m 的运动微分方程可表示为

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = \int_0^t f(\tau) d\tau = \frac{2Mm}{M + m}u_1\delta(t) \quad (80)$$

根据质量块 m 的初始条件 $x(t=0) = x_0 = 0$ ， $\dot{x}(t=0) = \dot{x}_0 = 0$ ，并根据式(66)，则得到式(80)的解为

$$x(t) = \frac{Fe^{-\zeta\omega_d t}}{m\omega_d} \sin \omega_d t = \frac{2Mm}{M + m} \frac{u_1}{m\omega_d} e^{-\zeta\omega_d t} \sin \omega_d t \quad (81)$$

3.4 振动冲击复合载荷下岩石力学响应

振动冲击复合加载作用下岩石力学模型如图 16 所示。

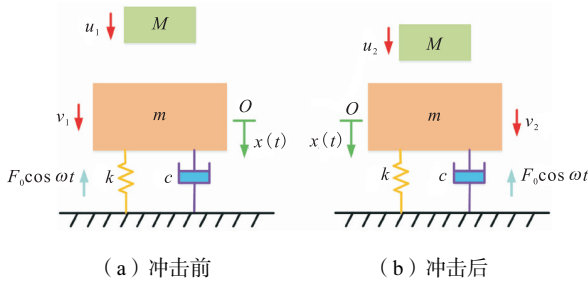


图 16 振动冲击复合载荷下岩石力学模型

Fig.16 Rock mechanics model under vibration-impact composite loading

该力学模型是由简谐振动力、冲击力和岩石共同组成的一个系统,其受到的作用力主要包括冲击力 $F_i(t)$ 与振动力 $F_v(t)$, 其具体计算公式为

$$F_i(t) = Mu_2 - Mu_1 = \int_0^t f(t) dt \quad (82)$$

$$F_v(t) = F_0 \cos \omega t \quad (83)$$

式中 $f(t)$ 为在微小时间段 $0 \sim t$ 内施加的激励,积分表示冲量(等于力-时间曲线下方的面积)。

根据牛顿第二定律,得到复合加载作用下岩石的微分方程,其具体表达式为

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_i(t) - F_v(t) \quad (84)$$

根据力学的合成与分解原理,式(84)可分解为冲击、振动两种方式,计算公式分别为

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_i(t) \quad (85)$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = -F_v(t) \quad (86)$$

根据式(51)和式(81),得到复合加载作用下岩石力学响应为

$$x(t) = \frac{2Mm}{M+m} \frac{u_1}{m\omega_d} e^{-\zeta\omega_d t} \sin \omega_d t - \left[(x_0 - A \cos \phi)^2 + \frac{1}{\omega_d^2} (\zeta\omega_n x_0 + \dot{x}_0 - \zeta\omega_n A \cos \phi - \omega A \sin \phi)^2 \right]^{\frac{1}{2}} e^{-\zeta\omega_d t} \cdot \cos \left\{ \omega_d t - \arctan \left[\frac{\zeta\omega_n x_0 + \dot{x}_0 - \zeta\omega_n A \cos \phi - \omega A \sin \phi}{\omega_d (x_0 - A \cos \phi)} \right] \right\} - \frac{\delta_{st}}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} \cos \left(\omega t - \arctan \frac{2\zeta r}{1-r^2} \right) \quad (87)$$

4 非线性载荷下岩石能量消耗

在岩石简谐振动系统中,能量的消耗主要来自于弹簧与阻尼,在岩石单自由度振动系统中(图 7),全部运动阻力(F_r)表示为

$$F_r = kx + cv = kx + c\dot{x} \quad (88)$$

假设运动方程为

$$x(t) = A \sin \omega_d t \quad (89)$$

式(88)可化为

$$F_r = kA \sin \omega_d t + c\omega_d A \cos \omega_d t \quad (90)$$

振动过程消耗的能量:

$$\Delta W = \int_0^t F_r v dt = \int_0^t kA^2 \sin \omega_d t \cos \omega_d t d \omega_d t + \int_0^t c\omega_d A^2 \cos^2 \omega_d t d \omega_d t \quad (91)$$

假设在一个周期 $t = 2\pi/\omega_d$ 内,得到

$$\Delta W = \int_0^{2\pi/\omega_d} F_r v dt = \int_0^{2\pi/\omega_d} kA^2 \sin \omega_d t \cos \omega_d t d \omega_d t + \int_0^{2\pi/\omega_d} c\omega_d A^2 \cos^2 \omega_d t d \omega_d t = c\pi\omega_d A^2 \quad (92)$$

由式(92)可知,弹簧的恢复力在一个周期或任意整数周期内实际做功为零,岩石消耗的能量与振幅 A 的平方成正比、与阻尼振动的频率 ω_d 、阻尼 c 成正比,同时当阻尼 c 和振幅 A 一定时,能量的消耗也并非常数,因为它是 ω_d 的函数,并且 ω_d 越大,能量消耗越大。

一个系统的总能量 W 可以用最大势能 E_1 或最大动能 E_2 表示,即

$$E_1 = \frac{1}{2} kA^2 \quad (93)$$

$$E_2 = \frac{1}{2} m v_{\max}^2 = \frac{1}{2} mA^2 \omega_d^2 \quad (94)$$

式中 v_{\max} 为简谐振动过程中的最大速度。

对于岩石等小阻尼而言,最大势能 E_1 或最大动能 E_2 近似相等. 因此,每个运动周期中岩石消耗的能量占整个振动系统总能量的比值 Y 为常数,具体计算式为

$$Y = \frac{\Delta W}{W} = \frac{c\pi\omega_d A^2}{\frac{1}{2} m \omega_d A^2} 2 \left(\frac{2\pi}{\omega_d} \right) \left(\frac{c}{2m} \right) = 2\delta \approx 4\pi\xi \quad (95)$$

式中对数缩减率 δ 用来表示有阻尼自由振动衰减的快慢. 它定义为任意两个相邻的振幅之比的自然对数.

$$\delta = \ln \frac{x_1}{x_2} = \xi\omega_n \tau_d = \xi\omega_n \frac{2\pi}{\sqrt{1-\xi^2}\omega_n} = \frac{2\pi}{\omega_d} \frac{c}{2m} \quad (96)$$

$$\xi = \frac{\delta}{\sqrt{(2\pi)^2 + \delta^2}} \approx \frac{\delta}{2\pi} \quad (97)$$

同时,在振动过程,在水平方向,由于压力的存在,还会存在一定的摩擦力 $F_f = \mu F_v$, 其在振动过程

中也消耗一定的能量,具体计算式为

$$W_f = \int_0^l \mu F_N \Delta l dl \tag{98}$$

式中: μ 为摩擦系数; Δl 岩石颗粒之间的位移.

综上可得,岩石在振动加载时,激振频率、振幅越大,岩石阻尼消耗能量越大,但振幅对能量消耗的影响更大,同时激振力越大,用于岩石颗粒间摩擦的能量消耗越大,越能加剧岩石断裂过程中裂纹的扩展.

5 试验验证

5.1 试验材料及方案

为验证上述理论研究结果,采用颗粒流模拟,以青砂岩为研究对象,该岩石主要由石英、长石和云母

等矿物质砂粒黏结而成,含有硅、钙、黏土和氧化铁等成分.此外,青砂岩是一种常见的准脆性材料,在国内外岩石破碎研究中具有代表性,且该岩样的均质性较好(图 17),适合用于相关试验研究,主要参数测试结果见表 1^[3].



图 17 青砂岩断面结构^[33]

Fig.17 Cross-section structure of green sandstone^[33]

表 1 青砂岩试件主要参数测试结果

Tab.1 Test results of the primary parameters of green sandstone specimens

平均密度/(kg/m ³)	抗压强度/MPa	弹性模量/GPa	泊松比	内摩擦角/(°)	摩擦系数
2 294.216	64.772	13.536	0.352	37.700	0.772 6

在颗粒流模拟试验中,青砂岩尺寸设置为 $\phi 50 \text{ mm} \times 100 \text{ mm}$,其细观参数采用文献[3]中的标定

数据(表 2),应力-应变曲线与破裂特征如图 18 所示,该细观参数的选择具有一定的合理性.

表 2 青砂岩颗粒流模拟的主要细观力学参数

Tab.2 Main microscopic mechanical parameters of particle flow simulation in green sandstone

有效模量/GPa	刚度比	黏结有效模量/GPa	黏结刚度比	法向黏结强度/MPa	切向黏结强度/MPa	内摩擦角/(°)	摩擦系数
7.580	3.600	7.580	3.600	30.200	19.084	37.700	0.300

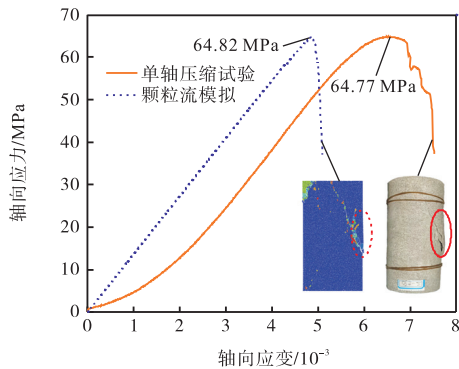


图 18 青砂岩应力-应变曲线与破裂特征^[3]

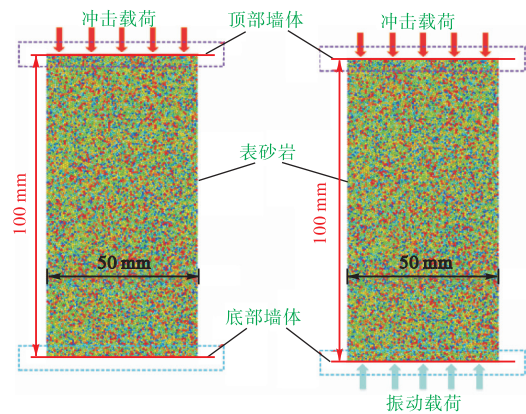
Fig.18 Stress-strain curves and fracture characteristics of green sandstone^[3]

为了研究振动载荷对岩石破裂的影响,模拟方案主要分为以下两种加载方式(图 19).

(1) 冲击加载:以分别为 10、15、20 m/s 的接触瞬时速度冲击青砂岩试块,加载时间为 0.1 ms.

(2) 振动冲击复合加载:以分别为 10、15、20 m/s 的接触瞬时速度冲击青砂岩试块,同时试块进行振动加载,振幅分别为 0.5、1.0、1.5、2.0、2.5 mm,每个振幅分别设置振动频率为 5、10、15、20、25 Hz,加载时

间为 0.1 ms.



(a) 冲击加载 (b) 振动冲击复合加载

图 19 青砂岩模型边界条件及载荷施加示意^[3]

Fig.19 Schematic of the boundary conditions and loading application modes of green sandstone^[3]

5.2 试验结果分析

在岩石破碎过程中,裂纹长度也是衡量破岩效果的一个重要指标.振动冲击复合载荷下,当瞬时冲击速度为 10、15、20 m/s,振动频率为 5、10、15、20、25 Hz,振幅为 0.5、1.0、1.5、2.0、2.5 mm 时,青砂岩裂纹长度统计如图 20 所示.由图 20 可得如下结论.

(1) 随着瞬时冲击速度的增加,青砂岩的裂纹长度增幅显著. 比如:在振动频率为 25 Hz、振幅为 2.5 mm 时,瞬时冲击速度为 10 m/s 时,青砂岩的裂纹长度为 435.618 mm,在瞬时冲击速度分别为 15、20 m/s 时,裂纹长度分别为 3 005.270 mm、5 612.990 mm,增幅分别达到了 6.899 倍、12.885 倍.

(2) 在相同的瞬时冲击速度、振幅下,改变振动频率,青砂岩裂纹长度也呈现出增大的趋势,但增大幅度较小. 比如:在瞬时冲击速度为 20 m/s、振幅为 2.5 mm 时,振动频率为 5 Hz 时,青砂岩的裂纹长度为 5 360.170 mm,在振动频率分别为 10、15、20、

25 Hz 时裂纹长度分别为 5 413.020、5 446.790、5 524.090、5 612.990 mm,增幅分别达到了 10.010 倍、1.017 倍、1.031 倍、1.047 倍.

(3) 在相同的瞬时冲击速度、相同频率下,改变振幅,青砂岩的裂纹长度也呈现出增大的趋势,但增大幅度较小. 比如:在瞬时冲击速度为 20 m/s、振动频率为 25 Hz 时,振幅为 0.5 mm 时青砂岩的裂纹长度为 5 360.170 mm,在振幅分别为 1.0、1.5、2.0、2.5 mm 时,裂纹长度分别为 5 412.080、5 446.100、5 527.330、5 642.990 mm,增幅分别达到了 1.010 倍、1.016 倍、1.031 倍、1.053 倍.

采用颗粒流模拟,得到瞬时冲击速度为 10、15、20 m/s 时的冲击、振动冲击复合载荷下的最大裂纹长度,如图 21 所示. 由图 21 可知:与冲击载荷相比,振动冲击复合载荷有利于增加青砂岩裂纹长度,但随着瞬时冲击速度的增加,裂纹长度增加的幅度逐渐变小.

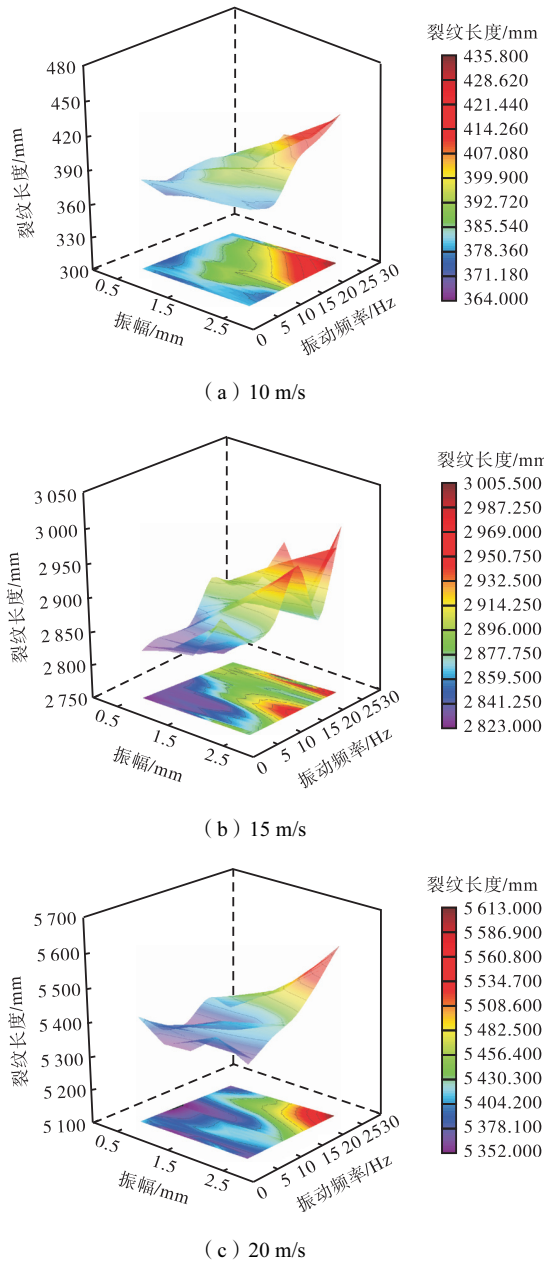


图 20 振动冲击复合载荷下青砂岩裂纹长度

Fig.20 Crack length of green sandstone under vibration-impact composite loading

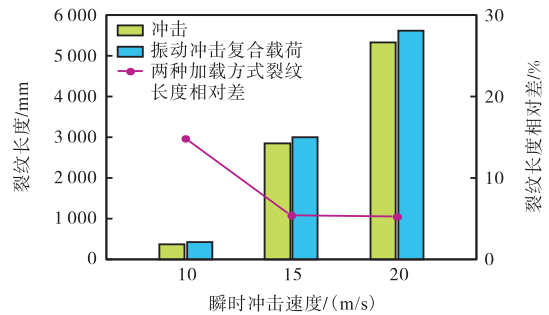


图 21 冲击与振动冲击复合载荷下青砂岩裂纹对比

Fig.21 Comparison of cracks in green sandstone under impact and vibration-impact composite loading

综上可知,瞬时冲击速度对青砂岩的裂纹长度增幅比较明显,增加振动频率、振幅也会增加青砂岩的裂纹长度,但随着瞬时冲击速度的增加,增加的幅度逐渐变小,相对而言,振幅对青砂岩裂纹长度的增幅相对较大,从而验证了理论分析的正确性.

6 结 论

采用 Kelvin-Voigt 模型,对岩石进行力学建模,分析了自由振动、简谐振动、冲击载荷下岩石力学响应,建立了振动冲击复合载荷下岩石的力学响应方程,进一步探讨了岩石的能量消耗规律. 最后,采用准脆性材料青砂岩,通过颗粒流模拟验证了理论研究结果. 得出以下主要结论.

(1) 通过对各种常见的弹性模型、塑性模型、黏弹性模型及黏弹塑性模型等岩石力学模型的分析,最终选择弹性元件和黏性元件并联形式的 Kelvin-Voigt

模型,进行岩石的力学建模分析。

(2)建立了岩石在自由振动、简谐振动、冲击载荷以及振动冲击复合加载下的力学响应方程,得到在外部加载过程中振幅对岩石内部颗粒扰动具有放大作用。

(3)在振动载荷下,能量吸收量与振幅的平方成正比,与激振频率、阻尼成正比,且每个运动周期中吸收的能量与整个简谐振动系统总能量之比为常数。同时,激振力越大,用于摩擦的能量消耗越大。因此,振动激励有利于岩石能量的吸收,对岩石断裂具有一定的促进作用。

参考文献:

- [1] 赵环帅,潘永泰,余超,等. 超声振动作用下青砂岩细观损伤演化规律及断裂能利用效率研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2024, 43(7): 1646-1661.
Zhao Huanshuai, Pan Yongtai, Yu Chao, et al. Study on the evolution law of micro damage and utilization efficiency of fracture energy in green sandstone under the action of ultrasonic vibration[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2024, 43(7): 1646-1661 (in Chinese).
- [2] Ruan R Y, Gao L. Computer information technology-based green excavation of tunnels in complex strata and technical decision of deformation control[J]. Open Geosciences, 2023, 15(1): 20220533.
- [3] 赵环帅,潘永泰,余超,等. 振动载荷对青砂岩冲击裂纹扩展及能量利用效率的影响[J]. 清华大学学报(自然科学版), 2024, 64(12): 2155-2165.
Zhao Huanshuai, Pan Yongtai, Yu Chao, et al. Influence of vibration loading on impact crack propagation and energy utilization efficiency in green sandstone[J]. Journal of Tsinghua University(Science and Technology), 2024, 64(12): 2155-2165 (in Chinese).
- [4] 李杨杨,侯嘉琦,张士川,等. 不同倾角穿层裂隙组合岩石力学性能及破坏特征研究[J]. 山东科技大学学报(自然科学版), 2025, 44(1): 18-27, 40.
Li Yangyang, Hou Jiaqi, Zhang Shichuan, et al. Study on mechanical properties and failure characteristics of cross-layer fracture composite rock with different dip angles[J]. Journal of Shandong University of Science and Technology(Natural Sciences), 2025, 44(1): 18-27, 40 (in Chinese).
- [5] 陈岩,王嘉豪,邓良涛,等. 不同加载速率对煤岩组合体巴西劈裂特性的影响[J]. 河南理工大学学报(自然科学版), 2025, 44(1): 29-36.
Chen Yan, Wang Jiahao, Deng Liangtao, et al. Effects of varying loading rates on the Brazilian splitting characteristics of coal-rock composites[J]. Journal of Henan Polytechnic University(Natural Science), 2025, 44(1): 29-36 (in Chinese).
- [6] 赵环帅,潘永泰,曹行健,等. 非线性载荷作用下岩石高效破碎的研究进展[J]. 北京大学学报(自然科学版), 2026, 62(1): 198-208.
Zhao Huanshuai, Pan Yongtai, Cao Xingjian, et al. Research progress on the efficient crushing of rock under nonlinear loads[J]. Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Pekinensis, 2026, 62(1): 198-208 (in Chinese).
- [7] 孔凯,尹大伟,张虎,等. 岩-煤组合体试样变形场与能量演化特征试验研究[J]. 山东科技大学学报(自然科学版), 2022, 41(5): 30-39.
Kong Kai, Yin Dawei, Zhang Hu, et al. Experimental study on deformation field and energy evolution characteristics of rock-coal composite samples[J]. Journal of Shandong University of Science and Technology(Natural Sciences), 2022, 41(5): 30-39 (in Chinese).
- [8] 于建新,刘文金,张馨,等. 初始地应力影响下水平层状岩体隧道支护结构的爆破振动响应特征[J]. 河南理工大学学报(自然科学版), 2025, 44(5): 100-110.
Yu Jianxin, Liu Wenjin, Zhang Xin, et al. Blasting vibration response characteristics of tunnel lining structure in horizontal layered rock mass under the influence of initial in-situ stress[J]. Journal of Henan Polytechnic University(Natural Science), 2025, 44(5): 100-110 (in Chinese).
- [9] 李思琪. 谐振激励下钻头的冲击破岩机理研究[D]. 大庆: 东北石油大学, 2016.
Li Siqi. Research on Rock Breaking Mechanism of Drill Bit Under Harmonic Vibration Excitation[D]. Daqing: Northeast Petroleum University, 2016 (in Chinese).
- [10] Trcala M, Suchomelová P, Božanský M, et al. The generalized Kelvin chain-based model for an orthotropic viscoelastic material[J]. Mechanics of Time-Dependent Materials, 2024, 28(3): 1639-1659.
- [11] Chen X Y, Xiao X H, Bai X X, et al. Dimensional pounding response analysis for adjacent inelastic MDOF structures based on modified Kelvin model[J]. Structural Engineering and Mechanics, 2021, 79(3): 347-358.
- [12] Hussain M, Naem M N, Tounsi A. Numerical study for nonlocal vibration of orthotropic SWCNTs based on Kelvin's model[J]. Advances in Concrete Construc-

- tion, 2020, 9(3): 301-312.
- [13] Kundu S, Pani A K. Stabilization of Kelvin-Voigt viscoelastic fluid flow model[J]. *Applicable Analysis*, 2019, 98(12): 2284-2307.
- [14] Wang J P, Yan S J, Wen H, et al. Time-varying viscosity fractal derivative model for ultraslow creep of concrete[J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 2025, 316: 110868.
- [15] Eva I Y A, Rannu K A, Slepov P S. Einstein-dilatation-four-Maxwell holographic anisotropic models[J]. *Theoretical and Mathematical Physics*, 2025, 222(1): 140-153.
- [16] Kryvko A, Gutiérrez-Torres C D C, Jiménez-Bernal J A, et al. Fractal continuum Maxwell creep model[J]. *Axioms*, 2025, 14(1): 33.
- [17] Hansen J S. Modified and generalized single-element Maxwell viscoelastic model[J]. *Physical Review E*, 2024, 110(2): L023101.
- [18] Moatimid G M, Mohamed Y M. Novel analytical perspectives on nonlinear instabilities of viscoelastic Bingham fluids in MHD flow fields[J]. *Scientific Reports*, 2024, 14(1): 28843.
- [19] Zhao Y, Chen X, Miao J, et al. Sensitivity analysis of magnetorheological damper parameters based on the Bingham model[J]. *International Journal of Dynamics and Control*, 2024, 12(8): 2717-2731.
- [20] Zou L C, Tang M, Li B. Bingham and Herschel-Bulkley fluids flow regimes in rough-walled rock fractures[J]. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 2024, 180: 105832.
- [21] Guo X Y, Wan J, Chu X H. A viscoplastic Cosserat peridynamics and the simulation of creep failure of geomaterials[J]. *Computers and Geotechnics*, 2025, 177: 106831.
- [22] Rahmani K, Bakhtiari H, Malekmohammadi H, et al. Determining the Drucker-Prager Cap model constants using experimental, numerical and optimization for compacted Mg powders at different strain rates[J]. *Physica Scripta*, 2024, 99(6): 065968.
- [23] Zhang T, Zhou X P. Ordinary state-based peridynamic plastic model with Drucker-Prager criterion considering geometric nonlinearity[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2023, 118: 212-235.
- [24] Zhang T, Zhou X P, Qian Q H. Drucker-Prager plasticity model in the framework of OSB-PD theory with shear deformation[J]. *Engineering with Computers*, 2021, 39(2): 1-20.
- [25] Kumar V. Nonlinear waves and modulation instability in the generalized Burger-BBM equation[J]. *Nonlinear Science*, 2025, 2: 100013.
- [26] Kachalov V I, Maslov D A. Small parameter method in the theory of Burgers-type equations[J]. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2025, 64(12): 2886-2892.
- [27] Li Y B, Hu X L, Zhang H Y, et al. Nonlinear burgers model for sliding zone soil subjected to cyclic seepage pressure and its applications to the deformation analysis of landslide[J]. *Acta Geotechnica*, 2025, 20(2): 743-763.
- [28] Wang C, Anupam K, Kasbergen C, et al. Frequency range optimization for linear viscoelastic characterization of Burger's model[J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2025, 285: 109817.
- [29] Austin A. *Fundamental Characterization of Unbound Base Course Materials Under Cyclic Loading*[D]. Baton Rouge: Louisiana State University, 2009.
- [30] 肖建清, 冯夏庭, 丁德馨, 等. 常幅循环荷载作用下岩石的滞后及阻尼效应研究[J]. *岩石力学与工程学报*, 2010, 29(8): 1677-1683.
Xiao Jianqing, Feng Xiating, Ding Dexin, et al. Study on hysteresis and damping effects of rock subjected to constant amplitude cyclic loading[J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2010, 29(8): 1677-1683 (in Chinese).
- [31] Rao S S. *机械振动*[M]. 5 版. 李欣业, 杨理诚, 译. 北京: 清华大学出版社, 2016.
Rao S S. *Mechanical Vibrations*[M]. 5th ed. Li Xinye, Yang Licheng, Trans. Beijing: Tsinghua University Press, 2016 (in Chinese).
- [32] Ahmed S B, Hunt R J, Manrod W E. *Y-12 Site-Specific Earthquake Response Analysis and Soil Liquefaction Assessment*[R]. Oak Ridge: Lockheed Martin Energy Systems, Inc., 1995.
- [33] 赵环帅, 潘永泰, 唐建华, 等. 振动载荷对岩石冲击破裂特征与粒度分布影响的试验研究[J]. *天津大学学报(自然科学与工程技术版)*, 2026, 59(4): 398-407.
Zhao Huanshuai, Pan Yongtai, Tang Jianhua, et al. Experimental study on the influence of vibration loading on rock impact fracture characteristics and particle size distribution[J]. *Journal of Tianjin University (Science and Technology)*, 2026, 59(4): 398-407 (in Chinese).

(责任编辑: 田 军)