

DOI:10.11784/tdxbz202301015

## 基于改进三角函数加减速的一步拐角过渡法

王太勇, 贾松辉, 陈木正  
(天津大学机械工程学院, 天津 300350)

**摘要:** 加减速控制是数控系统的关键技术之一, 影响着零件加工时的高效性和平稳性, 同时由于传统数控系统在加工复杂的曲线曲面时, 需要生成的大量连续微线段, 这不仅增加了数控系统的负担, 且在拐角处仅 G0 连续, 导致在拐角处频繁加减速和机床振动, 降低零件加工效率和加工质量. 两步法拐角过渡是先进行轨迹光顺再进行速度规划, 不仅步骤繁琐, 而且降低了加工效率. 因此, 针对传统三角函数中最大加加速度只存在峰值导致加工效率降低的问题, 本文先对加减速连续性较好的传统三角函数加减速控制算法进行改进, 以  $\sin^2x$  作为加加速度的基函数建立加减速规划的模型, 并在其运动模型中增加匀加加速度加减速阶段. 针对数控加工中连续微线段拐角处加工效率低、插补轨迹连续性低的问题, 提出了新的一步法拐角过渡方法. 该方法是通过一步法拐角过渡算法在速度规划阶段直接完成轨迹光顺. 最后根据轮廓误差和机床各轴动态性能的限制对过渡时间、速度、加速度及加加速度进行约束. 实验证明, 提出的方法能够进一步提高加工中的加减速柔性, 能够利用最大加加速度持续加减速, 且在保证加工效率的基础上提高伺服控制的跟随精度, 使得误差检测的精度能够满足要求.

**关键词:** 拐角过渡; 三角函数加减速; 柔性加减速; 数控系统

中图分类号: TH166

文献标志码: A

文章编号: 0493-2137(2024)10-1001-09

## A One-Step Corner Transition Method Based on Improved Trigonometric Acceleration and Deceleration

Wang Taiyong, Jia Songhui, Chen Muzheng  
(School of Mechanical Engineering, Tianjin University, Tianjin 300350, China)

**Abstract:** Acceleration and deceleration control is a key technology in numerical control systems, which affects the efficiency and stability of the processing parts. Concurrently, because the traditional numerical control system must generate numerous continuous micro line segments when machining complex curves and surfaces, it increases the burden on the numerical control system, and the position is G0 continuous, resulting in frequent acceleration and deceleration and machine vibration at the corner, thus reducing the efficiency and quality of the processing parts. The two-step corner transition involves smoothing the track first and planning the speed later, which is not only complicated, but also reduces the processing efficiency. Therefore, given the problem that the maximum jerk in the traditional trigonometric function only has the peak value reducing machining efficiency, this study improves the acceleration and deceleration control algorithm of the traditional trigonometric function with optimal continuity of acceleration and deceleration, establishes the acceleration and deceleration planning model with  $\sin^2x$  as the basic function of jerk, and incorporates the acceleration and deceleration phases of uniform jerk into its motion model. A new one-step corner transition method is proposed to solve the problems of low efficiency and continuity of interpolation trajectory in numerical control machining. In this method, the one-step corner transition algorithm is used to directly achieve trajectory smoothing in the velocity planning stage. Finally, the transition time, feedrate, acceleration and jerk are

收稿日期: 2023-01-10; 修回日期: 2023-03-27.

作者简介: 王太勇(1962—), 男, 博士, 教授, tywang@139.com.

通信作者: 贾松辉, jsh19970323@tju.edu.cn.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(51975407); 国家重点研发计划资助项目(2022YFB3303601).

Supported by the National Natural Science Foundation of China(No. 51975407), the National Key Research and Development Program of China(No. 2022YFB3303601).

constrained according to the contour error and the dynamic performance of each axis. Experimental results show that the proposed method can further improve the acceleration and deceleration flexibility in machining. Besides, it can use the maximum jerk for acceleration and deceleration continuously, and improve the accuracy of servo control to ensure machining efficiency, so that the accuracy of error detection meets the requirements.

**Keywords:** corner transition; trigonometric acceleration and deceleration; flexible acceleration and deceleration; numerical control system

在数控系统加工复杂曲线时,传统的生成刀具轨迹方法是通过 CAM 系统生成 G01 代码,将零件轮廓表示为连续的微小线段,再将其输入到数控系统中进行连续直线段插补.由于连续微线段在拐角处仅 G0 连续,加工时速度和加速度会在拐角处发生方向上的突变,为保证速度连续性,传统的数控加工会在拐角处减速到 0 然后再进行加速,但如此频繁的加减速易出现速度和加速度的波动,影响加工效率和加工质量.对此,对每个微小线段进行柔性加减速规划并利用拐角过渡算法能够有效解决这一问题.

常见的柔性加减速包括 S 型加减速和三角函数加减速算法.李明等<sup>[1]</sup>提出了基于三角函数加减速的多项式加减速控制算法,通过拟合三角函数,在保证加工柔性的同时,降低了计算的复杂程度.王太勇等<sup>[2]</sup>提出了一种基于曲率特性与 7 段式 S 型加减速的阿基米德螺线速度规划.S 型加减速能够充分利用各轴的最大加加速度,加工效率高,但是加加速度会发生突变,易引起柔性冲击与振动并使跟随误差增大<sup>[3]</sup>.李志杰等<sup>[4]</sup>提出了 7 段式的正弦函数加减速控制算法,实现了加加速度连续.潘海鸿等<sup>[5]</sup>又提出了能够实现加加速度连续的三角函数加减速控制算法,进一步提高了数控加工的柔性.Huang 等<sup>[6]</sup>将三角函数加减速参数进行优化,对加加速度系数进行调整,增大加速时间,提高加工效率.上述提出的三角函数加减速控制方法虽然能保证加加速度连续,但加加速度最大值只能出现在峰值点,缺少恒定的加加速度阶段,不能充分利用各轴的运动性能,限制了机床的加工效率.

拐角过渡算法可以分为两步法和一步法,其中两步法要先构造样条曲线,实现加工路径的光顺后进行速度规划,但样条曲线计算复杂且无法精确计算长度,导致加工过程中易产生速度波动,影响加工精度.而一步法是在拐角处对速度规划算法进行调整,将相邻线段速度、加速度平滑衔接,避免了样条曲线的构造.Li 等<sup>[7]</sup>提出了基于深度学习的拐角平滑方法,通过对神经网络进行训练,直接进行速度规划和轨迹光顺.Tajima 等<sup>[8]</sup>提出的基于加加速度受限的拐角平滑方法直接对拐角处的各轴速度曲线进行计算

优化,实现在拐角误差约束下的速度连续的拐角过渡.Wang 等<sup>[9]</sup>提出了一种加加速度限制的非对称的拐角平滑方法,通过几何误差和机床运动性能得到接近时间最优的过渡参数,实现一步过渡.Zhang 等<sup>[10-11]</sup>提出基于五轴加工的前后相邻段速度混合的拐角过渡方法.上述方法大多都是生成对称的过渡曲线,缺少对各轴运动性能的综合考虑,限制了一步过渡法的应用.

本文在总结以上方法优缺点的基础上,对传统的三角函数加减速进行改进,增加匀加加速度的加减速阶段,重新推导改进加减速方法中各参数的函数,延长了最大加加速度持续时间,提高加减速效率和单线段的加工效率;在此基础上利用一步法拐角过渡算法,对过渡阶段的加工轨迹和速度重新规划,进一步提高拐角处加工效率,并实现轮廓误差以及各轴动态性能的有效控制.

### 1 三角函数加减速控制算法

#### 1.1 传统的三角函数加减速控制算法

传统三角函数加减速将加工过程分为 7 段,如图 1 所示,根据加速度状态可分为:加加速、匀加速、减加速、匀速、加减速、匀减速和减减速.因为三角函数无限可导,将加加速度曲线以  $\sin x$  作为基函数,通过

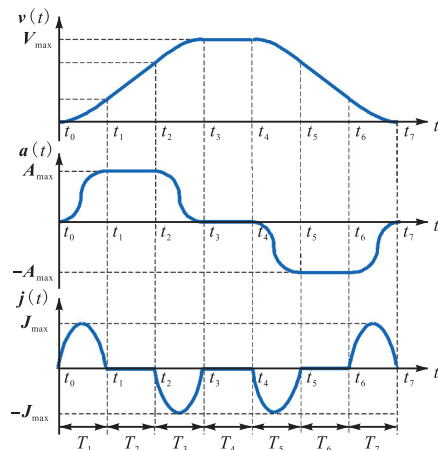


图 1 传统的三角函数加减速

Fig.1 Traditional trigonometric acceleration and deceleration

积分求得连续加速度和速度曲线,实现机床加工运动的柔性.

但该方法的加加速度最大值只作用在峰值点上,在需要较大的加速度进行加工时,只能依靠增大  $T_1$  阶段时间来提高加速度,不能充分利用最大加加速度进行加减速,导致加减速效率的不足.

### 1.2 改进的三角函数加减速控制算法

如图 2 所示,改进的三角函数加减速控制算法将每个短线段加工过程分成 15 段,每个阶段的持续时间为  $T_i(i=1,2,\dots,15)$ . 其中:  $J_{\max}$  为加工中的最大加加速度;  $A_{\max}$  为最大加速度;  $V_{\max}$  为最大速度. 相

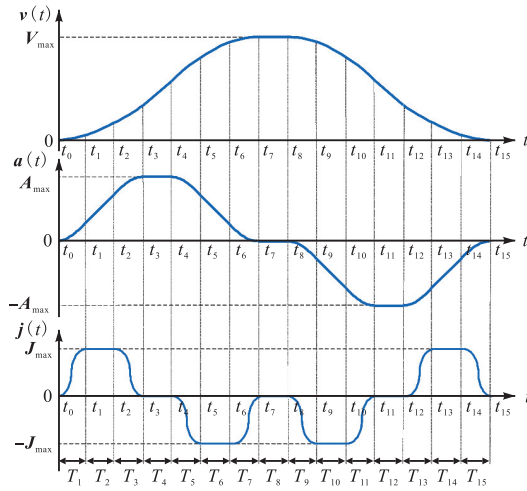


图 2 改进三角函数加减速

Fig.2 Improved trigonometric acceleration and deceleration

较于传统的三角函数加减速,新增加的匀加加速度阶段为  $T_2, T_6, T_{10}, T_{14}$ .  $T_1 \sim T_7$  为加速阶段,  $T_8$  为匀速阶段,  $T_9 \sim T_{15}$  为减速阶段,由于加速阶段与减速阶段对称,这里只以加速阶段和匀速阶段为例分析.

为保证加加速度是用  $\sin x$  表示的连续分段函数,以  $\sin^2 x$  作为加加速度的基函数,得到加加速度的运动函数,即

$$j(t) = \begin{cases} J_{\max} \sin^2\left(\frac{\tau_1}{T_1} \cdot \frac{\pi}{2}\right) & t_0 < t \leq t_1 \\ J_{\max} & t_1 < t \leq t_2 \\ J_{\max} \cos^2\left(\frac{\tau_3}{T_3} \cdot \frac{\pi}{2}\right) & t_2 < t \leq t_3 \\ 0 & t_3 < t \leq t_4 \\ -J_{\max} \sin^2\left(\frac{\tau_5}{T_5} \cdot \frac{\pi}{2}\right) & t_4 < t \leq t_5 \\ -J_{\max} & t_5 < t \leq t_6 \\ -J_{\max} \cos^2\left(\frac{\tau_7}{T_7} \cdot \frac{\pi}{2}\right) & t_6 < t \leq t_7 \\ -J_{\max} & t_7 < t \leq t_8 \end{cases} \quad (1)$$

通过对加加速度的运动函数连续进行积分计算,得到改进的三角函数加减速的加速度、速度和位移运动函数如表 1 所示. 其中:  $a_i(i=1,2,\dots,15)$  为第  $i$  阶段结束时的加速度;  $v_i(i=1,2,\dots,15)$  为第  $i$  阶段结束时的速度;  $s_i(i=1,2,\dots,15)$  为第  $i$  阶段结束时的位移;  $\tau_i(i=1,2,\dots,15)$  为  $t$  时刻在第  $i$  阶段上的时间坐标.

表 1 加速度、速度和位移运动函数

Tab.1 Motion functions of acceleration, velocity, and displacement

$t$ 所在区间	$a(t)$	$v(t)$	$s(t)$
$t_0 < t \leq t_1$	$\frac{1}{2}J_{\max} \left( \tau_1 - \frac{T_1}{\pi} \cdot \sin\left(\frac{\tau_1}{T_1} \cdot \pi\right) \right)$	$v_s + \frac{1}{2}J_{\max} \left( \frac{1}{2}\tau_1^2 - \left(\frac{T_1}{\pi}\right)^2 \cdot \left(1 - \cos\left(\frac{\tau_1}{T_1} \cdot \pi\right)\right) \right)$	$v_s \cdot \tau_1 + \frac{1}{2}J_{\max} \left( \frac{1}{6}\tau_1^3 - \left(\frac{T_1}{\pi}\right)^2 \cdot \left(\tau_1 - \frac{T_1}{\pi} \cdot \sin\left(\frac{\tau_1}{T_1} \cdot \pi\right)\right) \right)$
$t_1 < t \leq t_2$	$a_1 + J_{\max} \cdot \tau_2$	$v_1 + a_1 \cdot \tau_2 + \frac{1}{2}J_{\max} \cdot \tau_2^2$	$s_1 + v_1 \cdot \tau_2 + \frac{1}{2}a_1 \cdot \tau_2^2 + \frac{1}{6}J_{\max} \cdot \tau_2^3$
$t_2 < t \leq t_3$	$a_2 + \frac{1}{2}J_{\max} \left( \tau_3 + \frac{T_3}{\pi} \cdot \sin\left(\frac{\tau_3}{T_3} \cdot \pi\right) \right)$	$v_2 + a_2 \cdot \tau_3 + \frac{1}{2}J_{\max} \cdot \left( \frac{1}{2}\tau_3^2 + \left(\frac{T_3}{\pi}\right)^2 \cdot \left(1 - \cos\left(\frac{\tau_3}{T_3} \cdot \pi\right)\right) \right)$	$s_2 + v_2 \cdot \tau_3 + \frac{1}{2}a_2 \cdot \tau_3^2 + \frac{1}{2}J_{\max} \cdot \left( \frac{1}{6}\tau_3^3 + \left(\frac{T_3}{\pi}\right)^2 \cdot \left(\tau_3 - \frac{T_3}{\pi} \cdot \sin\left(\frac{\tau_3}{T_3} \cdot \pi\right)\right) \right)$
$t_3 < t \leq t_4$	$a_3$	$v_3 + a_3 \tau_4$	$s_3 + v_3 \cdot \tau_4 + \frac{1}{2}a_3 \cdot \tau_4^2$
$t_4 < t \leq t_5$	$a_4 - \frac{1}{2}J_{\max} \left( \tau_5 - \frac{T_5}{\pi} \cdot \sin\left(\frac{\tau_5}{T_5} \cdot \pi\right) \right)$	$v_4 + a_4 \cdot \tau_5 - \frac{1}{2}J_{\max} \cdot \left( \frac{1}{2}\tau_5^2 - \left(\frac{T_5}{\pi}\right)^2 \cdot \left(1 - \cos\left(\frac{\tau_5}{T_5} \cdot \pi\right)\right) \right)$	$s_4 + v_4 \cdot \tau_5 + \frac{1}{2}a_4 \cdot \tau_5^2 - \frac{1}{2}J_{\max} \cdot \left( \frac{1}{6}\tau_5^3 - \left(\frac{T_5}{\pi}\right)^2 \cdot \left(\tau_5 - \frac{T_5}{\pi} \cdot \sin\left(\frac{\tau_5}{T_5} \cdot \pi\right)\right) \right)$
$t_5 < t \leq t_6$	$a_5 - J_{\max} \cdot \tau_6$	$v_5 + a_5 \cdot \tau_6 - \frac{1}{2}J_{\max} \cdot \tau_6^2$	$s_5 + v_5 \cdot \tau_6 + \frac{1}{2}a_5 \cdot \tau_6^2 - \frac{1}{6}J_{\max} \cdot \tau_6^3$
$t_6 < t \leq t_7$	$a_6 - \frac{1}{2}J_{\max} \left( \tau_7 + \frac{T_7}{\pi} \cdot \sin\left(\frac{\tau_7}{T_7} \cdot \pi\right) \right)$	$v_6 + a_6 \cdot \tau_7 - \frac{1}{2}J_{\max} \cdot \left( \frac{1}{2}\tau_7^2 + \left(\frac{T_7}{\pi}\right)^2 \cdot \left(1 - \cos\left(\frac{\tau_7}{T_7} \cdot \pi\right)\right) \right)$	$s_6 + v_6 \cdot \tau_7 + \frac{1}{2}a_6 \cdot \tau_7^2 - \frac{1}{2}J_{\max} \cdot \left( \frac{1}{6}\tau_7^3 + \left(\frac{T_7}{\pi}\right)^2 \cdot \left(\tau_7 - \frac{T_7}{\pi} \cdot \sin\left(\frac{\tau_7}{T_7} \cdot \pi\right)\right) \right)$
$t_7 < t \leq t_8$	0	$v_7$	$s_7 + v_7 \cdot \tau_8$

## 2 一步法拐角过渡算法

### 2.1 基于相邻微线段速度矢量相加的拐角过渡原理

图 3(a) 所示为传统加工方法, 通过对连续微线段  $P_1P_2$  与  $P_2P_3$  利用改进三角函数加减速进行速度规划, 得到了对应的进给速度曲线.  $v_1$ 、 $v_2$  分别为线段 1 和线段 2 的速度,  $T_1$ 、 $T_2$  分别为线段 1 和线段 2 的加工时间. 由于拐角处仅 G0 连续, 每加工完一个微线段都会使速度降为 0 且方向发生突变.

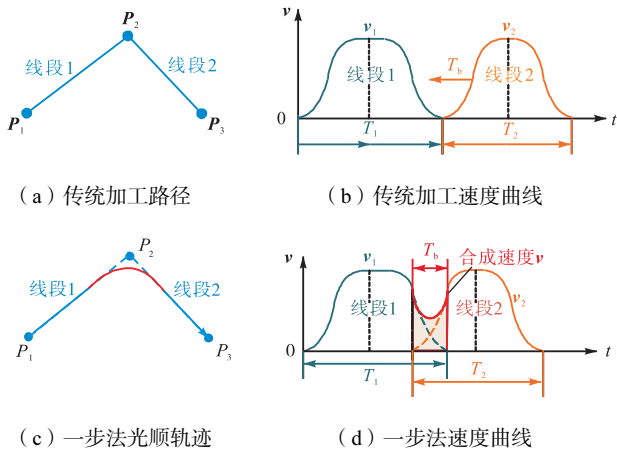


图 3 基于速度矢量相加的拐角过渡原理

Fig.3 Principle of corner transition method based on feedrate blending

一步法拐角过渡算法如图 3(d) 所示, 当机床运动正处于线段 1 的减速阶段时, 提前开始线段 2 的加工, 线段 1 和线段 2 同时进行加工过程称为过渡阶段, 过渡时间  $T_b$  为过渡阶段持续的时间. 通过进给速度曲线可见, 线段 2 的速度曲线被前移, 与线段 1 的速度曲线重叠相加, 增大了拐角处的进给速度, 提高拐角处加工效率.

图 4 和图 5 分别示意过渡阶段的位移和速度,  $P_a$ 、 $P_b$  分别为过渡阶段的起始点和结束点.

因为过渡阶段中, 线段 1 和线段 2 同时加工, 所以加工轨迹可以通过矢量叠加得到

$$P_t = P_1 + S_1(t) \cdot \lambda_1 + S_2(t) \cdot \lambda_2 \quad (2)$$

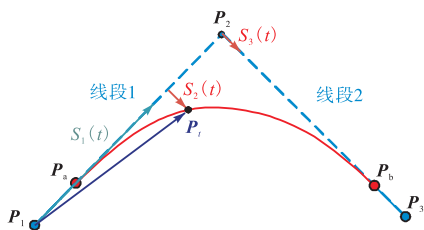


图 4 拐角过渡阶段的位移

Fig.4 Displacement in the corner transition stage

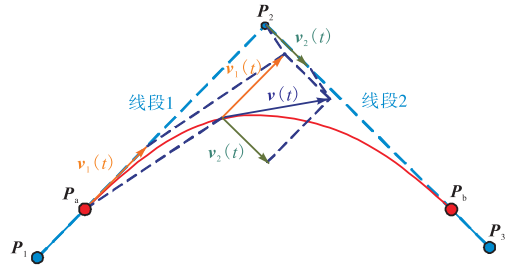


图 5 拐角过渡阶段的速度

Fig.5 Feedrate in the corner transition stage

式中:  $S_1(t)$ 、 $S_2(t)$  为线段 1 和线段 2 实时位移; 单位方向矢量  $\lambda_1 = P_1P_2 / \|P_1P_2\|$ ;  $\lambda_2 = P_2P_3 / \|P_2P_3\|$ .

同理过渡阶段的速度也可以通过矢量叠加得到

$$v(t) = v_1(t) \cdot \lambda_1 + v_2(t) \cdot \lambda_2 \quad (3)$$

式中  $v_1(t)$ 、 $v_2(t)$  为线段 1 和线段 2 的实时速度.

### 2.2 基于改进三角函数加减速的轮廓误差控制

过渡时间  $T_b$  是根据最大允许轮廓误差  $\epsilon_{\max}$  条件进行求解的. 过渡时间  $T_b$  越大, 则拐角处的进给速度就越大, 随之产生的轮廓误差也就越大.

定义第  $t$  条微线段的最大拐角误差为  $\epsilon_{t,\max}$ , 发生最大拐角误差的插补点为  $P_{\max}$ , 过渡曲线的中点为  $P_{0.5}$ . 如图 6 所示, 当线段 1 和线段 2 的速度曲线对称,  $P_{\max}$  和  $P_{0.5}$  重合, 最大拐角误差  $\epsilon_{t,\max} = \|P_2P_{0.5}\|$ . 当线段 1 和线段 2 的速度曲线不对称,  $P_{\max}$  和  $P_{0.5}$  不重合, 此时最大拐角误差  $\epsilon_{t,\max} = \|P_2P_{\max}\| < \|P_2P_{0.5}\|$ . 所以, 只需控制  $\|P_2P_{0.5}\|$  小于最大允许轮廓误差  $\epsilon_{\max}$ , 即可保证在过渡阶段最大拐角误差满足轮廓误差限制.

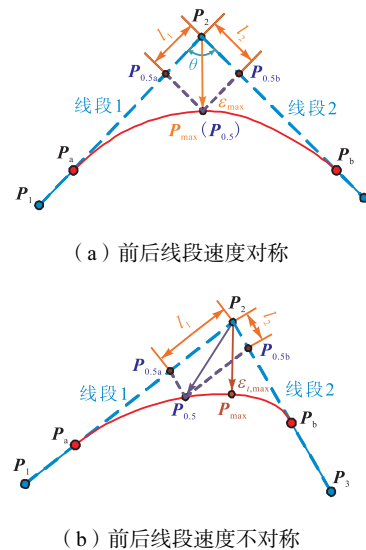


图 6 过渡阶段最大拐角误差

Fig.6 Maximum corner error in the transition stage

过渡曲线中点  $P_{0.5}$  所对应线段 1 和线段 2 的插补点分别为  $P_{0.5a}$  和  $P_{0.5b}$ , 线段  $l_1 = \|P_2P_{0.5a}\|$ ,

$l_2 = \|\mathbf{P}_2\mathbf{P}_{0.5b}\|$ , 利用余弦公式求解  $\|\mathbf{P}_2\mathbf{P}_{0.5}\|$ , 即

$$\|\mathbf{P}_2\mathbf{P}_{0.5}\| = \sqrt{l_1^2 + l_2^2 - 2l_1l_2 \cos(\pi - \theta)} < \varepsilon_{\max} \quad (4)$$

式中  $l_1$  和  $l_2$  分别为线段 1 和线段 2 在过渡曲线中点处的位移, 其大小可根据  $T_b$  的值通过表 1 中的位移公式求解。

为避免多段过渡曲线重叠, 过渡时间  $T_b$  要小于线段 1 的减速阶段时间  $T_{1,d}$  以及线段 2 的加速时间  $T_{2,c}$ , 即  $T_b$  的取值范围为  $[0, \min(T_{1,d}, T_{2,c})]$ , 利用二分法求解满足最大轮廓误差的过渡时间  $T_b$ , 设定求解精度为  $\delta = 0.0001$ 。

### 3 机床各进给轴的动态性能约束

为保证机床加工平稳, 要求机床各轴的速度、加速度和加加速度都不能超过各轴的最大限制。在先前的改进三角函数加减速规划时, 微线段的这些运动参数都已满足限制条件, 但经过拐角过渡运算, 在过渡阶段存在速度、加速度和加加速度矢量相加, 可能会造成机床运动负荷超限, 所以需要过渡阶段中的运动参数进行约束。

#### 3.1 过渡阶段的速度约束

如图 5 所示, 过渡阶段的速度为线段 1 和线段 2 的速度  $v_1$ 、 $v_2$  矢量相加, 当速度方向相同时, 过渡阶段的速度  $v$  最大, 即

$$\|v\| \leq \|v_1\| + \|v_2\| \quad (5)$$

因此, 假设相邻线段在速度方向相同且大小不变的情况下, 若过渡阶段的速度仍小于最大速度限制, 即可证明该过渡阶段的速度满足最大速度限制。

图 7 所示为假设相邻线段速度方向相同时的速度曲线和加速度曲线。

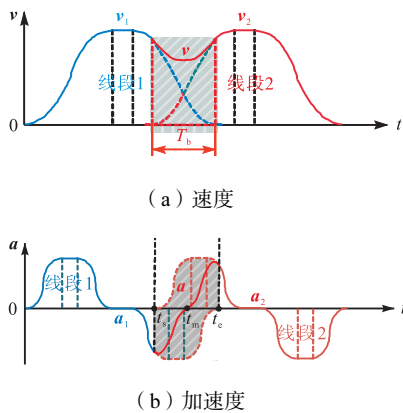


图 7 过渡阶段速度和加速度曲线

Fig.7 Feedrate and acceleration profiles in the transition stage

在  $t_s$  时刻过渡阶段开始, 线段 1 加速度  $a_1 < 0$ ,

线段 2 加速度  $a_2 = 0$ , 矢量相加后加速度  $a = a_1 + a_2 < 0$ , 即过渡阶段初始  $v$  是递减的, 直到  $t_m$  时刻  $a_1 = -a_2$ , 之后  $a_1$  和  $a_2$  逐渐变大, 有  $a > 0$ ,  $v$  由递减变为递增直到过渡阶段结束。所以过渡阶段速度  $v$  的最大值出现在其两侧, 而两侧位置仍可视作线段 1、2 单独加工过程, 因此两侧的速度是小于最大速度限制的, 所以过渡阶段速度始终满足最大速度限制。

#### 3.2 过渡阶段的加速度约束

如图 8 所示, 过渡阶段的加速度  $a$  需要分解到  $x$  轴和  $y$  轴分别进行约束, 但  $x$  轴上的加速度分量  $a_{x1}$  和  $a_{x2}$  不一定同向, 合成的  $a_x$  存在相加和相减两种情况,  $y$  轴同理。这与加工线段向量  $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$ 、 $\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3$  同  $x$  轴的夹角  $\theta_1$ 、 $\theta_2$  有关, 所以需要分情况研究。

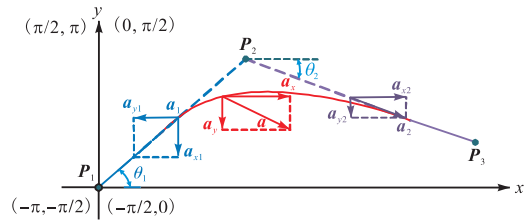


图 8 过渡阶段各轴加速度示意

Fig.8 Diagram of acceleration on each axis in the transition stage

由于过渡阶段是线段 1 减速阶段和线段 2 加速阶段的重叠, 所以  $a_1$  方向与  $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$  相反,  $a_2$  方向与  $\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3$  相同。可根据式 (6) 判断  $x$  轴和  $y$  轴上加速度分量是否同向  $\theta_1$ 。

$$\begin{cases} (|\theta_1| - \pi/2)(|\theta_2| - \pi/2) < 0 & a_{x1}, a_{x2} \text{同向} \\ (|\theta_1| - \pi/2)(|\theta_2| - \pi/2) > 0 & a_{x1}, a_{x2} \text{反向} \\ \theta_1 \cdot \theta_2 < 0 & a_{y1}, a_{y2} \text{同向} \\ \theta_1 \cdot \theta_2 > 0 & a_{y1}, a_{y2} \text{反向} \end{cases} \quad (6)$$

$x$  轴和  $y$  轴的加速度规律相同, 这里只对  $x$  轴的加速度约束进行讨论。当  $a_1$ 、 $a_2$  的  $x$  轴分量  $a_{x1}$ 、 $a_{x2}$  反向时, 有  $a_x = \|a_{x1}\| - \|a_{x2}\|$ , 所以  $a_x \leq \max(a_{x1}, a_{x2})$ 。由于单段加工规划中,  $a_{x1}$  和  $a_{x2}$  的最大值小于  $x$  轴最大加速度限制, 所以过渡阶段的加速度满足  $x$  轴的加速度约束。

当  $a_{x1}$ 、 $a_{x2}$  同向时, 相加得到的  $a_x$  可能会超出最大加速度限制, 所以需要求解过渡阶段  $a_x$  的最大值。线段 1、2 的加速度函数分别为  $a_1(t)$  和  $a_2(t)$ , 则  $a_x(t)$  为

$$a_x(t) = a_1(t + T_1 - T_b) \cos \theta_1 + a_2(t) \cos \theta_2 \quad (7)$$

$$t \in [0, T_b]$$

其中, 过渡时间  $T_b$  已通过轮廓误差求解,  $a_1(t)$  和

$a_2(t)$  根据表 1 中加速度公式得到.

得到  $x$  轴的最大加速度  $\max a_x(t)$  后, 同理可得  $y$  轴最大加速度  $\max a_y(t)$ . 当  $x$  轴或  $y$  轴的最大加速度超过对应轴的最大加速度限制  $A_{x,\max}$  和  $A_{y,\max}$ , 需要对线段 1 和线段 2 的加速度进行修正, 设定加速度修正系数  $\eta_a$ , 即

$$\eta_a = \max \left( \frac{\max a_x(t)}{A_{x,\max}}, \frac{\max a_y(t)}{A_{y,\max}} \right) \quad (8)$$

$$t \in [0, T_b]$$

同时对线段 1 和线段 2 的加速度进行修正, 即

$$a_1 = \frac{a_1}{\eta_a}, a_2 = \frac{a_2}{\eta_a} \quad (9)$$

### 3.3 过渡阶段的加加速度约束

因为加速度分量进行矢量合成时存在两种情况, 所以加加速度的矢量合成也存在 2 种情况, 同样这里只对  $x$  轴的加加速度约束进行讨论.

图 9 所示为线段 1 和线段 2 的加速度的  $x$  轴分量反向时的加加速度曲线, 根据改进三角函数加减速的对称性, 令线段 1 和线段 2 的加加速度变化阶段持续时间分别为  $T_{1,J}$  和  $T_{2,J}$ , 线段 1 和线段 2 的加速度匀变速阶段持续时间为  $T_{1,a}$  和  $T_{2,a}$ .

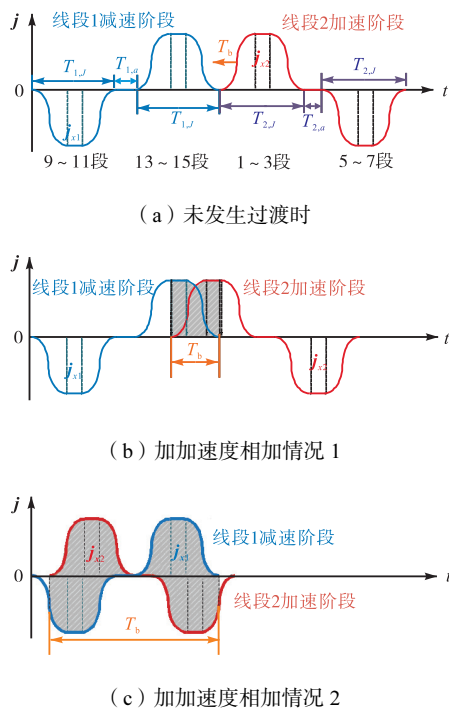


图 9  $x$  轴加速度分量反向时的加加速度曲线

Fig.9 Jerk profile when the acceleration components on the  $x$  axis are in opposite directions

若  $0 < T_b < (T_{1,J} + T_{2,J})$ , 如图 9(b) 所示, 线段 1 的 13~15 阶段和线段 2 的 1~3 阶段的加加速度  $x$  轴分量进行矢量相加, 由于两者方向相同, 加加速度可

能超限, 因此, 需要对过渡阶段的最大加加速度进行校验. 若  $(T_{1,J} + T_{2,J}) < T_b < \min(2T_{1,J} + T_{1,a}, 2T_{2,J} + T_{2,a})$ , 如图 9(c) 所示, 在过渡阶段内线段 1 和线段 2 的加加速度  $x$  轴分量的方向不同, 所以  $x$  轴最大加加速度小于线段 1 和线段 2 的  $x$  轴加加速度, 即  $j_x \leq \max(j_{x1}, j_{x2})$ , 此时满足加加速度约束条件, 不需要求解过渡阶段的最大加加速度.

如图 10 所示为线段 1 和线段 2 的加速度的  $x$  轴分量同向时的加加速度曲线.

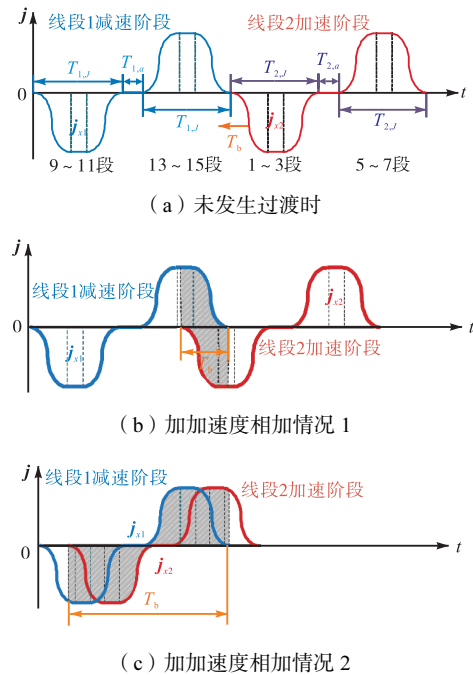


图 10  $x$  轴加速度分量同向时的加加速度曲线

Fig.10 Jerk profile when the acceleration components on the  $x$  axis are in the same direction

如图 10(a) 所示, 若  $(T_{1,J} + T_{1,a}) < T_b < (2T_{1,J} + T_{1,a})$ , 线段 1 的 9~11 阶段和线段 2 的 1~3 阶段的加加速度  $x$  轴分量同向相加, 可能使  $x$  轴加加速度超限; 若  $(T_{2,J} + T_{2,a}) < T_b < (2T_{2,J} + T_{2,a})$ , 线段 1 的 13~15 阶段和线段 2 的 5~7 阶段的加加速度  $x$  轴分量同向相加, 也可能超限. 另外, 过渡时间  $T_b$  的取值范围为  $[0, \min(2T_{1,J} + T_{1,a}, 2T_{2,J} + T_{2,a})]$ , 所以, 当  $\min(T_{1,J} + T_{1,a}, T_{2,J} + T_{2,a}) < T_b < \min(2T_{1,J} + T_{1,a}, 2T_{2,J} + T_{2,a})$  时, 需要对过渡阶段的最大加加速度进行求解. 如图 10(b) 所示, 当过渡时间处于其他情况时, 不需要求解最大加加速度.

综上分析, 当加速度  $x$  轴分量反向且  $0 < T_b < (T_{1,J} + T_{2,J})$  或加速度  $x$  轴分量同向且  $\min(T_{1,J} + T_{1,a}, T_{2,J} + T_{2,a}) < T_b < \min(2T_{1,J} + T_{1,a}, 2T_{2,J} + T_{2,a})$  时, 需要求解过渡阶段的最大加加速度. 令线段 1、2 的加加速度函数分别为  $j_1(t)$  和  $j_2(t)$ , 得到在过渡阶

段的加加速度  $x$  轴分量  $j_x(t)$ , 即

$$\begin{aligned} j_x(t) &= j_1(t+T_1-T_b)\cos\theta_1 + j_2(t)\cos\theta_2 \\ t &\in [0, T_b] \end{aligned} \quad (10)$$

式中  $j_1(t)$  和  $j_2(t)$  根据改进三角函数加减速中的式(1)得到。

得到  $x$  轴在过渡阶段的最大加加速度  $\max j_x(t)$  后, 同理也能得到  $y$  轴的最大加加速度  $\max j_y(t)$ 。当  $x$  轴或  $y$  轴的最大加加速度大于对应轴的最大加加速度限制  $J_{x,\max}$  和  $J_{y,\max}$ , 需要对线段 1 和线段 2 的加加速度进行修正, 设定加加速度修正系数  $\eta_j$ , 即

$$\eta_j = \max\left(\frac{\max j_x(t)}{J_{x,\max}}, \frac{\max j_y(t)}{J_{y,\max}}\right) \quad (11)$$

$$t \in [0, T_b]$$

同时对线段 1 和线段 2 的加加速度进行修正, 即

$$j_1 = \frac{j_1}{\eta_j}, j_2 = \frac{j_2}{\eta_j} \quad (12)$$

#### 4 实验验证

本文选用的加工机床动力学性能参数为: 插补周期为 1 ms, 最大进给速度为 100 mm/s, 最大轮廓误差为 0.1 mm,  $x$  轴最大加速度为 1 200 mm/s<sup>2</sup>,  $y$  轴最大加速度为 1 500 mm/s<sup>2</sup>,  $x$  轴最大加加速度为 40 000 mm/s<sup>3</sup>,  $y$  轴最大加加速度为 60 000 mm/s<sup>3</sup>。为了验证本文提出的方法以及算法的正确性, 以 VisualStudio 为平台进行 C 语言编程, 然后在处理器版本为 i5 CPU@1.70 GHz × 4 的联想笔记本电脑上运行, 将算法嵌入数控系统中, 通过加工数据采集的方式进行实验对比。

将本文方法与基于 S 型加减速的一步拐角过渡方法 (S-curve ACC/DEC feedrate blending method, SFBM)<sup>[11]</sup> 进行实验对比。枫叶形加工轨迹如图 11 所示, 由 134 条线段组成, 加工线段长度为 0.5 ~ 6.0 mm。

如图 12 所示为  $x$  轴和  $y$  轴进给速度曲线。2 种方法的速度均满足约束条件, 本文方法的加工时间为 12.104 s, 仅比 SFBM 法低 5.22%。因为 SFBM 法采用 S 型加减速, 一直保持最大加加速度加工, 而本文方法弥补了一般三角函数加减速加工效率的不足, 使得加工时间与 SFBM 法大致相当。

图 13 为  $x$  轴和  $y$  轴的加速度曲线, SFBM 法在  $x$  轴和  $y$  轴的最大加速度分别为 1 572.1 mm/s<sup>2</sup> 和 1 738.55 mm/s<sup>2</sup>, 各超出加速度约束 31.01% 和 15.90%。本文方法在  $x$  轴和  $y$  轴的最大加速度分别为

1 127.2 mm/s<sup>2</sup> 和 1 488.5 mm/s<sup>2</sup>, 均小于加速度约束。

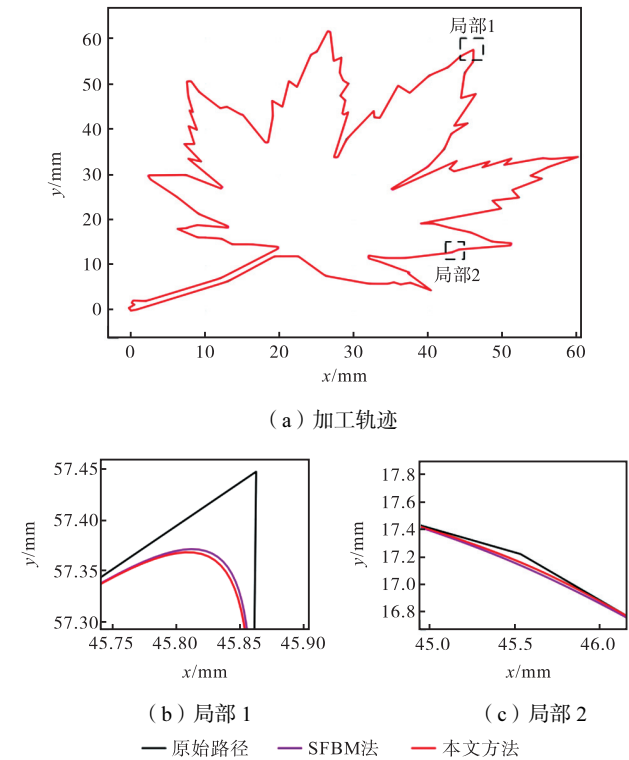


图 11 枫叶图形加工轨迹

Fig.11 Maple-shaped toolpath

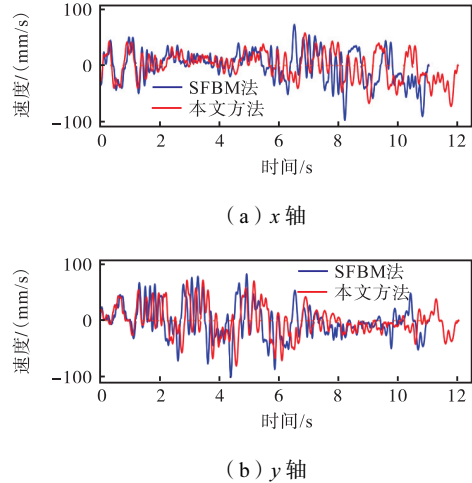
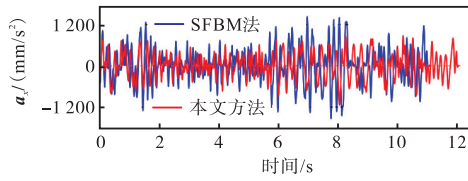


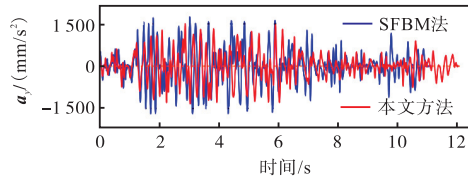
图 12 不同方法下的各轴速度

Fig.12 Feedrate on each axis with different methods

图 14 为  $x$  轴和  $y$  轴的加加速度曲线。SFBM 法在  $x$  轴和  $y$  轴的最大加加速度分别为 63 346.8 mm/s<sup>3</sup> 和 93 172.5 mm/s<sup>3</sup>, 各超出加加速度约束 58.4% 和 55.29%。本文方法的加加速度在  $x$  轴和  $y$  轴上的最大值分别为 37 338.5 mm/s<sup>3</sup> 和 58 537.8 mm/s<sup>3</sup>, 均小于加加速度约束。SFBM 法的加速度和加加速度超出约束是因为该方法在进行加速度和加加速度的非线性优化时仅考虑了线段夹角为钝角的情况, 未对锐角尤其是尖角的情况进行约束。



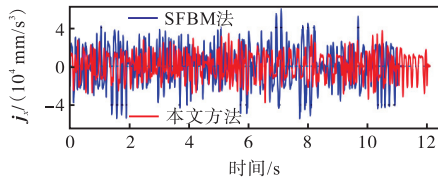
(a) x 轴



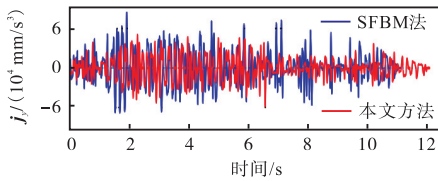
(b) y 轴

图 13 不同方法下的各轴加速度

Fig.13 Acceleration on each axis with different methods



(a) x 轴



(b) y 轴

图 14 不同方法下的各轴加加速度

Fig.14 Jerk on each axis with different methods

图 15 是分析加工插补点得到的轮廓误差曲线,其中本文方法、SFBM 法的最大轮廓误差分别为 0.085 4 mm、0.081 9 mm,都能对轮廓误差进行有效控制.

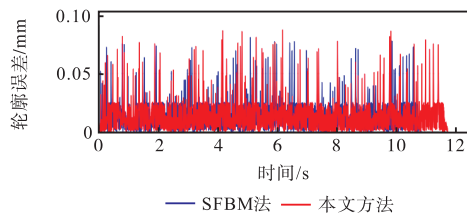
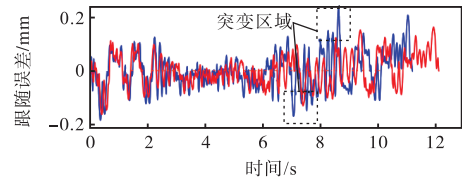


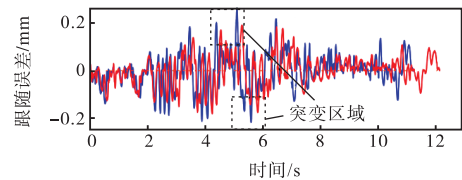
图 15 不同方法下的轮廓误差曲线

Fig.15 Contour error profiles with different methods

图 16 为各轴的跟随误差曲线. SFBM 法的加加速度存在阶跃使得跟随误差较大,其 x 轴和 y 轴上最大误差分别为 0.162 4 mm 和 0.188 4 mm,本文方法与 SFBM 法相比,在 x 轴和 y 轴的最大跟随误差分别减小了 31.59%和 27.03%.



(a) x 轴



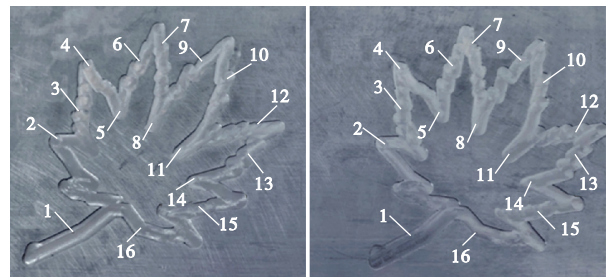
(b) y 轴

— SFBM法 — 本文方法

图 16 不同方法下的各轴跟随误差

Fig.16 Tracking errors on each axis with different methods

图 17 所示为加工结果,选择 16 个区域进行粗糙度测量,得到图 18 所示的测量结果. SFBM 法平均粗糙度为 0.339 2 μm,本文方法的平均粗糙度为 0.249 9 μm. 本文方法加工的零件表面平均粗糙度较 SFBM 法提高 26.33%,获得更好的表面加工质量.



(a) SFBM 法

(b) 本文方法

图 17 加工结果及待测区域

Fig.17 Machining results and measured areas

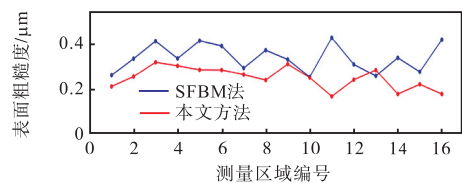


图 18 不同方法下的加工表面粗糙度

Fig.18 Local surface roughness with different methods

### 5 结论

- (1) 提出了改进的三角函数加减速控制算法,在运动模型中增加匀加加速度阶段. 实验证明,该算法具有持续加减速能力,充分利用机床的最大加加速度性能,在保证柔性加减速的基础上提高了加减速效率.
- (2) 在改进三角函数加减速方法基础上进一步

提出一步法拐角过渡算法,使相邻微线段的速度在过渡阶段内矢量相加,在速度规划阶段直接完成轨迹光顺。同时,通过控制过渡曲线的中点拐角误差实现几何误差约束,根据速度合成方向以及过渡时间进行各进给轴的动态性能约束,实现了各轴加速度、加加速度平滑的控制,提高伺服系统跟随精度。

#### 参考文献:

- [1] 李明, 游有鹏, 杨雪峰. 一种加加速度连续的加减速算法研究[J]. 机械制造与自动化, 2021, 50(1): 70-73.  
Li Ming, You Youpeng, Yang Xuefeng. Research on a continuous acceleration and deceleration algorithm[J]. Machinery Manufacturing and Automation, 2021, 50(1): 70-73 (in Chinese).
- [2] 王太勇, 尤中桐, 辛全琦. 螺旋线插补速度规划及其插补参数求解方法[J]. 天津大学学报(自然科学与工程技术版), 2018, 51(11): 1107-1116.  
Wang Taiyong, You Zhongtong, Xin Quanqi. Spiral interpolation speed planning and its interpolation parameter solving method[J]. Journal of Tianjin University (Science and Technology), 2018, 51(11): 1107-1116 (in Chinese).
- [3] 司慧晓. 数控加工中加减速控制及平滑算法的研究与实现[D]. 沈阳: 中国科学院大学中国科学院沈阳计算技术研究所, 2017.  
Si Huixiao. Research and Implementation of Acceleration/Deceleration Control and Smoothing Algorithm During the NC Machining[D]. Shenyang: Chinese Academy of Sciences Shenyang Institute of Computing Technology, University of Chinese Academy of Sciences, 2017 (in Chinese).
- [4] 李志杰, 蔡力钢, 刘志峰. 加加速度连续的 S 型加减速规划算法[J]. 计算机集成制造系统, 2019, 25(5): 1192-1201.  
Li Zhijie, Cai Ligang, Liu Zhifeng. S type acceleration & deceleration fast planning algorithm with continuous jerk[J]. Computer Integrated Manufacturing Systems, 2019, 25(5): 1192-1201 (in Chinese).
- [5] 潘海鸿, 贺飞翔, 易健, 等. 正矢曲线加减速加加速度连续算法研究[J]. 机械科学与技术, 2019, 38(12): 1894-1903.  
Pan Haihong, He Feixiang, Yi Jian, et al. Versine curve acc/dec snap continuous control algorithm[J]. Mechanical Science and Technology for Aerospace Engineering, 2019, 38(12): 1894-1903 (in Chinese).
- [6] Huang J, Zhu L M. Feedrate scheduling for interpolation of parametric tool path using the sine series representation of jerk profile[J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers Part B—Journal of Engineering Manufacture, 2017, 231(13): 2359-2371.
- [7] Li B R, Zhang H, Ye P Q, et al. Trajectory smoothing method using reinforcement learning for computer numerical control machine tools[J]. Robotics and Computer-Integrated Manufacturing, 2020, 61: 101847.
- [8] Tajima S, Sencer B. Smooth cornering strategy for high speed CNC machine tools with confined contour error[C]//Proceedings of the ASME 2016 11th International Manufacturing Science and Engineering Conference. Blacksburg, Virginia, USA, 2016: V002T04A034.
- [9] Wang W X, Hu C X, Zhou K, et al. Corner trajectory smoothing with asymmetrical transition profile for CNC machine tools[J]. International Journal of Machine Tools & Manufacture, 2019, 144: 103423.
- [10] Zhang Y B, Wang T Y, Peng P, et al. Feedrate blending method for five-axis linear tool path under geometric and kinematic constraints[J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2021, 195: 106262.
- [11] Zhang Y B, Wang T Y, Dong J C, et al. A corner smoothing method with feedrate blending for linear segments under geometric and kinematic constraints[J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers Part B—Journal of Engineering Manufacture, 2020, 234(9): 1227-1245.

(责任编辑: 王晓燕)