

DOI:10.11784/tdxbz202405007

山区公路桥梁多灾害联合作用数值模拟

熊文, 周迪辉, 马小龙, 张嵘钊, 张大牛

(东南大学交通学院, 南京 211189)

摘要: 山区公路桥梁长期遭受冲刷及磨蚀等水文灾害, 期间可能同时伴随崩塌落石等地质灾害的作用. 为探明多灾害作用下山区公路桥梁的结构响应及损伤机理, 从流固耦合的角度出发, 针对冲刷及磨蚀的数据传递推导相应的插值算法, 并结合生死单元功能, 构建基于 Delaunay 三角剖分及特征点协同插值的山区公路桥梁多灾害联合作用数值仿真方法. 首先, 针对冲刷数据, 基于三角形内部插值理论构建冲刷数据传递方程. 其次, 针对磨蚀/波流力数据, 基于三维表面 Delaunay 三角剖分及三角形外部插值理论补充推导数据传递方程, 再利用特征点协同插值算法计算结构域目标单元总结果. 最后, 基于生死单元功能, 在结构域中考虑冲刷坑及桩基磨蚀形态, 构建冲刷及磨蚀条件下落石冲击山区公路桥梁墩柱数值模型. 结果表明: 所采用的针对冲刷及磨蚀模型数据的插值方法精度较高; 在不同的冲击速度、冲击角度及落石质量工况下, 与无冲刷磨蚀相比, 冲刷、冲刷磨蚀条件下桥墩冲击力峰值的相对变化呈现非线性特征, 此外, 在冲刷条件下, 桩基磨蚀对冲击力峰值亦产生非线性影响; 随着冲击速度及落石质量的增大, 各条件下冲击点位移峰值均变大, 且位移峰值从大到小均依次为冲刷、冲刷磨蚀和无冲刷磨蚀, 同时在各冲击速度、冲击角度及落石质量工况下, 磨蚀引起的位移峰值最大降幅分别约为 2%、11%及 4%.

关键词: 多灾害; 三角剖分; 协同插值; 生死单元; 数值模型

中图分类号: U442.59

文献标志码: A

文章编号: 0493-2137(2025)03-0309-14

Numerical Simulation of Multi-Hazard Joint Action on Mountainous Road Bridges

Xiong Wen, Zhou Dihui, Ma Xiaolong, Zhang Rongzhao, Zhang Daniu

(School of Transportation, Southeast University, Nanjing 211189, China)

Abstract: Mountainous road bridges are subjected to hydrological hazards such as scour and erosion in a long term of years, and they may concurrently suffer geological hazards like falling rocks. To elucidate their structural response and damage mechanisms under multiple hazards, the interpolation algorithms for the transfer of scour and erosion data were derived from the aspect of fluid-structure coupling. In addition, combined with the birth-death element functionality, a numerical simulation method for the multi-hazard joint action on mountainous road bridges was formulated by means of Delaunay triangulation and collaborative interpolation of feature points. First, aimed at the scour data, a scour data transfer equation was constructed based on the linear interpolation theory within a triangle. Second, supplementary data transfer equations based on three-dimensional surface Delaunay triangulation and the linear interpolation theory outside the triangle were derived for the erosion and flow force data, and the feature point collaborative interpolation algorithm was utilized to calculate the overall result of structural-domain target cells. Finally, based on the birth-death element functionality and with the consideration of scour and erosion morphology of pile foundations within the structural domain, the numerical model of a mountainous road bridge's pier column impacted by falling rocks was established under conditions of scour and erosion. Results demonstrate that the interpolation methods for the data of scour and erosion models achieve a high accuracy. Under conditions of different impact

收稿日期: 2024-05-12; 修回日期: 2024-09-08.

作者简介: 熊文(1982—), 男, 博士, 教授.

通信作者: 熊文, wxiong@seu.edu.cn.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(52378135, 52022021, 51978160).

Supported by the National Natural Science Foundation of China(No. 52378135, No. 52022021, No. 51978160).

velocities, different impact angles and different masses of falling rock, the relative changes in peak impact forces under the scour and combined scour-erosion conditions exhibit nonlinear characteristics compared with those under the condition of falling rocks alone. Moreover, the pile foundation erosion also exerts a nonlinear effect on the peak impact force under the scour conditions. As the impact velocity and mass of falling rock increase, the peak displacements at the impact point all increase under different conditions, and they are in a descending order under conditions of scour, combined scour-erosion and falling rocks alone. Meanwhile, under various conditions of impact velocity, impact angle and mass of falling rock, the erosion-induced peak displacements are reduced by up to 2%, 11% and 4%, respectively.

Keywords: multi-hazard; triangulation; collaborative interpolation; birth-death element; numerical model

中国地质及气候环境复杂,部分地区为多种灾害的聚集发生区,对基础设施例如桥梁结构的安全服役构成重大威胁。众多学者对处于多灾害作用下的桥梁结构动态响应及破坏机理做了大量研究。张琛^[1]利用 ANSYS/LS-DYNA 研究三跨连续梁桥在冲刷和船撞共同作用下的结构动力响应,但其仅研究了冲刷深度对桥梁结构的影响,并未考虑冲刷坑的形态和坡度。Fan 等^[2]对在不同腐蚀条件下的四跨连续梁桥分别开展驳船和球艏船撞击下的结构响应数值模拟,但其未考虑冲击角度对结构响应的影响。Guo 等^[3]构建了在洪水冲刷条件下 1 座双塔斜拉桥遭受船舶撞击的高精度全尺寸有限元模型,分析结果表明冲刷对船撞力峰值的影响较小,但显著影响船撞力的时程曲线及冲击点处的位移;由于该模型中冲刷的模拟采用三向土弹簧,故无法细致考虑桩土耦合作用。

上述多灾害作用下的研究多关注通航条件下的跨海(江、河)桥梁,而对山区公路桥梁则少有涉及,后者可能遭受的自然灾害包括地震、洪水、崩塌落石、滑坡、泥石流、冰雪等。以下将对山区公路桥梁在洪水冲刷与磨蚀等水文灾害及崩塌落石等地质灾害作用下的相关研究进行梳理。

在冲刷方面,熊文等^[4]开发了细-宏观数据交互接口,从洪水冲刷导致基础掏空的角度对河源东江大桥连续倒塌进行分析,但结构域冲刷发展模拟仍基于桩土弹簧增减。Song 等^[5]探究了上部结构和冲刷剖面对桥梁抗震性能的影响。Zhang 等^[6]采用二维 Delaunay 三角剖分将流体域的冲刷坑形态插值至结构域模型,并研究了浅基础的洪灾韧性,但未进行桩基础的冲刷坑及磨蚀形态插值,且未分析多灾害作用下的结构响应。

在桥墩/桩基磨蚀方面,Duan 等^[7]基于有限元法建立了单桩受携砂水流磨蚀的数值模型,并结合正交仿真试验构造出多因素影响下的磨蚀率预测公式,但模型中未考虑冲刷地形对磨蚀的影响。余志祥等^[8]采用实地调查及 CFD 数值分析方法,研究了水沙冲刷

作用对山区桥梁墩/柱磨蚀损伤的影响,但受限于流体计算软件,无法考虑磨蚀形态对结构性能的影响。梁晓岑^[9]利用 COMSOL 和 ANSYS 有限元软件,分别对单墩和多墩情况下的冲蚀及受损桥墩轴压应力变化进行了研究,但采用的二维磨蚀模型难以捕捉磨蚀在桥墩上的具体分布;此外,其在进行受损桥墩应力变化研究时,仅基于二维磨蚀角度确定桥墩钝化单元。

在地质灾害方面,Li 等^[10]采用 ANSYS/LS-DYNA 模拟了落石冲击空心薄壁墩,并基于 Box-Behnken 设计法及中心组合设计法构建了以冲击速度和落石直径为主控变量的损伤评估曲线及分区图,但未在落石冲击桥墩过程中考虑桩土效应。Xie 等^[11]对圆形及方形桥墩分别构建高精度的有限元模型,并在此基础上研究了在不同直径、初始速度和冲击高度的落石冲击下桥墩的动态响应,但其未研究不同冲击角度的影响。

综上所述,目前针对桥梁的多灾害研究大多集中于通航条件下的跨海(江、河)桥梁,而针对山区公路桥梁,鲜见考虑可能同时或接连发生的不同灾害的组合,即目前缺少山区公路桥梁在冲刷、磨蚀及崩塌落石冲击联合作用下的相关研究。此外,在当前多灾害数值模拟中鲜见基于流体域数据来考虑冲刷坑及磨蚀形态对结构性能影响的研究,且数值模拟中流固耦合界面数据传递基本介于多场的节点之间^[4],而多场间单元节点与单元中心同时进行数据传递的研究较少。

针对上述研究上的空白,本文构建了 1 种基于三角剖分及特征点协同插值的山区公路桥梁多灾害联合作用数值仿真方法。该方法主要分为 3 个模块:针对冲刷数据,基于二维 Delaunay 三角剖分及三角形内部插值理论构建数据传递方程;针对磨蚀/波流力数据,构建基于三维表面 Delaunay 三角剖分的协同插值算法,其中先根据三角形外部插值理论补充推导数据传递方程,再利用结构域目标单元特征点(节点及中心点)的插值结果,协同插值计算该目标单元总

结果；基于生死单元功能，在结构域中考虑冲刷坑及桩基磨蚀形态，构建冲刷及磨蚀条件下落石冲击山区公路桥梁墩柱数值模型。最后，以西南山区某六跨连续梁桥为案例，探明了该桥在多灾害作用下的结构响应及损伤机理。

1 多灾害数值模拟原理

基于流体动力学及显式动力分析的山区公路桥梁多灾害联合作用仿真方法，其基本前提是通过计算流体力学对桥梁的冲刷及磨蚀演变做出合理预测并精确计入落石冲击影响。以下将简述多灾害联合作用过程中的流体计算模块和结构有限元模块，主要包括冲刷、磨蚀及落石冲击仿真的基本原理。

1.1 基于 REEF3D 的桥梁冲刷分析

REEF3D 采用水平集法对自由表面进行捕捉，通过定义有符号距离函数的零水平集 $\phi(x,t)$ 对空气-水及水-沙交界面进行表示。对于空气-水交界面，通过求解下式得到水平集函数 $\phi(x,t)$ ，即

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{u}_j \frac{\partial \phi}{\partial x_j} = 0 \quad (1)$$

式中： t 为时间； \mathbf{u}_j 为交界面的运动速度； x_j 为交界面的运动方向。

水-沙交界面采用下式求解，即

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{F} \left| \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right| = 0 \quad (2)$$

$$\mathbf{F} = \frac{\partial z_b}{\partial t} \quad (3)$$

式中： z_b 为局部床面高程； \mathbf{F} 为河床沿法线方向的变化速度，由推移质和悬移质的冲刷和沉积决定，特别取决于局部床面剪切应力，采用 Exner 方程求解，即

$$(1-p')\mathbf{F} = -\frac{\partial q_{B,x}}{\partial x} - \frac{\partial q_{B,y}}{\partial y} - E' + S' \quad (4)$$

式中： p' 为泥沙孔隙率； $q_{B,x}$ 和 $q_{B,y}$ 分别为推移质在 x 和 y 方向的输沙率； E' 为悬移质冲刷率； S' 为悬移质沉积率。

1.2 基于 Fluent 的磨蚀及波流力分析

1.2.1 连续性方程及动量方程

基于流体的连续性和动量方程建立流体运动模型，其可表示为

$$\frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (5)$$

$$\rho \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}_i}{\partial t} + \rho \bar{\mathbf{u}}_j \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 \bar{\mathbf{u}}_i}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial \rho \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_j} \quad (6)$$

式中： $\bar{\mathbf{u}}_i$ 和 \mathbf{u}'_i 分别为水质点时间平均速度和波动速

度，其中 $\bar{\mathbf{u}}_i = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \mathbf{u}_i dt$ ，水质点速度 $\mathbf{u}_i = \bar{\mathbf{u}}_i + \mathbf{u}'_i$ ；下标 i 和 j 分别为笛卡尔坐标系中 x 、 y 的方向； \bar{p} 为时间平均压强； ρ 为水体密度； μ 为水体的动力黏度。基于式 (5) 与 (6) 即可求得任意时刻与位置的波流压力。

1.2.2 磨蚀预测公式

Fluent 中内置有 Finnie、Oka、McLaury 等颗粒磨蚀模型，参考文献[7, 8]，本文选取 Finnie 模型^[12-14]，计算公式为

$$E = k_0 v_p^l f(\gamma') \quad (7)$$

式中： k_0 为模型常数，取系统默认值； E 为无量纲质量； v_p 为颗粒的冲击速度； γ' 为冲击角，°； $f(\gamma')$ 为无量纲的冲击角函数； l 为指数，与表面材料相关，取值一般位于 2.0 ~ 2.5。

1.3 基于 ABAQUS 的落石冲击分析

基于 ABAQUS 的隐式-显式联合仿真功能进行多灾害联合作用仿真。将流体域冲刷及磨蚀模型结果插值至结构域，利用静力通用分析进行地应力平衡；以静力通用分析步的结果为初始状态，利用动力显式分析进行落石冲击桥墩模拟。

2 模型验证

2.1 冲刷模型

基于 Roulund 等^[15]的水槽实验验证 REEF3D 的冲刷模型，数值模型尺寸如图 1 所示。边界条件设置如下^[16]：入口设置为“InFlow”边界，出口设置为“OutFlow”边界，侧面及底面设置为“Wall”边界，顶面设置为“Symmetry Plane”边界。基于 $k-\omega$ 模型，利用推移质输沙公式进行流-土耦合冲刷计算，其中泥沙平均粒径为 0.26 mm，密度为 2 650 kg/m³，休止角为 32°，临界希尔兹数为 0.05^[16]，网格数为 3.75 × 10⁵，模拟总时间 $T = 60$ min。桩前冲刷深度发展如图 2 所示，由于数值方法的精度及冲刷过程的非线性效应影响且考虑到模型边界条件设定的差异，本文模拟

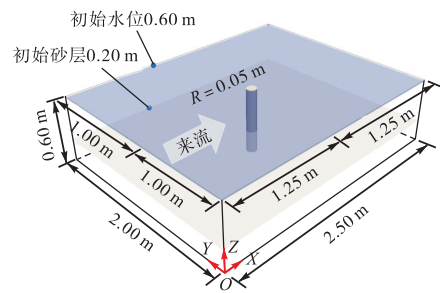


图 1 冲刷验证模型

Fig.1 Scour validation model

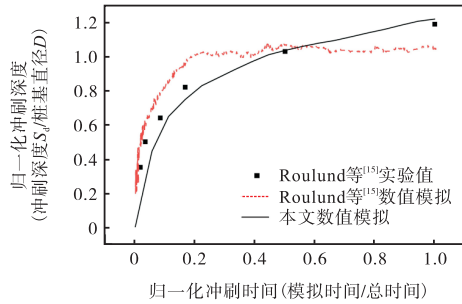


图 2 桩前冲刷深度发展曲线

Fig.2 Scour depth development curve in front of pile

结果在 $0.5T$ 之前小于其他两种方法的结果,而在 $0.5T$ 之后大于其他两种方法的结果。

2.2 磨蚀模型

目前关于桥梁下部结构磨蚀的经典实验较少,而混凝土板在含砂水冲击下磨损的实验较多. 基于 Liu 等^[17]的混凝土板冲磨实验,参照文献[7]设置本文的磨蚀验证模型,如图 3 所示,其中入口为“Velocity-inlet”边界,出口为“Pressure-out”边界,侧面及底面

为“Wall”边界,顶面为“Symmetry”边界,网格数约为 1.5×10^6 . 其中,泥沙颗粒采用 DPM 模型建模,忽略颗粒自身的变形及破碎,模拟时间取 20 s ^[7].

验证结果列于表 1,由表 1 可知数值模拟所得磨蚀率与实验值相比,误差均小于 12%,故认为验证模型参数取值和边界条件设置精度较高,可用于后续的实际桥模拟. 本文的磨蚀模型没有考虑混凝土的抗压强度,这也可能为误差来源之一。

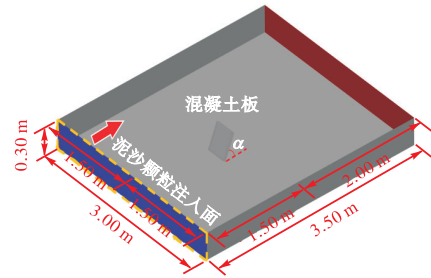


图 3 磨蚀验证模型

Fig.3 Erosion validation model

表 1 磨蚀模型验证结果

Tab.1 Validation results of erosion model

编号	含砂率/(kg/m ³)	流速/(m/s)	冲击角度 α (°)	实验 ^[17] 磨蚀率/($10^{-6}\text{ kg}/(\text{m}^2 \cdot \text{s})$)	本文磨蚀率/($10^{-6}\text{ kg}/(\text{m}^2 \cdot \text{s})$)	误差/%
B1	104	8.01	45	7.785 5	8.45	8.54
B9	150	8.01	45	9.388 5	10.50	11.84
B13	90	8.01	60	5.982 3	6.49	8.49

2.3 冲击模型

基于 Fujikake 等^[18]的钢筋混凝土梁落锤冲击实验,验证本文的落石冲击模型. 验证模型的尺寸设置如图 4 所示,边界条件设置和钢筋及混凝土的材料参数取值与实验相同,落锤释放高度为 0.6 m.

冲击力的验证结果如图 5 所示,数值模拟所得冲击力时程曲线与实验值较为接近,其中数值模拟所得冲击力峰值与实验值的误差约为-5.2%,证明本文的冲击模型精度较高。

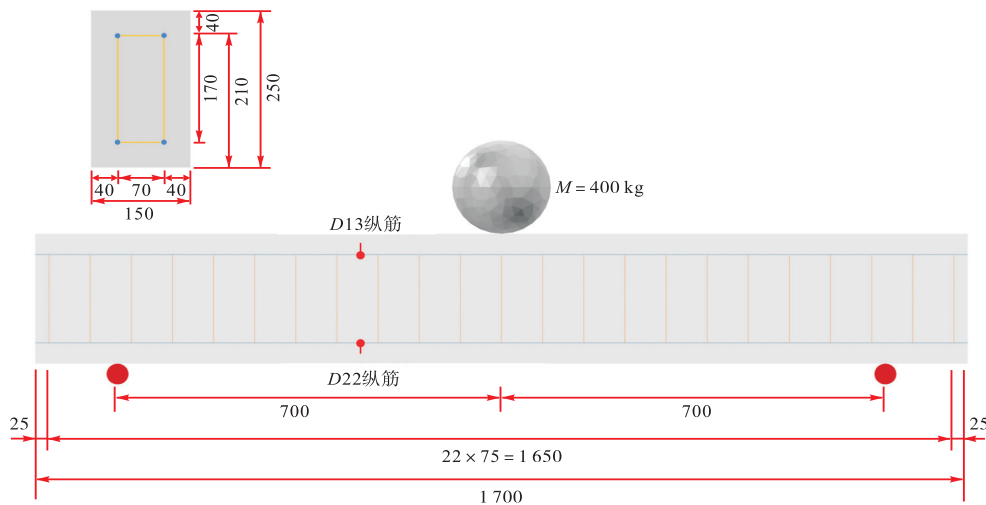


图 4 落锤冲击模型(单位: mm)

Fig.4 Drop hammer impact model (unit: mm)

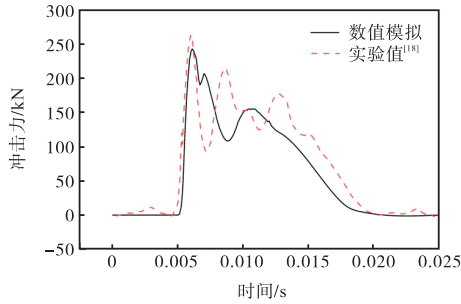


图5 冲击力时程曲线

Fig.5 Time-history curves of impact force

3 多灾害联合作用仿真流程

冲刷及磨蚀等水文灾害与崩塌落石等地质灾害

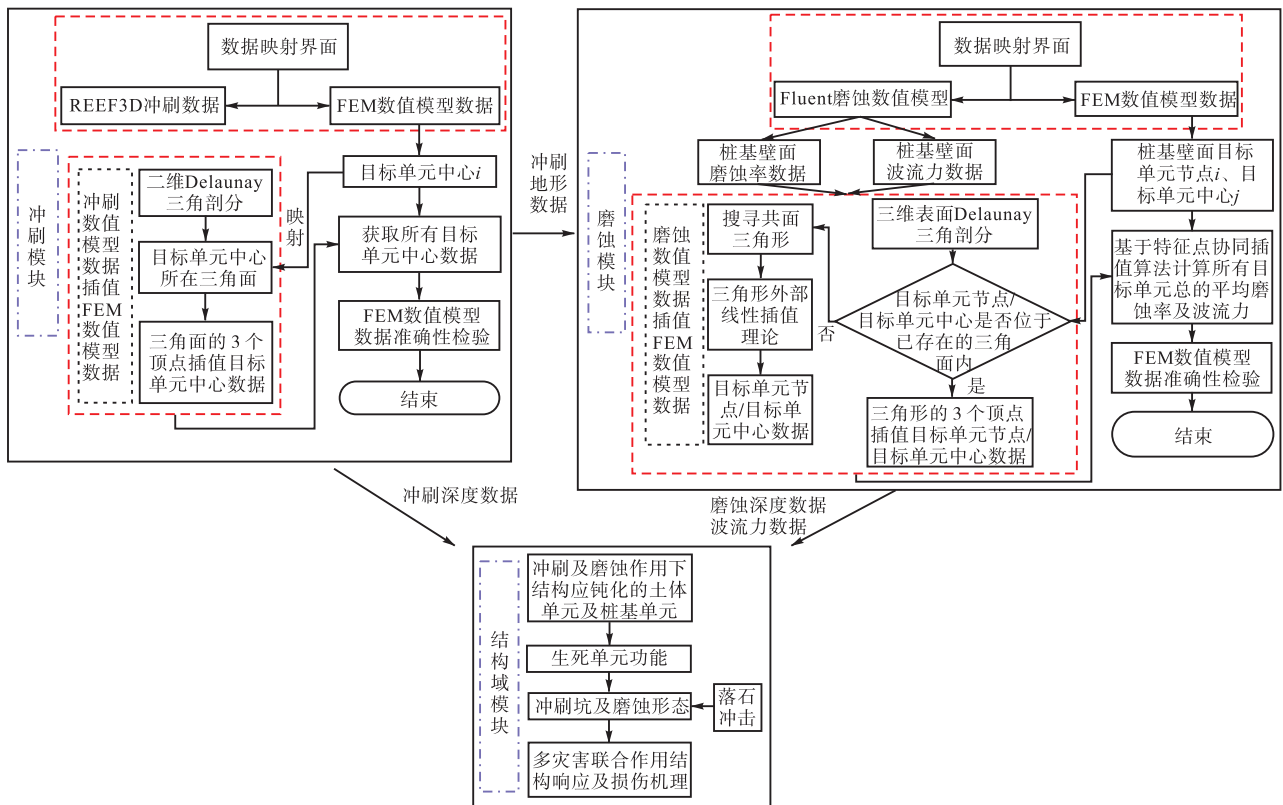


图6 多灾害联合作用仿真流程

Fig.6 Flow chart of simulation of multi-hazard joint action

首先,提取 REEF3D 冲刷地形数据(网格节点的坐标)存储为三维点集 P_i ;其次,利用 MATLAB 对 P_i 进行二维 Delaunay 三角剖分,生成 x - y 平面三角网;再次,搜寻结构域目标土体单元中心映射后所在的三角形;最后,根据土体单元中心所在三角形的顶点数据,按照图 7 所示的插值算法计算目标土体单元中心的冲刷深度.图 7 中 $P_1(x_1, y_1)$ 、 $P_2(x_2, y_2)$ 和 $P_3(x_3, y_3)$ 分别为目标单元中心 $P(x, y)$ 所在三角面的顶点,根据各点的位置关系构建下列插值关系式,即

的联合作用涉及细网格尺度的流体域计算和大网格尺度的结构域计算,由于两个计算域的网格差异较大,在进行流体域-结构域数据传递时,须采取相应的插值准则.本节首先针对冲刷模型数据,基于三角形内部插值理论,构建相应的数据传递方程;然后针对磨蚀模型数据,基于三角形内、外部插值理论及协同插值算法,构建磨蚀率及波流力数据传递方程;最后,分析相应数据传递准则的准确性.本文多灾害联合作用仿真流程如图 6 所示.

3.1 冲刷深度传递

本节基于散点插值理论对流体域冲刷深度数据进行三角剖分,以获取结构域土体单元中心的冲刷数据.

$$\begin{cases} x = \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \gamma_3 x_3 \\ y = \gamma_1 y_1 + \gamma_2 y_2 + \gamma_3 y_3 \\ \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 1 \end{cases} \quad (8)$$

式中 γ_i 为加权系数 ($i = 1, 2, 3$), 其计算公式为

$$\gamma_1 = \frac{A_1}{A}, \gamma_2 = \frac{A_2}{A}, \gamma_3 = \frac{A_3}{A} \quad (9)$$

式中: A 为图 7 中 $\triangle P_1 P_2 P_3$ 的面积; A_1 、 A_2 和 A_3 分别为 $\triangle P P_2 P_3$ 、 $\triangle P P_1 P_3$ 和 $\triangle P P_1 P_2$ 的面积.

基于线性关系可知,目标土体单元中心 $P(x, y)$

冲刷深度 z 由下式插值估计, 即

$$z = \frac{A_1}{A} z_1 + \frac{A_2}{A} z_2 + \frac{A_3}{A} z_3 \quad (10)$$

式中 z_1 、 z_2 和 z_3 分别为顶点 P_1 、 P_2 和 P_3 的冲刷深度。

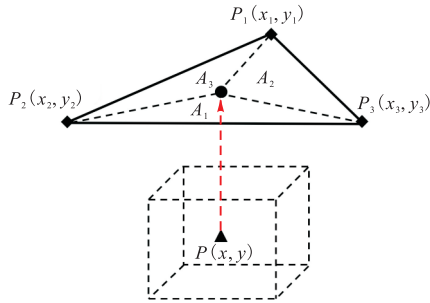
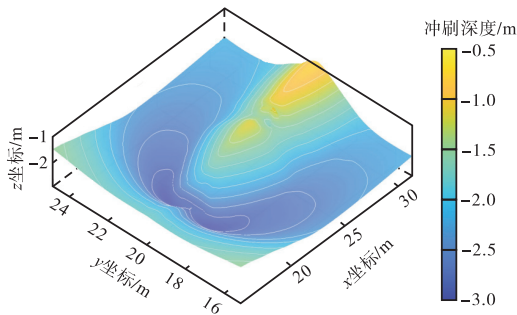


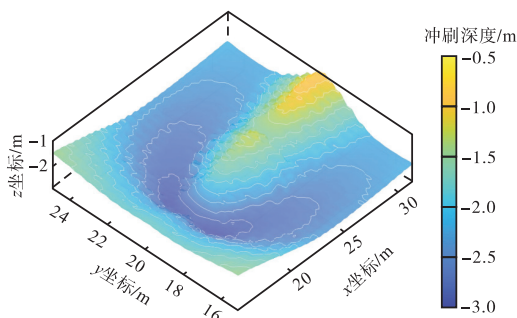
图 7 冲刷深度数据插值方法示意

Fig.7 Schematic of interpolation method for scour depth data

图 8(a) 为网格尺寸较小的流体域冲刷计算结果, 图 8(b) 为网格尺寸较大的结构域冲刷插值结果, 两者最大冲刷深度的相对误差仅为 0.006 8%, 证明插值函数的精度非常高。



(a) 流体域冲刷数值模拟结果



(b) 插值所得结构域冲刷地形

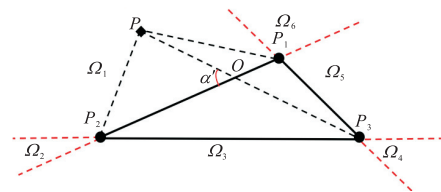
图 8 流体域及结构域冲刷结果

Fig.8 Scour results in fluid-domain and structural-domain

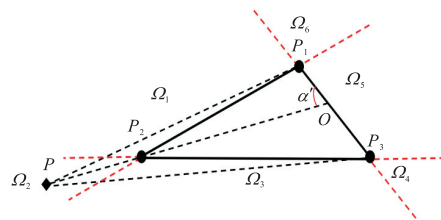
3.2 磨蚀深度传递

本节基于三角形内、外部插值理论, 构造磨蚀数据传递方程, 并运用协同插值算法计算结构域桩基单元的总平均磨蚀率, 然后换算出年平均磨蚀厚度, 并以此确定磨蚀后应钝化的单元数。

首先, 提取流体域桩基壁面各网格节点的平均磨蚀率, 并与其空间坐标一同存储为四维点集数据 ER_i ; 其次, 对 ER_i 进行三维表面 Delaunay 三角剖分, 形成节点包含磨蚀率数据的空间三角网; 将结构域桩基单元的特征点映射至该三角网, 若特征点位于三角网的某个三角形, 则基于式 (10) 插值其磨蚀率, 若特征点未包含于任意三角形, 则继续搜寻与其共面的三角形, 并根据图 9 所示的两类情况, 选择相应公式插值其磨蚀率。



(a) 结构域特征点位于边外侧区域



(b) 结构域特征点位于顶点外侧区域

图 9 结构域特征点位于流体域节点所形成三角面外部示意

Fig.9 Schematic of structural-domain feature points on the outside of triangular plane formed by fluid-domain nodes

由三角形外部线性插值理论可知, 当结构域特征点 P 位于区域 Ω_1 、 Ω_3 和 Ω_5 时, 其磨蚀率计算公式为

$$E_P^n = \frac{S_{\Delta PP_i P_j}}{S_{\Delta P_i P_j P_k}} E_i + \frac{S_{\Delta PP_i P_k}}{S_{\Delta P_i P_j P_k}} E_j - \frac{S_{\Delta PP_j P_k}}{S_{\Delta P_i P_j P_k}} E_k \quad (11)$$

同理, 当结构域特征点位于区域 Ω_2 、 Ω_4 和 Ω_6 时, 其磨蚀率计算公式为

$$E_P^n = \frac{S_{\Delta PP_i P_j}}{S_{\Delta P_i P_j P_k}} E_i - \frac{S_{\Delta PP_i P_k}}{S_{\Delta P_i P_j P_k}} E_j + \frac{S_{\Delta PP_j P_k}}{S_{\Delta P_i P_j P_k}} E_k \quad (12)$$

式 (11) 和 (12) 系数的具体取值见表 2。

基于特征点的平均磨蚀率, 采用协同插值算法^[19]计算其所属的桩基单元的总平均磨蚀率, 即

$$\begin{cases} E_{\text{avg}} = \gamma E_C + (1 - \gamma) E_N \\ E_N = \frac{1}{\lambda} \sum_{\delta=1}^{\lambda} E_{\delta} \end{cases} \quad (13)$$

式中: E_{avg} 、 E_C 、 E_N 和 E_{δ} 分别为结构域桩基单元的总平均磨蚀率、桩基单元中心的平均磨蚀率、桩基单

表2 公式系数取值

Tab.2 Coefficient values in formulas

区域	n	i'	j'	k'	a	b	c	d	e	f
Ω_1	1	1	2	3	2	3	1	3	1	2
Ω_2	2	2	1	3	1	3	2	3	1	2
Ω_3	3	2	3	1	1	3	1	2	2	3
Ω_4	4	3	1	2	1	2	2	3	1	3
Ω_5	5	1	3	2	2	3	1	2	1	3
Ω_6	6	1	2	3	2	3	1	3	1	2

元节点的最终平均磨蚀率和桩基单元各节点的平均磨蚀率,单位均为 $\text{kg}/(\text{m}^2 \cdot \text{s})$; $\gamma \in [0,1]$ 为权重系数,由 Simpson 公式推导得到其理论值为 $2/3$ 。

基于上述所得各桩基单元的总平均磨蚀率,根据式(14)^[7]换算出该单元的年平均磨蚀厚度 $h_{\text{avg,a}}$,并以

确定结构域中因磨蚀而须消去的桩基单元。

$$\begin{cases} E'_1 = E_{\text{avg}} \times 2\pi R \times H \\ E'_2 = E_1 T_{\text{total}} \\ h_{\text{avg,a}} = R - r \\ V = \pi(R^2 - r^2)H \\ E'_2 = V\rho_{\text{pier}} \end{cases} \quad (14)$$

式中: E'_1 为平均磨蚀质量, kg/s ; R 为磨蚀前桩基半径, m ; H 为桩基高度, m ; T_{total} 为洪水期(每年 6—8 月)总时间, s ; E'_2 为桩基每年洪水期的总磨蚀质量, kg ; r 为磨蚀后桩基的等效半径, m ; V 为桩基被磨蚀的总体积, m^3 ; ρ_{pier} 为桩基密度, kg/m^3 。

图 10(a)为流体域磨蚀计算结果,图 10(b)~(d)

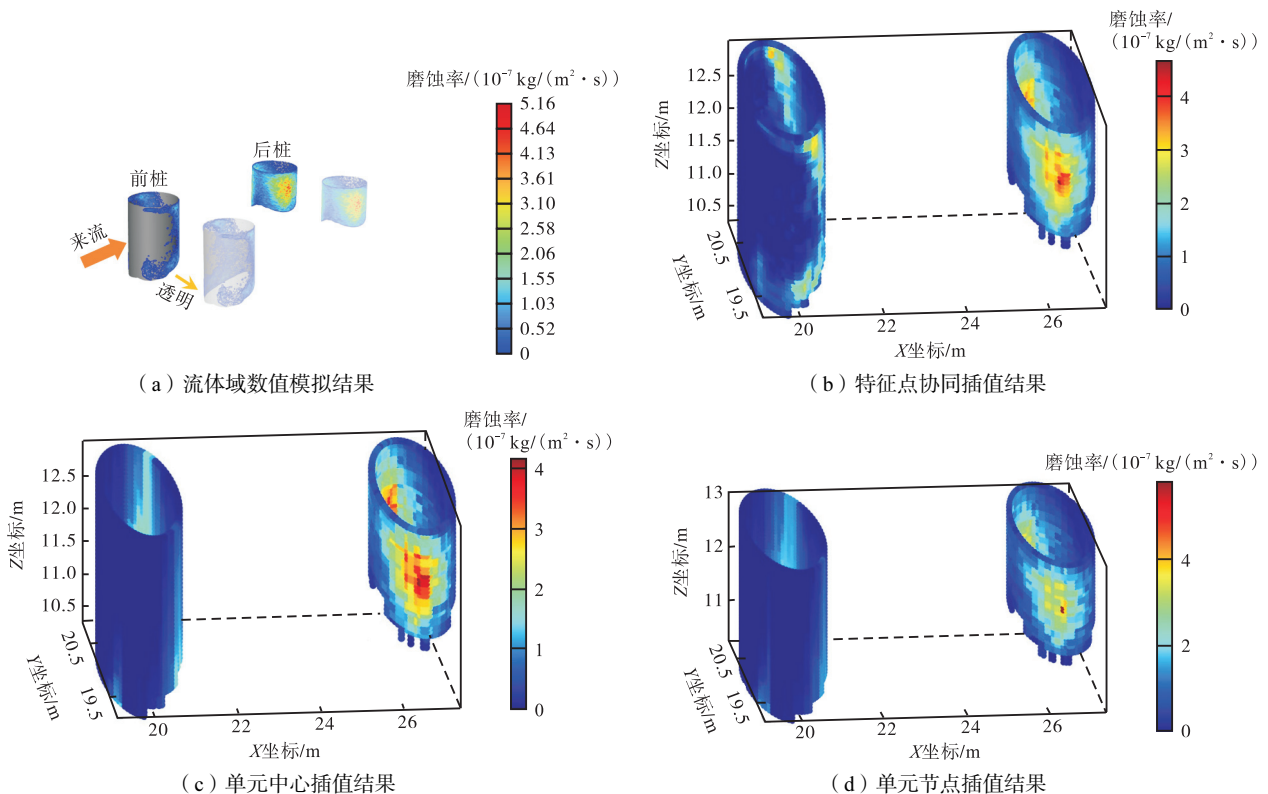


图 10 结构域不同插值点磨蚀率插值结果

Fig.10 Interpolation results of erosion rate at different interpolation points in structural-domain

给出了结构域不同插值点的磨蚀插值结果.图 11 为不同插值点插值结果与数值仿真结果的相对误差分析,其中特征点协同插值误差在前后桩均小于 10%,且小于单独选取单元节点或单元中心为插值点时的相对误差,证明所采用的基于三角形内外部插值理论的特征点协同插值算法精度较高。

3.3 波流力数据传递

波流力数据传递方式与上述磨蚀率数据传递等同,此处不再赘述。

从磨蚀模型各网格节点提取波流压强数据,乘

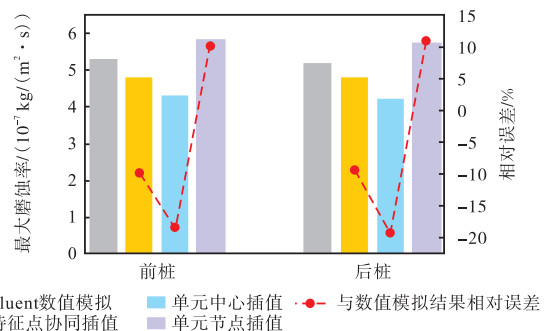


图 11 不同插值点相对误差分析

Fig.11 Relative error analysis for different interpolation points

以节点所占平均表面积即为波流力. 图 12 为采用协同插值算法计算所得前、后桩不同深度处波流力.

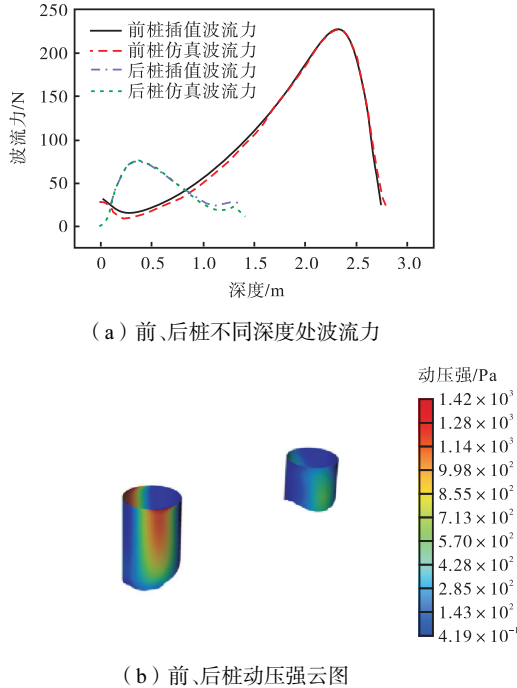


图 12 波流力插值结果

Fig.12 Interpolation results of flow forces

4 实桥应用

4.1 工程背景

本文工程案例为西南山区某六跨连续梁桥, 该桥左右分幅, 考虑到实际情况中右幅桥遭受多灾害作用概率更大, 本文仅以右幅桥为研究对象. 右幅桥上部结构采用 6 × 30 m 装配式部分预应力混凝土连续箱梁, 下部结构主要采用双柱式墩, 基础为钻孔灌注桩.

4.2 计算工况

案例桥梁已建成 20 a 有余, 考虑到实际情形中更为复杂的山区环境条件, 故在工况设置中将磨蚀时间取为 30 a. 此外, 根据 Melville 等^[20]的实验结果可知, 基础冲刷达到 80% 平衡冲刷深度的时间仅占达到最终平衡冲刷深度时间的 5% ~ 40%; Lança 等^[21]和 Choi 等^[22]提出的冲刷深度预测公式均在前 20% 的冲刷时间内已预测 80% 的平衡冲刷深度; Mohammadpour 等^[23]的实验结果表明, 80% ~ 90% 的最大冲刷深度出现在冲刷平衡时间的前 20% ~ 40%.

综上所述, 由于冲刷发展至 80% 平衡冲刷深度的时间较短, 故忽略该段时间内桩基的磨蚀. 假定桩基的磨蚀主要发展于从 80% 平衡冲刷深度至最终平衡冲刷深度, 因此后续磨蚀模型的构建将基于数值模

拟所得 80% 平衡冲刷深度时的冲刷地形.

本文在表 3 中种工况的基础上, 分别研究不同落石冲击速度、冲击角度及质量对冲击力峰值、冲击点位移峰值的影响. 所有工况的冲击时间均取为 0.03 s^[18], 仅考虑落石冲击桥墩中部, 假定落石为刚性小球, 基准半径 $R_b = 1.11$ m, 质量为 15 t, 冲击速度为 10 m/s, 冲击角度 α 为 90°, 密度取 2 600 kg/m³^[11], 不同质量的落石半径由密度换算.

表 3 案例桥梁计算工况

Tab.3 Calculation conditions of bridge in case study

工况	灾害组合
1	仅受崩塌落石冲击
2	80% 平衡冲刷深度地形下受崩塌落石冲击
3	80% 平衡冲刷深度地形下桩基磨蚀 30 a 并受崩塌落石冲击

4.3 模型构建

4.3.1 冲刷模型

由于 3 号桥墩及下部桩基为本文主要研究对象, 故针对 3 号桥墩及其桩基构建流-固-土耦合场 REEF3D 数值模型(图 13), 共划分 1 339 975 个网格. 流场 X 向长 46.45 m, Y 向宽 40.00 m, Z 向高 19.00 m (计算域长、宽均大于 8 D_s , 且前桩中心距入口大于 10 D_s ^[16], $D_s = 1.80$ m); 3 号桥墩半径为 0.90 m, 两墩中心的距离为 6.45 m; 承台长 9.45 m, 宽 2.30 m, 高 1.50 m; 桩基半径为 0.90 m, 两桩基中心的距离为 6.45 m; 桩基实际埋深 26.00 m, 此处为简化计算, 仅建模上层 13.00 m 厚土层, 初始水位高 16.00 m, 流速为 1 m/s. 泥沙参数及边界条件与第 2.1 节验证模型相同.

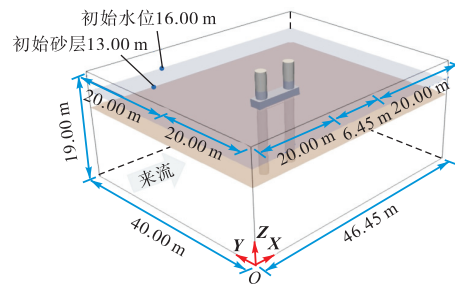


图 13 流-固-土耦合场 REEF3D 数值模型

Fig.13 REEF3D numerical model of fluid-structure-sediment coupled field

冲刷模拟结果如图 14 所示, 约在 25 000 s 后, 双桩的冲刷开始趋于平衡, 其中前桩的最大冲刷深度在 3.7 m 上下小范围内波动. 故本文取桩基的最大冲刷深度为 3.7 m.

提取 80% 平衡冲刷深度时的地形数据, 按照第

3.1 节所述插值方法获取结构域土体单元中心的冲刷深度,并在 ABAQUS 中利用生死单元功能钝化相应土体单元,所得结构域的冲刷坑形态如图 15 所示.

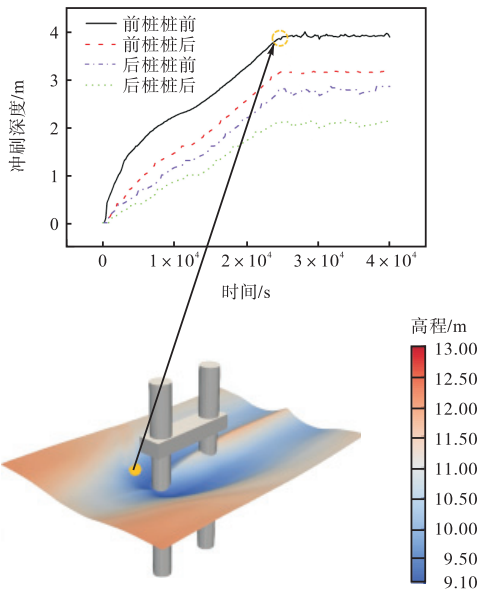


图 14 冲刷模型数值模拟结果
Fig.14 Numerical simulation results of scour model

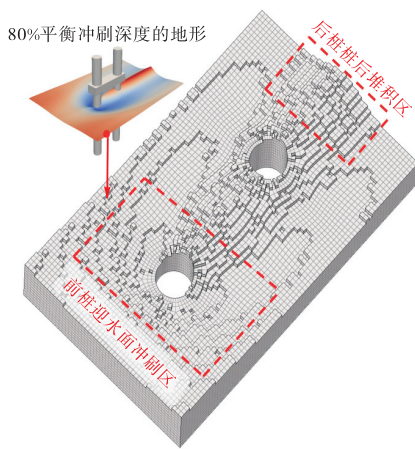


图 15 ABAQUS 中冲刷地形
Fig.15 Scour terrain in ABAQUS

4.3.2 磨蚀模型

根据第 4.2 节分析,基于 80% 平衡冲刷深度的冲刷地形构建桩基磨蚀模型(如图 16 所示),其中入流边界高度为 0.90 m,边界条件设置同第 2.2 节验证模型.仅对冲刷出露的桩基进行建模,因结构受力对磨蚀分析影响较小,故未考虑其影响.计算域共划分 2 062 212 个单元,含砂率为 0.57 kg/m³[8].

模拟结果显示(图 17),桩基磨蚀率约在达到 5.16 × 10⁻⁷ kg/(m² · s)后,开始趋于平衡.将该时刻磨蚀率按照式(14)换算为年平均磨蚀厚度,结果约为

3.5 mm,与文献[8]中桥梁墩柱水砂磨蚀损伤调查所得混凝土圆形墩柱的平均磨蚀厚度可按 3 ~ 5 mm/a 进行预测的结论一致.因此,本文取该时刻磨蚀率及磨蚀分布作为后续结构域桩基磨蚀插值的源数据.

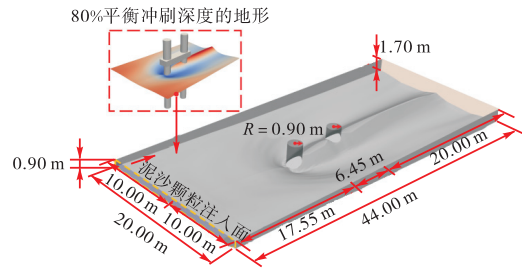


图 16 Fluent 磨蚀模型
Fig.16 Fluent erosion model

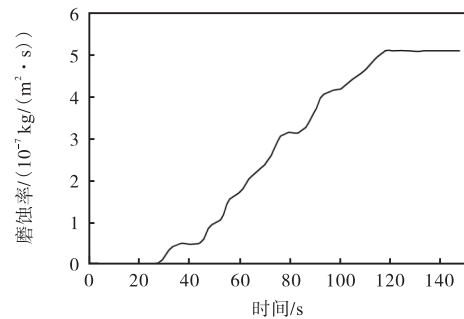


图 17 平均磨蚀率随时间变化曲线
Fig.17 Curve of average erosion rate versus time

依据第 3.2 节所述方法,由上述稳定时刻的桩基平均磨蚀率换算出年平均磨蚀厚度,并结合 ABAQUS 的生死单元功能,钝化相应的结构域单元,得桩基磨蚀 30 a 后的形态,如图 18 所示.

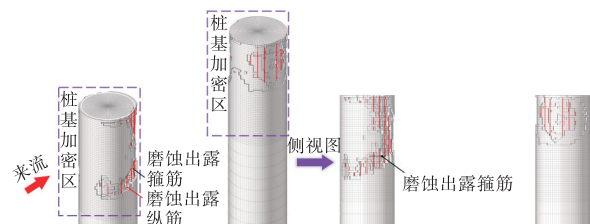


图 18 ABAQUS 中桩基磨蚀形态
Fig.18 Erosion patterns of piles in ABAQUS

4.3.3 多灾害联合作用模型

基于 ABAQUS 构建案例桥梁多灾害联合作用数值模型,选取案例桥梁的右幅桥共 6 跨建模(图 19).由于 3 号桥墩遭受多灾害作用的概率最大,故以实体单元对该位置建模,具体而言,采用四面体单元对盖梁、桥墩、承台进行划分,六面体单元对土体及桩基进行划分.为提高计算效率,对上部结构及其

余桥墩采用空间线性梁单元建模, 梁截面均采用“Generalized”截面, 忽略梁截面的变化^[24]. 钢筋采用桁架单元模拟, 使用“Embedded Region”功能模拟钢筋与混凝土的黏结作用. 初始荷载仅考虑结构自重, 模型共划分 666 915 个单元.

土体本构采用摩尔-库伦模型, 内摩擦角取 20°, 凝聚力屈服应力为 30 kPa^[25]. 波流力荷载(图 12)通过节点集中力形式施加于桩基表面. 计入混凝土材料非线性, 材料模型选择 CDP 模型, 桥墩混凝土的压缩和拉伸损伤本构如图 20(a)和(b)所示, 压缩和拉伸损伤因子如图 20(c)和(d)所示, 因本文落石冲击速度较低, 故未考虑应变率影响. 全桥模型材料属性取值见表 4.

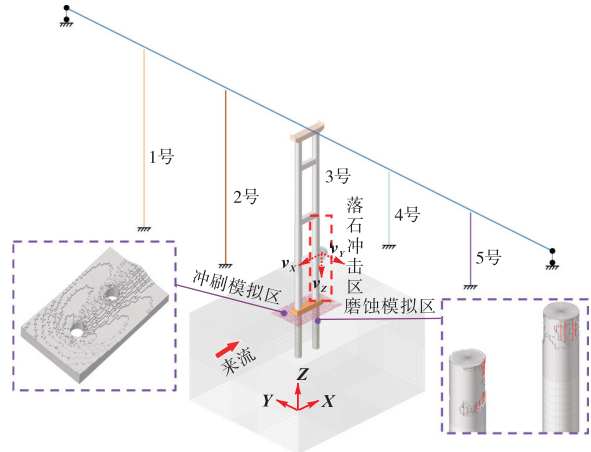


图 19 结构域多灾害联合作用数值模型
Fig.19 Numerical model of multi-hazard joint action in structural-domain

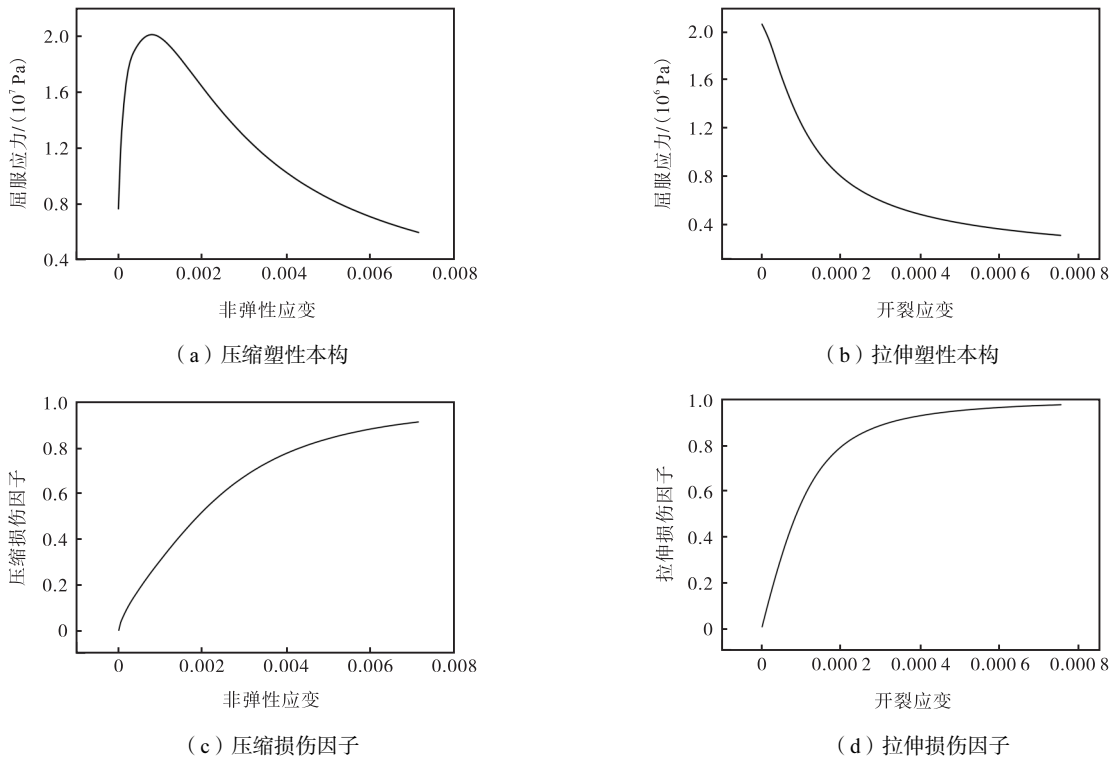


图 20 桥墩混凝土塑性损伤本构模型
Fig.20 Constitutive model for plastic damage in bridge pier concrete

表 4 单元材料属性

Tab.4 Element material properties

构件	密度/(kg/m ³)	泊松比	杨氏模量/MPa
主梁	2 500	0.20	34 500
盖梁	2 440	0.20	32 500
桥墩	2 360	0.20	30 000
承台	2 360	0.20	30 000
桩基	2 300	0.20	28 000
土体	2 650	0.35	10

桩基与土体的侧面和底面接触均设置为“General Contact”, 其余桥墩不计入桩基影响, 且底部设置为固结. 本桥共设置 7 个支座, 其中左、右桥

台以及 1 号、2 号、4 号和 5 号桥墩处的支座采用上下结构结点与结点之间的运动耦合约束来模拟, 且释放顺桥向(Y 方向)的约束. 3 号墩与主梁之间的约束采用“Proj 笛卡尔 + 对齐”连接截面来模拟^[24].

4.4 结果分析

4.4.1 不同冲击速度下冲击力与冲击位移

图 21 为不同冲击速度下桥墩的应力云图. 图 22(a)和(b)分别为无冲刷磨蚀(工况 1)、冲刷(工况 2)、冲刷磨蚀(工况 3)下不同落石冲击速度引起的桥墩冲击力、冲击点位移峰值对比. 由图 22(a)可知, 随冲击速度的增大, 各条件下冲击力峰值均非线性增大.

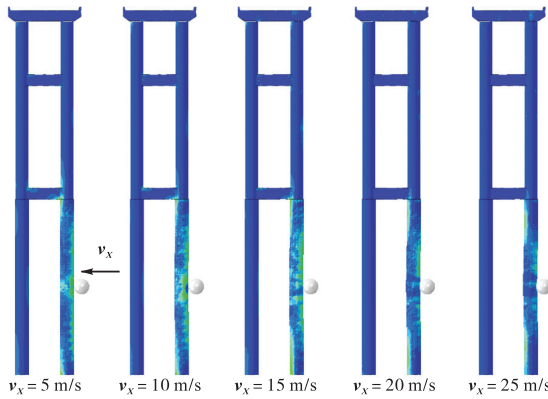
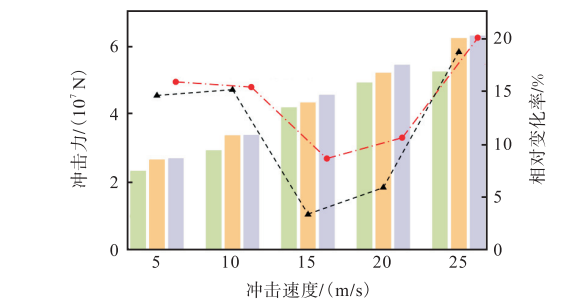
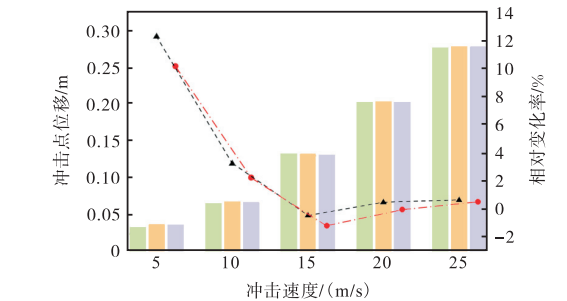


图 21 不同冲击速度下桥墩应力云图

Fig.21 Stress maps of bridge pier under different impact velocities



(a) 不同冲击速度下冲击力峰值变化



(b) 不同冲击速度下冲击点位移峰值变化

图 22 不同冲击速度下冲击力及冲击点位移变化

Fig.22 Variations in impact force and displacement at impact point under different impact velocities

对于所有的冲击速度,冲刷、冲刷磨蚀条件下冲击力峰值均大于无冲刷磨蚀情况,且与之相比,冲刷、冲刷磨蚀条件下冲击力峰值的增幅均呈现先减后增趋势,最大增幅分别约为 19% 和 20%。此外,对比工况 2 与工况 3 冲击力峰值变化规律可知,冲刷磨蚀条件下冲击力峰值均大于冲刷条件下的对应值,且桩基磨蚀对冲击力的影响是非线性的,即在不同冲击速度下,磨蚀造成的冲击力峰值增幅差异较大。

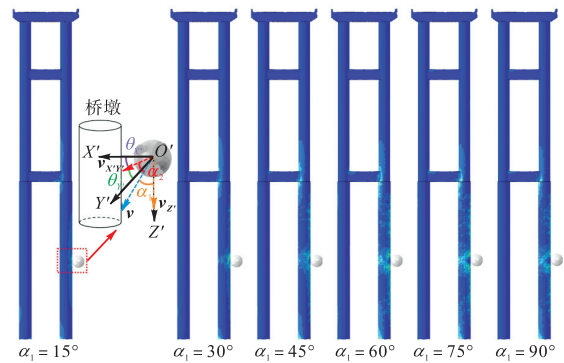
由图 22(b)可知各条件下冲击点位移峰值均随冲击速度的增大而增大。冲击速度为 15 m/s 时冲刷、

冲刷磨蚀条件下冲击点位移峰值小于无冲刷磨蚀下的对应值,在其余速度冲击下冲击点位移峰值均大于无冲刷磨蚀下的对应值,最大增幅分别为 13% 和 11%。同时,对于所有冲击速度,冲刷条件下冲击点位移峰值均大于考虑磨蚀情况下的对应值,侧面说明桩基磨蚀使得冲击点位移下降,最大降幅约为 2%。

4.4.2 不同三维冲击角度下冲击力与冲击位移

如图 23 所示,本节主要研究不同三维冲击角度下的结构响应。为提高计算效率, θ_x 和 θ_y 均取 45° 。

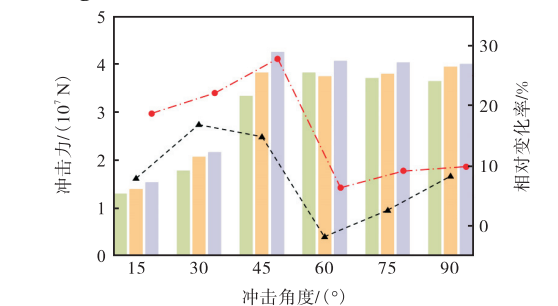
图 24(a) 和 (b) 分别为无冲刷磨蚀、冲刷、冲刷磨



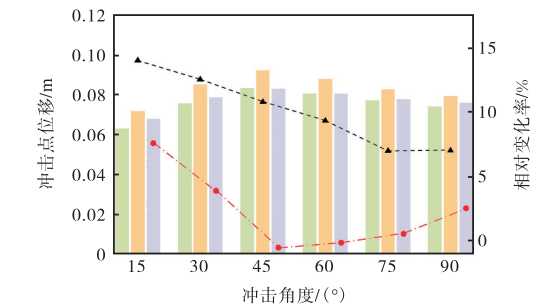
注: α_1 为速度矢量 v 与 Z' 轴夹角; α_2 为速度矢量 v 与 $X'-Y'$ 平面夹角; θ_x 为速度分量 $v_{x'}$ 与 X' 轴夹角; θ_y 为速度分量 $v_{y'}$ 与 Y' 轴夹角

图 23 不同冲击角度下桥墩应力云图

Fig.23 Stress maps of bridge pier under different impact angles



(a) 不同冲击角度下冲击力峰值变化



(b) 不同冲击角度下冲击点位移峰值变化

图 24 不同冲击角度下冲击力及冲击点位移变化

Fig.24 Variations in impact force and displacement at impact point under different impact angles

蚀条件下不同冲击角度的落石引起的桥墩冲击力、冲击点位移峰值对比. 由图 24(a)可知, 无冲刷磨蚀、冲刷磨蚀条件下, 随着冲击角度增大, 冲击力峰值呈现先增后减趋势; 冲刷条件下, 冲击力峰值呈现先增后减再增的趋势.

除冲击角度为 60°外, 其余冲击角时冲刷条件下冲击力峰值均大于无冲刷磨蚀情况, 其原因与桩基的不均匀冲刷有关. 当冲击角度与冲刷较深位置对应时, 造成的冲击力较大; 而对于所有的冲击角度, 冲刷磨蚀条件下冲击力峰值均大于无冲刷磨蚀情况下的冲击力峰值, 且最大增幅达 28%. 此外, 对比工况 2 与工况 3 下冲击力峰值变化规律可知, 冲刷磨蚀条件下冲击力峰值均大于冲刷条件下冲击力峰值, 但桩基磨蚀对冲击力的影响是非线性的, 如冲击角为 15°和 45°时, 磨蚀造成的冲击力增幅较大.

由图 24(b)可知, 各条件下冲击点位移峰值均随冲击角度的增大而先增后减. 此外, 对于所有的冲击角度, 冲刷条件下冲击点位移峰值均大于无冲刷磨蚀条件下位移峰值, 且最大增幅约为 14%. 值得注意的是, 桩基冲刷条件下考虑磨蚀将使得冲击点位移下降, 最大降幅约为 11%, 其原因为: 在冲刷磨蚀条件下, 混凝土的冲蚀将在结构局部引起微裂缝扩展并造成材料性能退化, 同时增加结构表面的不规则性; 扩展的微裂缝将吸收部分冲击能量, 导致较大比例的能量用于局部破坏和损伤而非通过桥墩的整体变形来吸收; 此外, 局部材料性能退化和不规则性增加将改变冲击能量的传递路径和分散方式, 使得冲击能量在局部快速耗散. 对比之下, 仅冲刷条件下结构整体保持相对均匀的刚度, 因此冲击能量将通过结构的弹塑性变形更均匀地传递和耗散, 故位移峰值较高.

4.4.3 不同落石质量下冲击力与冲击位移

图 25 为不同落石质量下桥墩的应力云图, 其中 R_0 为落石的半径. 图 26(a)和(b)分别为无冲刷磨蚀、冲刷、冲刷磨蚀条件下不同质量落石冲击桥墩引起的冲击力、冲击点位移峰值对比. 由图 26(a)可知, 随着落石质量增大, 各条件下冲击力峰值均呈现先增后减趋势, 但冲击力峰值下降的节点不同: 最先下降的为冲刷磨蚀工况, 然后为冲刷工况, 最后下降的为无冲刷磨蚀情况. 其原因为: 当落石质量持续增加, 桥墩开始进入塑性变形阶段, 更大比例的动能通过塑性变形和微裂缝扩展耗散, 桥墩混凝土直接吸收的能量降低, 故冲击力峰值开始下降; 桩基冲刷磨蚀将进一步削弱结构整体刚度, 桥墩更快产生塑性变形, 相应产生更多的微裂缝, 所耗散的冲击能量更大, 故各条件下冲击力峰值下降的节点出现差异.

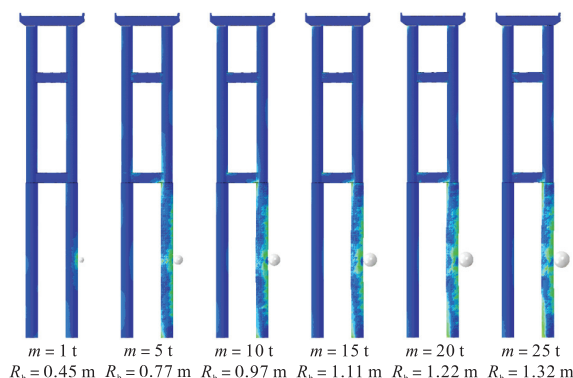
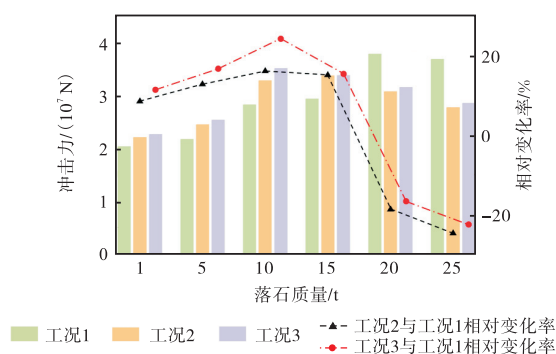
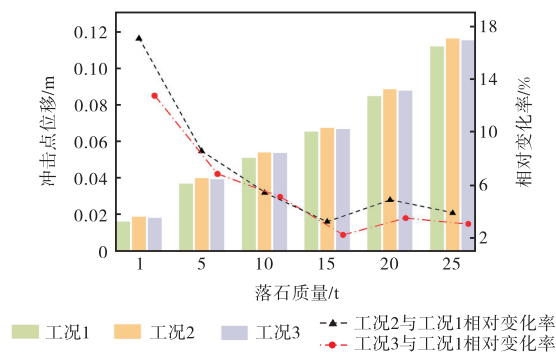


图 25 不同落石质量下桥墩应力云图
Fig.25 Stress maps of bridge pier under different masses of falling rock



(a) 不同落石质量下冲击力峰值变化



(b) 不同落石质量下冲击点位移峰值变化

图 26 不同落石质量下冲击力及冲击点位移变化
Fig.26 Variations in impact force and displacement at impact point under different masses of falling rock

在冲刷、冲刷磨蚀条件下, 当落石质量为 1 ~ 15 t 时, 冲击力峰值大于无冲刷磨蚀条件下的冲击力峰值, 而落石质量为 20 t 和 25 t 时, 无冲刷磨蚀条件下的冲击力更大, 其原因为: 冲刷、冲刷磨蚀条件下结构刚度降低, 当落石质量较小时, 重力对落石冲击过程的运动影响较小, 故冲击力峰值较大; 当落石质量较大时, 重力影响落石冲击过程中的运动, 且结构刚度下降导致吸收的冲击能量相对较小, 故冲击力峰值较小. 此外, 对比工况 2 与工况 3 下冲击力峰值变化

规律可知,冲刷磨蚀条件下冲击力峰值均大于冲刷条件。

由图 26(b)可知,各条件下冲击点位移峰值均随落石质量的增大而增大。此外,对于所有落石质量,冲刷、冲刷磨蚀条件下冲击点位移峰值均大于无冲刷磨蚀条件下冲击点位移峰值,且最大增幅分别约为 17% 和 13%,侧面说明桩基冲刷条件下考虑磨蚀将使得冲击点位移下降,且最大降幅在 4% 左右,其原因为:冲刷磨蚀条件下大部分冲击能量通过微裂缝进行耗散,且材料性能退化导致能量传递路径发生改变,造成冲击能量在局部快速分散,故冲击点位移峰值较小。

5 结 论

(1) 针对山区公路桥梁多灾害联合作用数值模拟,构建了基于三角剖分及特征点协同插值的数值仿真方法。分别为冲刷及磨蚀数据的传递推导相应数据传递方程,并验证插值方法的精度。基于生死单元功能,在结构域中考虑冲刷坑及桩基磨蚀形态。

(2) 随着冲击速度的增大,各条件下冲击力峰值均呈现非线性增大;随着冲击角度的增大,无冲刷磨蚀、冲刷磨蚀条件下冲击力峰值先增后减,而冲刷条件下冲击力峰值呈先增后减再增趋势;随着落石质量的增大,各条件下冲击力峰值均为先增后减,但各条件下峰值下降的节点不同。

(3) 在不同的冲击速度、冲击角度和落石质量条件下,与无冲刷磨蚀条件相比,冲刷、冲刷磨蚀条件下冲击力峰值的相对变化均呈非线性特征;此外,在桩基冲刷条件下,磨蚀对冲击力峰值的影响亦为非线性。

(4) 随着冲击速度、落石质量的增大,各条件下冲击点位移峰值均变大,但随着冲击角度的增大先增后减。此外,在本文中所有的冲击速度、冲击角度和落石质量条件下,冲刷磨蚀条件下冲击点位移峰值均小于冲刷条件下冲击点位移峰值,最大降幅分别约为 2%、11% 和 4%。

参考文献:

- [1] 张琛. 冲刷和船撞共同作用下桥梁结构动力响应研究[D]. 扬州:扬州大学建筑科学与工程学院, 2020.
Zhang Chen. Dynamic Response of Bridge Under Flood-induced Scour and Vessel Impact[D]. Yangzhou: College of Architectural Science and Engineering, Yangzhou University, 2020 (in Chinese).
- [2] Fan W, Sun Y, Yang C C, et al. Assessing the response and fragility of concrete bridges under multi-hazard effect of vessel impact and corrosion[J]. Engineering Structures, 2020, 225: 111279.
- [3] Guo X, Zhang C, Chen Z Q. Dynamic performance and damage evaluation of a scoured double-pylon cable-stayed bridge under ship impact[J]. Engineering Structures, 2020, 216: 110772.
- [4] 熊文, 张嵘钊, 石惠铎. 基于细-宏观数据交互的桥梁水毁数值仿真[J]. 中国公路学报, 2022, 35(9): 257-268.
Xiong Wen, Zhang Rongzhao, Shi Huiduo. Numerical simulation of hydraulic bridge failure based on data translation of different scales[J]. China Journal of Highway and Transport, 2022, 35(9): 257-268 (in Chinese).
- [5] Song S T, Hu T F, Chiou D J. Influence of riverbed scour on the performance of bridges subjected to lateral seismic loads[J]. Journal of Earthquake Engineering, 2022, 26(5): 2251-2282.
- [6] Zhang D N, Xiong W, Ma X L, et al. Fragility evaluation of bridge shallow foundation piers under floods by coupling simulation in structural and hydraulic fields[J]. Ocean Engineering, 2024, 311: 118952.
- [7] Duan L L, Liang S L, Zhou J T, et al. Numerical study on erosion of mono-pier in hyper concentrated flow environment[J]. Ocean Engineering, 2024, 292: 116519.
- [8] 余志祥, 张蓬勃, 赵雷, 等. 山区桥梁墩柱水沙磨蚀损伤调查与仿真分析[J]. 防灾减灾工程学报, 2016, 36(6): 919-926.
Yu Zhixiang, Zhang Pengbo, Zhao Lei, et al. Investigation and numerical calculation of bridge pier in mountain area under erosion of flow and sediment[J]. Journal of Disaster Prevention and Mitigation Engineering, 2016, 36(6): 919-926 (in Chinese).
- [9] 梁晓岑. 高速含沙水流磨蚀下桥墩承载力退化分析[D]. 青岛:中国石油大学(华东)储运与建筑工程学院, 2019.
Liang Xiaocen. Degradation Analysis of Bridge Pier Bearing Capacity Under Abrasion of High-Speed Sediment-Laden Flow[D]. Qingdao: College of Pipeline and Civil Engineering, China University of Petroleum (East China), 2019 (in Chinese).
- [10] Li F, Liu Y K, Yang J. Durability assessment method

- of hollow thin-walled bridge piers under rockfall impact based on damage response surface[J]. *Sustainability*, 2022, 14(19): 12196.
- [11] Xie R H, Fan W, Liu B, et al. Dynamic behavior and vulnerability analysis of bridge columns with different cross-sectional shapes under rockfall impacts[J]. *Structures*, 2020, 26: 471-486.
- [12] Sheldon G L, Finnie I. On the ductile behavior of nominally brittle materials during erosive cutting[J]. *Journal of Engineering for Industry*, 1966, 88(4): 387-392.
- [13] Finnie I, Shaw M C. The friction process in metal cutting[J]. *Transactions of the ASME*, 1956, 78(8): 1649-1653.
- [14] Finnie I, McFadden D H. On the velocity dependence of the erosion of ductile metals by solid particles at low angles of incidence[J]. *Wear*, 1978, 48(1): 181-190.
- [15] Roulund A, Sumer B M, Fredsøe J, et al. Numerical and experimental investigation of flow and scour around a circular pile[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 2005, 534: 351-401.
- [16] Gautam S, Dutta D, Bihs H, et al. Three-dimensional computational fluid dynamics modelling of scour around a single pile due to combined action of the waves and current using Level-Set method[J]. *Coastal Engineering*, 2021, 170: 104002.
- [17] Liu Q, Li L, Andersen L V, et al. Studying the abrasion damage of concrete for hydraulic structures under various flow conditions[J]. *Cement and Concrete Composites*, 2023, 135: 104849.
- [18] Fujikake K, Li B, Soeun S. Impact response of reinforced concrete beam and its analytical evaluation[J]. *Journal of Structural Engineering*, 2009, 135(8): 938-950.
- [19] Dou W Y, Zhang L L, Chen G, et al. A combined radial basis function based interpolation method for fluid-structure interaction problems and its application on high-speed trains[J]. *Advances in Engineering Software*, 2019, 131: 143-152.
- [20] Melville B W, Chiew Y M. Time scale for local scour at bridge piers[J]. *Journal of Hydraulic Engineering*, 1999, 125(1): 59-65.
- [21] Lança R M, Fael C S, Maia R J, et al. Clear-water scour at comparatively large cylindrical piers[J]. *Journal of Hydraulic Engineering*, 2013, 139(11): 1117-1125.
- [22] Choi S U, Choi B. Prediction of time-dependent local scour around bridge piers[J]. *Water and Environment Journal*, 2016, 30(1/2): 14-21.
- [23] Mohammadpour R, Ghani A AB, Azamathulla H M. Estimation of dimension and time variation of local scour at short abutment[J]. *International Journal of River Basin Management*, 2013, 11(1): 121-135.
- [24] 高春阳. 极端灾害条件下连续梁桥的动力响应分析[D]. 武汉: 华中科技大学土木与水利工程学院, 2022.
Gao Chunyang. Dynamic Response Analysis of a Continuous Girder Bridge Under Extreme Disaster Conditions[D]. Wuhan: School of Civil and Hydraulic Engineering, Huazhong University of Science and Technology, 2022 (in Chinese).
- [25] 朱向荣, 王金昌. ABAQUS 软件中部分土模型简介及其工程应用[J]. *岩土力学*, 2004, 25(增2): 144-148.
Zhu Xiangrong, Wang Jinchang. Introduction to partly soil models in ABAQUS Software and their application to the geotechnical engineering[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2004, 25(Suppl 2): 144-148 (in Chinese).

(责任编辑:武立有)