

DOI:10.11784/tdxbz202409023

螺旋锥齿轮热致齿面加工误差建模及实验验证

景秀并¹, 王洋洋¹, 邢侃^{1,2}, 李正霖¹, 宋晓菲¹, 王福军¹

(1. 天津大学机械工程学院, 天津 300350; 2. 通用技术天津第一机床有限公司, 天津 300385)

摘要: 为了研究五轴数控铣齿机热误差对螺旋锥齿轮齿面误差的影响, 基于传统铣齿机的加工原理与啮合理论, 构建展成法铣齿加工运动模型和螺旋锥齿轮齿面方程, 并利用旋转投影法推得理论齿面的离散点坐标. 通过构建五轴数控铣齿机与传统铣齿机的运动等效关系, 获得齿面离散点对应的各运动轴坐标. 基于多体理论和热特性实验数据, 建立五轴数控铣齿机的空间热误差模型, 求得机床末端刀尖点-工件的相对误差, 进而构建机床热误差与螺旋锥齿轮齿面误差的映射关系, 获得齿面预测误差. 现场试切实验表明, 预测误差与实测值之间的均方根误差为 2.57 μm , 齿面偏差的整体变化趋势基本一致, 所提出的方法能够预测机床热误差影响下的螺旋锥齿轮齿面误差.

关键词: 螺旋锥齿轮; 啮合原理; 齿面误差方程; 多体理论

中图分类号: TH132

文献标志码: A

文章编号: 0493-2137(2025)10-1095-12

Modeling and Experimental Validation of Thermally Induced Tooth Surface Machining Errors in Spiral Bevel Gear

Jing Xiubing¹, Wang Yangyang¹, Xing Kan^{1,2}, Li Zhenglin¹, Song Xiaofei¹, Wang Fujun¹

(1. School of Mechanical Engineering, Tianjin University, Tianjin 300050, China;

2. Genertec Tianjin No.1 Machine Tool Co., Ltd., Tianjin 300385, China)

Abstract: This study investigates the effect of thermal errors in five-axis CNC gear milling machines on the tooth surface accuracy of spiral bevel gears. Based on the machining principle of traditional gear milling machines and meshing theory, the kinematic model of gear milling based on the generating method and the tooth surface equation of spiral bevel gears were constructed. Using the rotational projection method, this study derived the coordinates of discrete points on the theoretical tooth surface. By establishing a motion equivalence relationship between five-axis CNC gear milling machines and traditional milling machines, the corresponding axis coordinates for each separate tooth surface point were obtained. Based on multibody system theory and experimental thermal characterization data, a spatial thermal error model was developed for the five-axis CNC gear milling machine. The model identified the relative position errors between the tool tip and the workpiece at the machine's endpoint. The mapping relationship between the thermal errors of the machine tool and the resulting tooth surface errors of spiral bevel gears was subsequently established, enabling the prediction of tooth surface deviations. Field cutting experiments showed that the root mean square error between the predicted and measured tooth surface error was 2.57 μm . The overall tooth surface deviation pattern aligned well with the model predictions. The proposed method effectively predicts tooth surface errors in spiral bevel gears caused by machine tool thermal errors.

Keywords: spiral bevel gear; meshing principle; tooth surface error equation; multibody theory

螺旋锥齿轮作为实现相交轴运动传递的基础元件, 具有负载能力强、传动平稳、重合度高等优势, 是

汽车、船舶、航天等领域中的重要零部件^[1]. 由于机床误差的影响, 实际加工的齿面与理论齿面存在较大

收稿日期: 2024-09-23; 修回日期: 2024-12-11.

作者简介: 景秀并 (1975—), 女, 博士, 副教授, jingxiubing@tju.edu.cn.

通信作者: 邢侃, xingkan@gt.cn.

基金项目: 天津市科技计划资助项目 (24PTGTOY00100).

Supported by the Tianjin Science and Technology Plan Project (No. 24PTGTOY00100).

的齿形误差,进而影响齿轮的传动性能.

许多学者通过修改机床调整参数减少齿面偏差,提高螺旋锥齿轮的传动性能. Xiang 等^[2]研究了齿面对机床调整参数变化的灵敏度矩阵,并提出了一种非线性优化方法,实现了小轮表面偏差的最小化. 吴聪等^[3]研究了机床调整参数误差对双重螺旋法加工的螺旋锥齿轮小轮齿面误差的影响规律,构建了机床调整参数误差与齿面误差的映射关系. 汪中厚等^[4]对螺旋锥齿轮接触线进行拓扑网格划分,引入数字化合成误差概念,实现含有齿形误差和安装误差的螺旋锥齿轮的数字化真实齿面的构建.

齿形误差主要由机床调整参数、刀具误差、安装误差、机床运动误差等因素综合引起,对于螺旋锥齿轮机床运动误差对齿面误差影响的研究相对较少. 唐进元等^[5]研究了机床各轴运动误差对螺旋锥齿轮的齿面加工质量影响的定量分析方法,并建立螺旋锥齿轮齿面通用模型分析安装误差对齿面接触质量的联系. Bruyère 等^[6]提出较为全面的误差种类,包括安装误差、机床调整参数误差、几何运动误差等,但未提及热误差对齿面误差的影响. 在加工过程中,机床受到内、外热源以及环境温度等因素的影响,导致机床的结构发生热变形,进而改变刀具和工件之间的相对位置,最终影响螺旋锥齿轮的加工质量.

本文以螺旋锥齿轮大轮展成法加工为例,基于啮合原理和旋转投影法,构建螺旋锥齿轮齿面方程并求解齿面离散点坐标. 通过五轴数控铣齿机与传统铣齿机床的运动等效关系,建立五轴机床对应的运动坐标. 开展五轴数控铣齿机热特性实验,并结合多体理论,求得铣齿机的末端热误差,进而构建机床热误差影响下的齿面误差. 最后通过齿轮试切实验验证了螺旋锥齿轮齿面误差模型的准确性.

1 螺旋锥齿轮齿面数学模型

螺旋锥齿轮通常按照“假想平顶齿轮”原理进行展成加工^[7]. 在机械摇台式机床切齿加工过程中,刀盘绕自身轴线高速旋转,同时随摇台摆动,模拟假想平顶齿轮(产形轮)与工件齿轮相啮合的齿,产形轮与工件齿轮一起按照一定的滚比做无隙啮合运动,在齿坯上切出齿槽^[8],如图 1 所示. 螺旋锥齿轮齿面方程可通过产形轮齿面方程,并结合产形轮与齿坯的空间相对位置和相对运动关系求得^[7-9].

1.1 刀具数学建模

双面刀盘由外切刀片和内切刀片交替安装,可以

同时加工齿槽两侧表面^[9]. 如图 2 所示为刀具内切圆锥面,建立刀具坐标系 $O_t-x_t y_t z_t$,得到刀具运动锥面在刀盘坐标系中的径矢 r_t 和单位法矢 n_t ,其计算式^[10]分别为

$$r_t(u, \theta) = \begin{bmatrix} (r \pm u \sin \alpha) \cos \theta \\ (r \pm u \sin \alpha) \sin \theta \\ -u \cos \alpha \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$n_t = \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \theta \\ \cos \alpha \sin \theta \\ \pm \sin \alpha \end{bmatrix} \quad (2)$$

式中: u 和 θ 为刀具切削面参数; α 为刀具齿形角; r 为刀尖点到刀具坐标系原点的距离. 式中正号用于表示外刀锥面,负号用于表示内刀锥面.

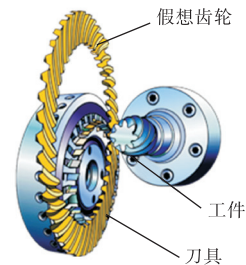


图 1 螺旋锥齿轮切齿原理示意

Fig.1 Schematic of the cutting principle of spiral bevel gears

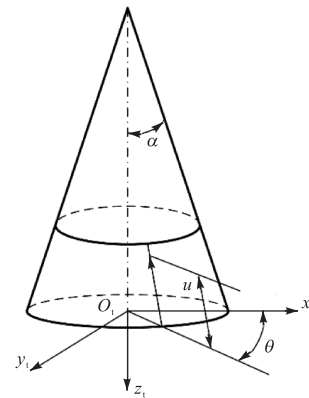


图 2 刀具切削锥面

Fig.2 Cutting cone surface of a cutting tool

1.2 展成法加工齿面方程

根据文献[11-12]建立齿轮展成法切齿坐标系,如图 3 所示. $O_0-x_0 y_0 z_0$ 为与机床固连的机床坐标系; $O_t-x_t y_t z_t$ 为刀盘坐标系,与刀盘固连; $O_w-x_w y_w z_w$ 为轮坯坐标系,与待加工的齿轮轮坯固连; $O_a-x_a y_a z_a$ 、 $O_b-x_b y_b z_b$ 、 $O_c-x_c y_c z_c$ 和 $O_d-x_d y_d z_d$ 为辅助坐标系; S 为径向刀位; q 为角向刀位; φ_0 是产形轮转角; φ_2 为齿轮加工转角; δ_M 为机床安装根锥角; X_B 为床位; X_w

轴向轮位； E 为垂直轮位。

产形轮的径矢和法矢为式(3)、(4)，齿轮的径矢和法矢为式(5)、(6)。

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{M}_{0c} \cdot \mathbf{M}_{ct} \cdot \mathbf{r}_t \quad (3)$$

$$\mathbf{n}_0 = \mathbf{H}_{0c} \cdot \mathbf{H}_{ct} \cdot \mathbf{n}_t \quad (4)$$

$$\mathbf{r}_w = \mathbf{M}_{wd} \cdot \mathbf{M}_{db} \cdot \mathbf{M}_{ba} \cdot \mathbf{M}_{a0} \cdot \mathbf{M}_{0c} \cdot \mathbf{M}_{ct} \cdot \mathbf{r}_t \quad (5)$$

$$\mathbf{n}_w = \mathbf{H}_{wd} \cdot \mathbf{H}_{db} \cdot \mathbf{H}_{ba} \cdot \mathbf{H}_{a0} \cdot \mathbf{H}_{0c} \cdot \mathbf{H}_{ct} \cdot \mathbf{n}_t \quad (6)$$

式中： \mathbf{M}_{wd} 、 \mathbf{M}_{db} 、 \mathbf{M}_{ba} 、 \mathbf{M}_{a0} 、 \mathbf{M}_{0c} 、 \mathbf{M}_{ct} 为坐标变换矩阵； \mathbf{H}_{wd} 是将 \mathbf{M}_{wd} 去掉最后一行和最后一列而得，其余以此类推。

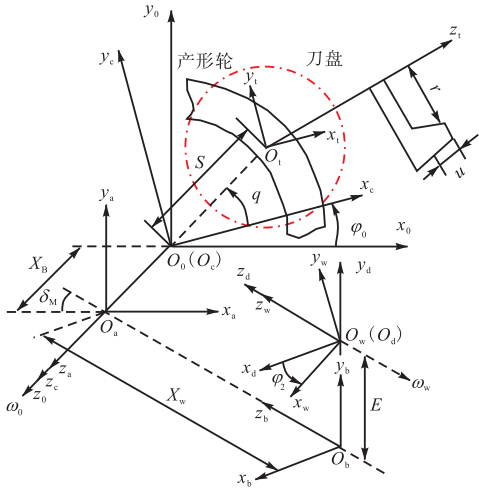


图3 大轮展成法加工坐标系

Fig.3 Coordinate system for the large gear generating method

由于产形轮齿面和齿轮齿面是一对共轭曲面^[13]，如图4所示，两个曲面的啮合点^[14]需要满足

$$\mathbf{r}_w = \mathbf{r}_e + \mathbf{r}_0 \quad (7)$$

$$\mathbf{n} = \mathbf{n}_w = \mathbf{n}_0 \quad (8)$$

$$\mathbf{V}_{0w} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (9)$$

式中： \mathbf{r}_0 为产形轮齿面上 M 点在机床坐标系中的径矢； \mathbf{r}_w 为齿轮上与 M 点共轭啮合的 Q 点在齿轮坐标系中的径矢； \mathbf{r}_e 为齿轮坐标系原点 O_w 到机床坐标系原点 O_0 的矢量在机床坐标系中的表示； \mathbf{n}_0 为 M 点在机床坐标系中的法矢； \mathbf{n}_w 为 Q 点在齿轮坐标系中的

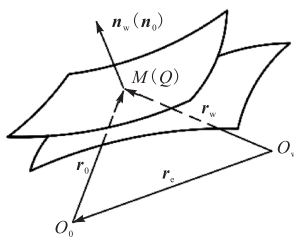


图4 两运动曲面的接触传动

Fig.4 Contact transmission between two moving surfaces

法矢； \mathbf{V}_{0w} 为两个曲面在机床坐标系中的相对运动速度。

使用展成法进行齿轮加工时，产形轮齿面上 M 点和齿轮齿面上 Q 点的相对运动速度 \mathbf{V}_{0w} 可以表示为

$$\mathbf{V}_{0w} = \mathbf{V}_0 - \mathbf{V}_w = \boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{r}_0 - \boldsymbol{\omega}_w \times (\mathbf{r}_e + \mathbf{r}_0) \quad (10)$$

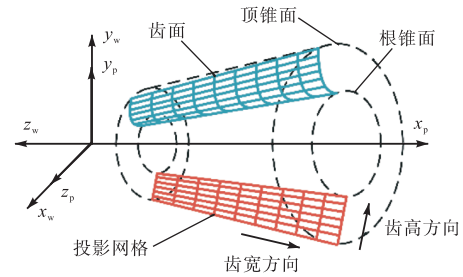
$$\mathbf{r}_e = \mathbf{O}_w \mathbf{O}_0 = \begin{bmatrix} -x_w \cos \delta_M \\ -E \\ -x_b - x_w \sin \delta_M \end{bmatrix} \quad (11)$$

式中： $\boldsymbol{\omega}_0$ 为产形轮角速度； $\boldsymbol{\omega}_w$ 为齿轮角速度。两者满足 $\boldsymbol{\omega}_w = i_{w0} \boldsymbol{\omega}_0$ ， i_{w0} 为滚比。

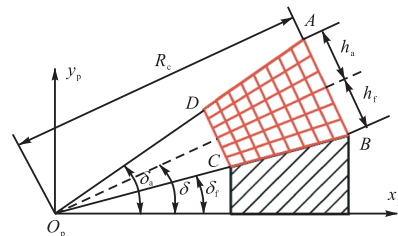
联立式(1)~(11)即可求得齿轮展成法加工齿面方程。

1.3 螺旋锥齿轮齿面离散点坐标计算

利用轴截面投影的方法，对齿面网格点进行约束，通过构建齿面啮合方程与轴截面投影对应关系的非线性方程组，求解出各齿面点坐标^[15]。在轮齿轴剖面上沿根锥的齿宽方向和齿高方向划分网格，网格的疏密程度根据计算点的数目和精度选取。本文在齿高方向上划分了7行网格点，在齿宽方向上划分了9列网格点，如图5所示。其中 $O_w-x_w y_w z_w$ 为轮坯坐标系， $O_p-x_p y_p z_p$ 为辅助坐标系。根据外锥距 R_e 、齿顶高 h_a 、齿根高 h_f 、节锥角 δ 、面锥角 δ_a 和根锥角 δ_f 即可求得各网格点坐标。



(a) 齿面旋转投影关系



(b) 齿面投影网格

图5 齿面投影

Fig.5 Tooth surface projection

在轮坯坐标系 $O_w-x_w y_w z_w$ 中，齿面上一点的径矢可表示为

$$r_w = \begin{bmatrix} x_w(u, \theta, \varphi_0) \\ y_w(u, \theta, \varphi_0) \\ z_w(u, \theta, \varphi_0) \end{bmatrix} \quad (12)$$

根据齿轮齿面网格和其轴截面网格之间的旋转投影关系, 可得

$$\begin{cases} z_w(u, \theta, \varphi_0) = -x_{ijp} \\ x_w^2(u, \theta, \varphi_0) + y_w^2(u, \theta, \varphi_0) = y_{ijp}^2 \end{cases} \quad (13)$$

式中: $i=1, 2, \dots, 7$; $j=1, 2, \dots, 9$; (x_{ijp}, y_{ijp}) 为齿面上任一点的二维坐标。

联立式(9)和(13), 利用迭代法得到刀盘参数 u 、 θ 和产形轮转角参数 φ_0 。将其代入式(12)求得到在轮坯坐标系中的齿面离散点的坐标。

2 五轴数控铣齿机热误差与齿面误差映射关系

2.1 五轴数控铣齿机结构模型

本文以 YKH2235 螺旋锥齿轮数控铣齿机为研究对象, 其结构如图 6 所示。机床主要部件有床身、立柱、主轴箱、工件箱、回转台等结构。该机床取消了传统式铣齿机床中的摇台结构, 用 x 轴和 y 轴的圆弧插补运动来代替原摇台结构的旋转运动。在展成法加工齿轮时, 由工件和主轴的旋转运动与 x 轴和 y 轴的圆弧插补运动保持联动以实现展成关系。 z 轴的进给运动控制进给量与齿轮齿深, B 轴控制机床安装根锥角, 在加工时其不与其他数控轴联动。 A 轴控制齿坯的分度运动, 在加工中运动缓慢。所以本文仅考虑 x 、 y 、 z 轴和 S 轴(主轴)的热误差对齿面的影响。

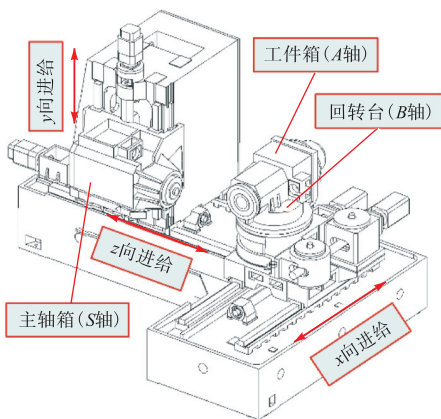


图 6 五轴数控铣齿机床结构模型

Fig.6 Structural model of the five-axis CNC gear milling machine

2.2 五轴数控铣齿机运动模型

根据图 6 的机床结构模型, 建立展成法加工大轮的数控铣齿机运动坐标系, 如图 7 所示。其中

$O_0-x_0y_0z_0$ 为机床坐标系; $O_g-x_gy_gz_g$ 为回转台坐标系; $O_t-x_t y_t z_t$ 为刀具坐标系; $O_{w2}-x_{w2}y_{w2}z_{w2}$ 为轮坯坐标系; $O_c-x_cy_cz_c$ 、 $O_k-x_ky_kz_k$ 和 $O_h-x_hy_hz_h$ 为辅助坐标系; L 为回转台旋转中心至齿轮设计交叉点距离。

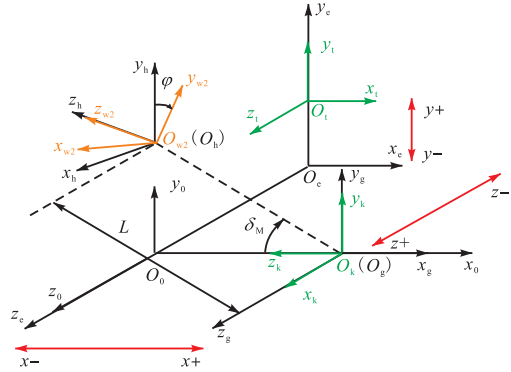


图 7 数控机床运动坐标系

Fig.7 Motion coordinate system of CNC machine tools

建立从刀具坐标系到轮坯坐标系的变换矩阵, 即

$$M_{w2t} = M_{w2h} \cdot M_{hk} \cdot M_{kg} \cdot M_{g0} \cdot M_{0c} \cdot M_{ct} \quad (14)$$

令五轴数控铣齿机的变换矩阵 M_{w2t} 与摇台式铣齿机的变换矩阵 M_{wt} 对应相等, 得到数控铣齿机各轴运动参数与摇台式铣齿机运动参数的对应关系, 如式(15)所示, 由此可以求出齿面网格各点所对应的机床各轴运动位置。

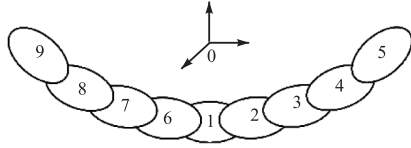
$$\begin{cases} x = (L + x_w) \cos \delta_M - S \cos(\varphi_0 + q) \\ y = S \sin(\varphi_0 + q) - E \\ z = (L + x_w) \sin \delta_M + x_b \end{cases} \quad (15)$$

2.3 机床末端热误差建模

由于机床热误差的存在, 刀具和工件在加工过程中会偏离其理想位置, 从而导致刀具和工件的相对位姿发生改变, 产生末端误差^[14]。本文基于多体理论构建机床各轴热误差与机床末端热误差的映射关系。

多体理论是一种对多个运动副连接约束的复杂系统进行建模的理论方法, 该理论能全面考虑系统中各因素的相互作用及耦合关系, 通过构建完整的运动链, 准确描述机床各部件在加工过程中的相对运动关系和空间位姿, 将机床内部误差通过运动链逐步传递至末端。首先通过分析机床各功能部件之间的连接关系, 基于机床的拓扑结构构建低序体阵列以描述各构件的运动链关系^[16]。进一步, 为准确表征构件间的运动学特性和误差传递机制, 建立各构件的局部坐标系, 并利用齐次坐标变换矩阵描述相邻构件之间的位置和姿态关系。进而将热误差作为扰动项引入运动链模型, 通过逐级传递推导热误差对末端的累积影响, 最终建立刀具-工件相对位姿的热误差数学模型。

根据图 6 的机床结构, 构建数控铣齿机的拓扑结构和低序体阵列, 如图 8 和表 1 所示.



0—大地; 1—床身; 2—滑座; 3—转台; 4—工件箱; 5—工件;
6—立柱; 7—主轴箱; 8—主轴; 9—刀具

图 8 五轴数控铣齿机的拓扑结构

Fig.8 Topological structure of the five-axis CNC gear milling machine

机床各部件在空间中的移动和旋转, 可以通过固连在其上的坐标系的变换来描述, 五轴数控铣齿机的相邻体间变换矩阵如表 2 所示. 其中, T_{ijp} 为理想静止

特征矩阵; T_{ijs} 为理想运动特征矩阵; ΔT_{ijp} 为实际静止特征矩阵; ΔT_{ijs} 为实际运动特征矩阵.

表 1 五轴数控铣齿机的低序体阵列

Tab.1 Low-order body array of the five-axis CNC gear milling machine

j	$L^0(j)$	$L^1(j)$	$L^2(j)$	$L^3(j)$	$L^4(j)$	$L^5(j)$
1	1	0	0	0	0	0
2	2	1	0	0	0	0
3	3	2	1	0	0	0
4	4	3	2	1	0	0
5	5	4	3	2	1	0
6	6	1	0	0	0	0
7	7	6	0	0	0	0
8	8	7	6	0	0	0
9	9	8	7	6	0	0

表 2 相邻体间变换矩阵

Tab.2 Transformation matrix between adjacent bodies

相邻体	理想/实际静止特征矩阵	理想/实际运动特征矩阵	相邻体	理想/实际静止特征矩阵	理想/实际运动特征矩阵
1-2	$T_{12p} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x_{12d} \\ 0 & 1 & 0 & y_{12d} \\ 0 & 0 & 1 & z_{12d} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\Delta T_{12p} = I_{4 \times 4}$	$T_{12s} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\Delta T_{12s} = \begin{bmatrix} 1 & -\Delta\gamma_x & \Delta\beta_x & \Delta x_x \\ \Delta\gamma_x & 1 & -\Delta\alpha_x & \Delta y_x \\ -\Delta\beta_x & \Delta\alpha_x & 1 & \Delta z_x \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	1-6	$T_{16p} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x_{16d} \\ 0 & 1 & 0 & y_{16d} \\ 0 & 0 & 1 & z_{16d} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\Delta T_{16p} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \Delta\beta_{xz} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\Delta\beta_{xz} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$T_{16s} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\Delta T_{16s} = \begin{bmatrix} 1 & -\Delta\gamma_z & \Delta\beta_z & \Delta x_z \\ \Delta\gamma_z & 1 & -\Delta\alpha_z & \Delta y_z \\ -\Delta\beta_z & \Delta\alpha_z & 1 & \Delta z_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
2-3	$T_{23p} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x_{23d} \\ 0 & 1 & 0 & y_{23d} \\ 0 & 0 & 1 & z_{23d} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\Delta T_{23p} = I_{4 \times 4}$	$T_{23s} = \begin{bmatrix} \cos B & 0 & \sin B & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin B & 0 & \cos B & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\Delta T_{23s} = I_{4 \times 4}$	6-7	$T_{67p} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x_{67d} \\ 0 & 1 & 0 & y_{67d} \\ 0 & 0 & 1 & z_{67d} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\Delta T_{67p} = \begin{bmatrix} 1 & -\Delta\gamma_{xy} & 0 & 0 \\ \Delta\gamma_{xy} & 1 & -\Delta\alpha_{yz} & 0 \\ 0 & \Delta\alpha_{yz} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$T_{67s} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\Delta T_{67s} = \begin{bmatrix} 1 & -\Delta\gamma_y & \Delta\beta_y & \Delta x_y \\ \Delta\gamma_y & 1 & -\Delta\alpha_y & \Delta y_y \\ -\Delta\beta_y & \Delta\alpha_y & 1 & \Delta z_y \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
3-4	$T_{34p} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x_{34d} \\ 0 & 1 & 0 & y_{34d} \\ 0 & 0 & 1 & z_{34d} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\Delta T_{34p} = I_{4 \times 4}$	$T_{34s} = I_{4 \times 4}$ $\Delta T_{34s} = I_{4 \times 4}$	7-8	$T_{78p} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x_{78d} \\ 0 & 1 & 0 & y_{78d} \\ 0 & 0 & 1 & z_{78d} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $T_{78p} = I_{4 \times 4}$	$T_{78s} = I_{4 \times 4}$ $\Delta T_{78s} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \Delta\beta_s & \Delta x_s \\ 0 & 1 & -\Delta\alpha_s & \Delta y_s \\ -\Delta\beta_s & \Delta\alpha_s & 1 & \Delta z_s \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
4-5	$T_{45p} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x_{45d} \\ 0 & 1 & 0 & y_{45d} \\ 0 & 0 & 1 & z_{45d} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\Delta T_{45p} = I_{4 \times 4}$	$T_{45s} = I_{4 \times 4}$ $\Delta T_{45s} = I_{4 \times 4}$	8-9	$T_{89p} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x_{89d} \\ 0 & 1 & 0 & y_{89d} \\ 0 & 0 & 1 & z_{89d} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\Delta T_{89p} = I_{4 \times 4}$	$T_{89s} = I_{4 \times 4}$ $\Delta T_{89s} = I_{4 \times 4}$

机床在理想情况下, 刀具刀尖点 P_i 转成轮坯坐

标系下的理想函数表示为

$$P_{wi} = \left[\prod_{u=1, L'(5)=0}^n T_{L'(5)L^{u-1}(5)p} T_{L'(5)L^{u-1}(5)s} \right]^{-1} \cdot \left[\prod_{t=1, L'(9)=0}^n T_{L'(9)L^{t-1}(9)p} T_{L'(9)L^{t-1}(9)s} \right] C_t \quad (16)$$

机床在实际有误差的情况下, 刀具刀尖点转成轮坯坐标系下的实际函数为

$$P_w = \left[\prod_{u=1, L'(5)=0}^n T_{L'(5)L^{u-1}(5)}(E) \right]^{-1} \cdot \left[\prod_{t=1, L'(9)=0}^n T_{L'(9)L^{t-1}(9)}(E) \right] C_t \quad (17)$$

$$T_{ij}(E) = T_{ijp} \Delta T_{ijp} T_{ijs} \Delta T_{ijs}$$

则实际刀具成形点在轮坯坐标系的误差为

$$E_p = P_w - P_{wi} = (\Delta e_x, \Delta e_y, \Delta e_z, 1)^T \quad (18)$$

其中

$$\left\{ \begin{aligned} \Delta e_x &= \sin B \left[-0.688(\Delta\beta_{xz} + \Delta\beta_z) + 0.535\Delta\alpha_x + 0.487\Delta\beta_x + c_x(\Delta\beta_s + \Delta\beta_{xz} - \Delta\beta_x + \Delta\beta_y + \Delta\beta_z) + c_y(-\Delta\alpha_s - \Delta\alpha_{yz} + \Delta\alpha_x - \Delta\alpha_y - \Delta\alpha_z) + -\Delta z_s + \Delta z_x - \Delta z_y - \Delta z_z \right] + \cos B \left[0.605(\Delta\beta_{xz} + \Delta\beta_z + \Delta\beta_y) + 0.493\Delta\beta_x + 0.535\Delta\gamma_x + c_y(-\Delta\gamma_{xy} + \Delta\gamma_x - \Delta\gamma_y - \Delta\gamma_z) + c_z(\Delta\beta_s + \Delta\beta_{xz} - \Delta\beta_x + \Delta\beta_y + \Delta\beta_z) + y(-\Delta\gamma_{xy} + \Delta\gamma_x + \Delta\gamma_z) + z(\Delta\beta_{xz} - \Delta\beta_x) + \Delta x_s - \Delta x_x + \Delta x_y + \Delta x_z \right] \\ \Delta e_y &= -0.605(\Delta\alpha_{yz} + \Delta\alpha_y + \Delta\alpha_z) - 0.493\Delta\alpha_x + 0.487\Delta\gamma_x - 0.688\Delta\gamma_z + c_x(\Delta\gamma_{xy} - \Delta\gamma_x + \Delta\gamma_y + \Delta\gamma_z) + c_z(-\Delta\alpha_s - \Delta\alpha_{yz} + \Delta\alpha_x - \Delta\alpha_y + \Delta\alpha_z) + x\Delta\gamma_x + z\Delta\alpha_x + \Delta y_s - \Delta y_x + \Delta y_y + \Delta y_z \\ \Delta e_z &= \sin B \left[0.605(\Delta\beta_{xz} + \Delta\beta_y + \Delta\beta_z) + 0.535\Delta\gamma_x + 0.493\Delta\beta_x + c_y(-\Delta\gamma_{xy} + \Delta\gamma_x - \Delta\gamma_y - \Delta\gamma_z) + c_z(\Delta\beta_s + \Delta\beta_{xz} - \Delta\beta_x + \Delta\beta_y + \Delta\beta_z) + y(-\Delta\gamma_{xy} + \Delta\gamma_x + \Delta\gamma_z) + z(\Delta\beta_{xz} - \Delta\beta_x) + \Delta x_s - \Delta x_x + \Delta x_y + \Delta x_z \right] + \cos B \left[0.688(\Delta\beta_{xz} + \Delta\beta_z) - 0.535\Delta\alpha_x - 0.487\Delta\beta_x + c_x(-\Delta\beta_s - \Delta\beta_{xz} + \Delta\beta_x - \Delta\beta_y - \Delta\beta_z) + c_y(+\Delta\alpha_s + \Delta\alpha_{yz} - \Delta\alpha_x + \Delta\alpha_y + \Delta\alpha_z) - x\Delta\beta_x + y(+\Delta\alpha_{yz} - \Delta\alpha_x + \Delta\alpha_z) + \Delta z_s - \Delta z_x + \Delta z_y + \Delta z_z \right] \end{aligned} \right. \quad (19)$$

2.4 含机床热误差的螺旋锥齿轮齿面误差建模

机床运动轴的热误差会导致齿面离散点偏离其理想位置, 进而形成齿面误差. 基于多体理论分析机床各部件热误差的累积效应, 将机床各部件热误差传递到加工过程中齿坯与刀具之间的相对误差. 针对已获得的理想齿面离散点, 将机床误差映射到每个齿面点, 并通过误差矢量叠加, 构建包含机床热误差的实际齿面模型. 结合式(12)、(15)和(18), 求得有误差的齿面模型 $r_{wc}^k(u, \theta, \varphi_0, \Delta e)$. 则误差齿面与理想齿面之间的齿面点的误差矢量表示为

$$d^k(\mu, \theta, \varphi_0, \Delta e) = r_{wc}^k(\mu, \theta, \varphi_0, \Delta e) - r_w^k(\mu, \theta, \varphi_0) \quad (20)$$

式中: k 为齿面上第 k 个网格点, $k=1, 2, \dots, N$, N 表示齿面网格节点总数; r_{wc} 为齿面网格点的误差径矢; d^k 为某一网格节点上的误差齿面与理想齿面的误差向量.

齿面上一点的齿形误差示意如图 9 所示, 其中 n_w^k 为理想齿面第 k 个网格点的单位法矢. 齿面误差在齿面法矢方向上的误差值由误差矢量 d^k 与该点单位法矢 n_w^k 的内积求得, 即

$$h^k = \langle d^k(u, \theta, \varphi_0, \Delta e), n_w^k \rangle \quad (21)$$

式中 h^k 为齿面上第 k 个网格点在法矢方向上的误差值.

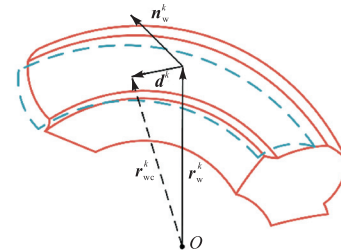


图 9 齿面误差示意

Fig.9 Schematic of tooth surface errors

3 螺旋锥齿轮热致齿面加工误差测试实验

3.1 机床热特性实验

根据机床的结构和运动状态, 本文对 3 个直线轴、主轴开展热误差测量实验. 实验中温度传感器安装在机床主要热源区域附近, 具体安装位置如表 3 和图 10 所示. 其中直线轴 6 项误差和垂直度的热误差实验采用 16 个温度传感器, 主要安装在丝杠螺母、导轨滑块、驱动电机等热源区域; 主轴系统 12 个温度传感器重点布置在主轴箱体表面靠近主轴前后轴承、力矩电机等主要热源的位置以测量主轴区域的升温情况.

开展直线轴热误差测量实验时, 本文采用 Renishaw 的 XM60 激光干涉仪和 QC20 球杆仪分别

测量直线轴热误差和热致垂直度误差. 在测试时, 直线轴 x, y, z 以及主轴 S 轴按照表 3 方案同时运动 50 min, 随后停机利用激光干涉仪测量直线轴热误差. 重复 5 次测量, 测量流程如图 11 所示. 以 z 轴为例,

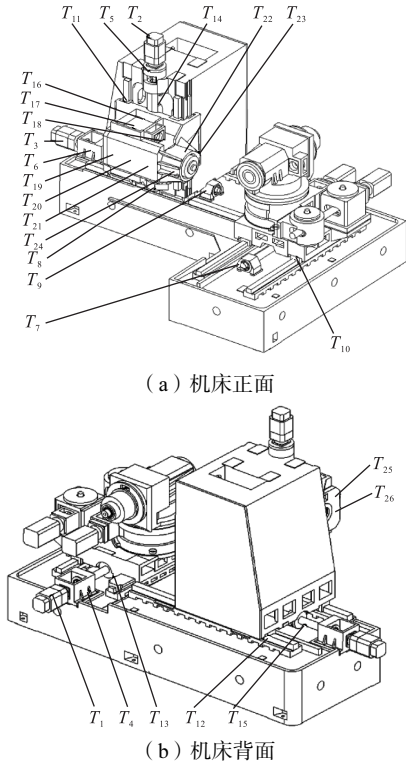


图 10 温度传感器安装示意

Fig.10 Schematic of temperature sensor installation

表 3 实验方案

Tab.3 Experimental scheme

测量项目	直线轴/垂直度		主轴	
温度传感器	电机	T_1, T_2, T_3	主轴箱顶部	T_{16}, T_{17}, T_{18}
	电机座	T_4, T_5, T_6	主轴箱侧部	T_{19}, T_{20}, T_{21}
	轴承座	T_7, T_8, T_9	主轴箱前部	T_{22}, T_{23}, T_{24}
	滑块	T_{10}, T_{11}, T_{12}	主轴箱后部	T_{25}, T_{26}
	螺母	T_{13}, T_{14}, T_{15}	环境	T_{27}
环境	T_{27}			
运动轴速度	$v_x/(m/min)$	3	主轴转速/ (r/min)	300
	$v_y/(m/min)$	3		
	$v_z/(m/min)$	3		
	主轴转速/(r/min)	300		

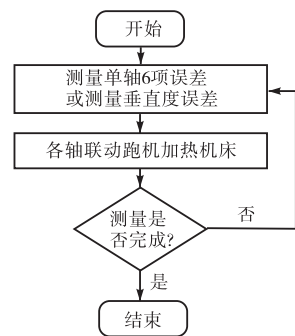


图 11 21项误差测量流程

Fig.11 Measurement process for 21 error items

测量结果如图 12~图 14 所示. 垂直度测量方案与直线轴热误差测量方案类似, 流程如图 11 所示, 测量结果如图 15 所示.

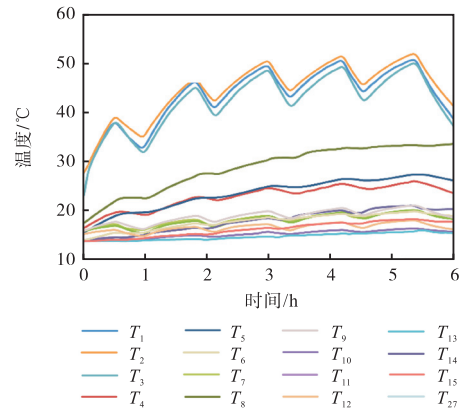
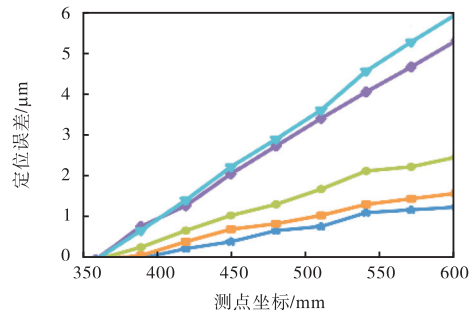
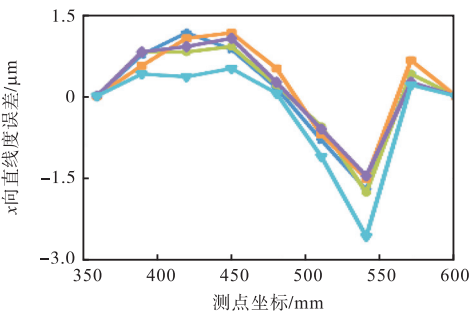


图 12 直线轴实验温度测量结果

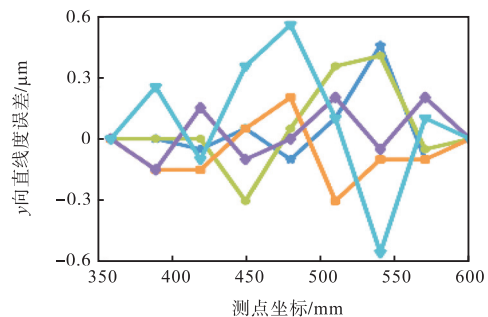
Fig.12 Temperature measurement results from the linear axis experiment



(a) 定位误差



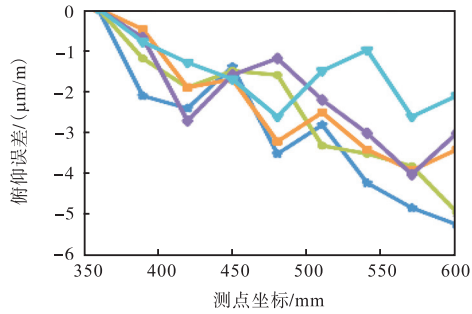
(b) x向直线度误差



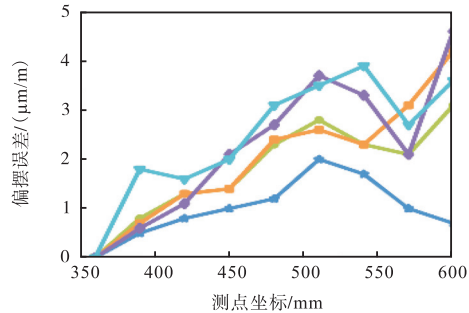
(c) y向直线度误差

图 13 z轴热致定位误差与直线度误差

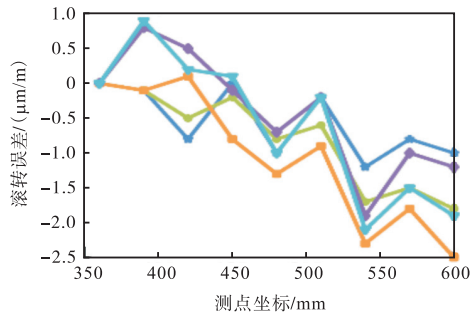
Fig.13 Thermal positioning and straightness errors of the z-axis



(a) 俯仰误差



(b) 偏摆误差



(c) 滚转误差

— 热机1 h — 热机2 h — 热机3 h — 热机4 h — 热机5 h

图 14 z轴热致角度误差

Fig.14 Thermal angular errors of the z-axis

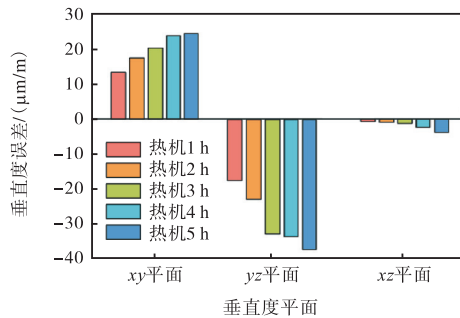


图 15 垂直度测量结果

Fig.15 Perpendicularity measurement results

本文采用 5 点法对主轴的热误差进行测量,设备安装位置如图 16 所示。在开展主轴热误差测量实验时,主轴按照表 3 和图 17 运动的方案运动 5 h,测量结果如图 18 所示。

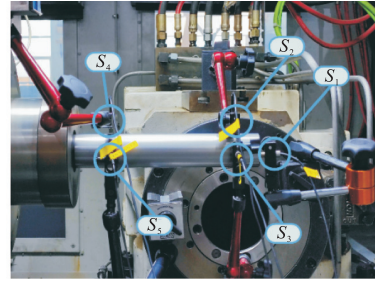


图 16 5点法测量现场

Fig.16 Measurement site for the five-point method

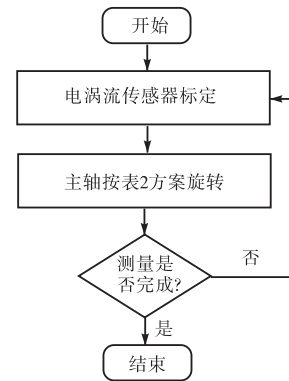
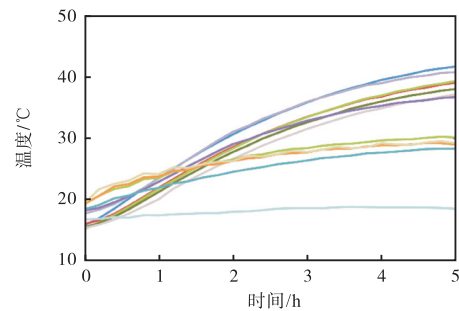
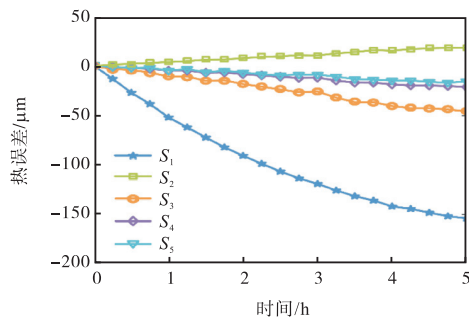


图 17 主轴热误差测量流程

Fig.17 Measurement process for spindle thermal errors



(a) 主轴温度



(b) 主轴热误差

图 18 主轴热误差测量结果

Fig.18 Spindle thermal error measurement results

将以上测试结果代入式(21)中,即可得到热致误

差齿面法矢方向上的误差值. 以展成法加工的螺旋锥齿轮大轮为例, 其几何参数如表 4 所示, 齿面离散点误差预测结果如图 19 所示.

表 4 螺旋锥齿轮大轮几何参数

Tab.4 Geometric parameters of the large spiral bevel gear

参数	数值
齿数	38
旋向	右旋
齿面宽 b /mm	32.18
模数 m /mm	5.391
法向压力角 α_0 /($^\circ$)	20
轴交角 /($^\circ$)	90
外锥距 R_δ /mm	106.61
理论全齿高 h_t /mm	10.40
齿顶高 h_a /mm	1.57
齿根高 h_f /mm	8.82
节锥角 δ /($^\circ$)	73.54
面锥角 δ_s /($^\circ$)	75.02
根锥角 δ_r /($^\circ$)	68.21

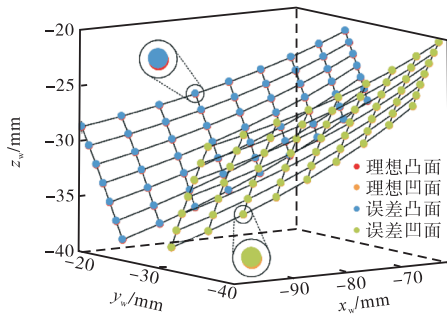


图 19 齿面离散点预测结果

Fig.19 Predicted results of discrete points on the tooth surface

3.2 工件试切

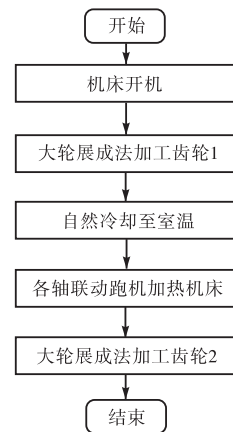
在 YKH2235 数控螺旋锥齿轮铣齿机上进行工件试切实验. 图 20 为展成法加工大轮的加工过程, 共进行两个齿轮的试切. 首先, 第 1 个齿轮在机床开机后立即进行试切. 在第 1 个齿轮加工完成后, 需将机床断电并让其自然冷却至少 8 h 后, 开展第 2 个齿轮的加工. 在进行第 2 个齿轮试切之前, 根据表 3 中的工况将机床热机 5 h, 随后进行第 2 次齿轮试切实验. 为剔除加工过程中可能存在的干扰因素(如刀具磨损、安装误差和对刀操作等)对结果的影响, 冷机和热机状态下的试切实验均使用相同的工装和对刀方法, 且由同一操作人员完成, 减小人为操作带来的随机误差. 此外, 冷机和热机状态下试切实验中使用相同的粗切刀具和精切刀具, 并在刀具磨损程度较低的情况下完成切削实验, 以减少刀具磨损对齿面误差的影响. 将热机状态下的齿面误差减去冷机状态下的齿面误差, 能够有效减小 2 次试切中共有的工装误

差、对刀误差等系统性误差对实验的影响, 得到的螺旋锥齿轮凹面与凸面的热致齿面误差.

本实验的螺旋锥齿轮切削工艺参数如表 5 所示, 加工过程分为粗加工和精加工 2 个阶段, 其中粗加工阶段采用 10 次切削操作, 精加工阶段分 2 次切削操作.



(a) 齿轮加工现场



(b) 试切实验流程



(c) 齿轮测量

图 20 试切实验

Fig.20 Trial cutting experiment

表 5 齿轮切削工艺参数

Tab.5 Gear manufacturing process parameters

参数	进给量/mm	主轴转速/(r/min)	进给速度/(mm/min)
粗加工	3	300	3 000
精加工	0.2	300	3 000

加工完成的 2 个齿轮,在克林贝格 P26 型齿轮测量中心上对其齿形误差进行测量,两个齿轮的齿面法向偏差测量结果如图 21 所示。

从图 21 的齿形偏差中可以看出,由于机床热误差的存在,齿轮 2 的测量齿形与理论齿形出现了较为

明显的偏差.用齿轮 2 的齿面偏差值减去齿轮 1 的齿面偏差值,得到的螺旋锥齿轮凹面与凸面的热致齿面偏差,如图 22(a)、(b)所示.根据机床热误差推测的齿面齿面偏差如图 22(c)、(d)所示.由于加工中刀具磨损、安装误差以及对刀操作等原因,实际切出来的大轮齿面与理论推测齿面存在一定的误差,理论推测齿面与实际加工齿面之间的均方根误差为 2.57 μm ,齿面偏差的整体变化趋势基本一致,这也进一步验证了本文所建数学模型及运动求解的正确性。

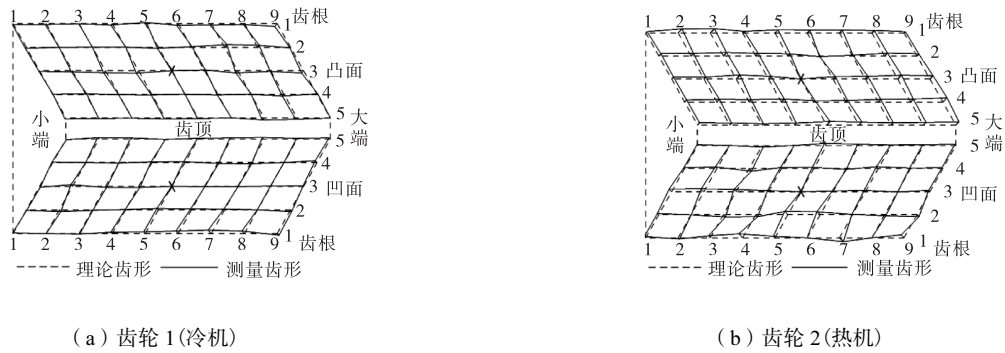


图 21 齿面偏差测量结果

Fig.21 Measurement results of tooth surface deviation

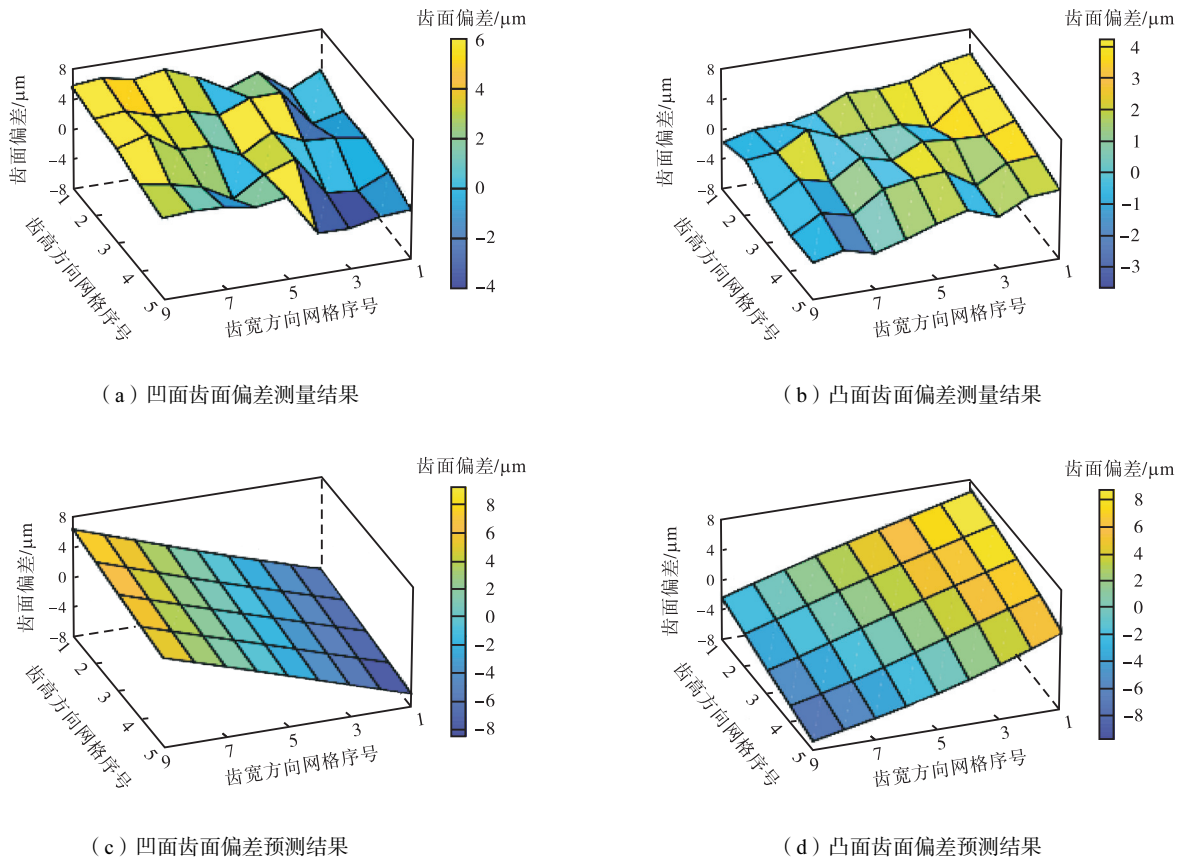


图 22 热致螺旋锥齿轮齿面偏差

Fig.22 Thermal-induced tooth surface deviations in spiral bevel gears

4 结 论

(1) 本文以螺旋锥齿轮大轮展成法加工为例,基于传统铣齿机床结构和啮合原理,建立理论齿面方程,并通过旋转投影法,求解齿面离散点的三维坐标。

(2) 通过构建五轴数控铣齿机与传统铣齿机床的运动等效关系,建立了五轴铣齿机的运动坐标表达式,并基于多体理论,推导了五轴铣齿机的末端热误差,进而建立机床热变形与齿面误差的映射关系。

(3) 开展数控铣齿机热特性实验,结合各运动轴的热误差和数控机床运动参数,对热致齿面误差进行了预测。经过齿轮试切,验证了本文所建模型的正确性,该模型对于热致齿面误差预测和分析有一定参考意义。

参考文献:

- [1] 孙月海, 李小亨. 弧齿锥齿轮螺旋变性展成法及其轮齿接触分析[J]. 天津大学学报(自然科学与工程技术版), 2017, 50(4): 421-428.
Sun Yuehai, Li Xiaoheng. Spread-out helix modified roll of spiral bevel gears and tooth contact analysis[J]. Journal of Tianjin University(Science and Technology), 2017, 50(4): 421-428(in Chinese).
- [2] Xiang S T, Li H M, Deng M, et al. Geometric error analysis and compensation for multi-axis spiral bevel gears milling machine[J]. Mechanism and Machine Theory, 2018, 121: 59-74.
- [3] 吴 聪, 严宏志, 母福生, 等. 螺旋锥齿轮齿面误差修正技术研究[J]. 机械科学与技术, 2018, 37(8): 1239-1245.
Wu Cong, Yan Hongzhi, Mu Fusheng, et al. Research on tooth surface error correction technique of spiral bevel gears[J]. Mechanical Science and Technology for Aerospace Engineering, 2018, 37(8): 1239-1245(in Chinese).
- [4] 汪中厚, 李 刚, 久保爱三. 基于数字化真实齿面的螺旋锥齿轮齿面接触分析[J]. 机械工程学报, 2014, 50(15): 1-11.
Wang Zhonghou, Li Gang, Kubo Aizoh. Tooth contact analysis of spiral bevel gears based on digital real tooth surfaces[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2014, 50(15): 1-11(in Chinese).
- [5] 唐进元, 雷国伟. CNC 机床运动误差对弧齿锥齿轮齿面接触质量的影响研究[J]. 中国机械工程, 2010, 21(20): 2395-2401, 2429.
Tang Jinyuan, Lei Guowei. Study on effect of CNC machine motion errors on tooth contact analysis of spiral bevel gear[J]. China Mechanical Engineering, 2010, 21(20): 2395-2401, 2429(in Chinese).
- [6] Bruyère J, Dantan J Y, Bigot R, et al. Statistical tolerance analysis of bevel gear by tooth contact analysis and Monte Carlo simulation[J]. Mechanism and Machine Theory, 2007, 42(10): 1326-1351.
- [7] Zheng F Y, Han X H, Lin H, et al. Research on the cutting dynamics for face-milling of spiral bevel gears[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2021, 153: 107488.
- [8] Fan Q. Enhanced algorithms of contact simulation for hypoid gear drives produced by face-milling and face-hobbing processes[J]. Journal of Mechanical Design, 2007, 129(1): 31-37.
- [9] 田国富, 赵继宁. 弧齿锥齿轮齿面数学建模方法[J]. 机床与液压, 2021, 49(24): 101-104.
Tian Guofu, Zhao Jining. Mathematical modeling method of spiral bevel gear tooth surface[J]. Machine Tool & Hydraulics, 2021, 49(24): 101-104(in Chinese).
- [10] 徐彦伟, 张连洪, 刘德全, 等. 弧齿锥齿轮机床运动误差对齿面误差的影响[J]. 机床与液压, 2013, 41(15): 10-14.
Xu Yanwei, Zhang Lianhong, Liu Dequan, et al. Effect of motion errors of spiral bevel gear machine tool on tooth surface errors[J]. Machine Tool & Hydraulics, 2013, 41(15): 10-14(in Chinese).
- [11] 张 华, 邓效忠. 四轴数控螺旋锥齿轮铣齿机变性法铣齿研究[J]. 中国机械工程, 2007, 18(14): 1652-1655.
Zhang Hua, Deng Xiaozhong. Modified-roll method study on 4-axis CNC spiral bevel gear machine[J]. China Mechanical Engineering, 2007, 18(14): 1652-1655(in Chinese).
- [12] 孙月海, 申腾跃, 王太勇, 等. 基于五轴加工中心的

- 弧齿锥齿轮刀倾法研究[J]. 天津大学学报(自然科学与工程技术版), 2017, 50(10): 1062-1069.
- Sun Yuehai, Shen Tengyue, Wang Taiyong, et al. Study on tilting method of spiral bevel gear based on five-axis machining center[J]. Journal of Tianjin University (Science and Technology), 2017, 50(10): 1062-1069(in Chinese).
- [13] 吴序堂. 齿轮啮合原理[M]. 西安: 西安交通大学出版社, 2009.
- Wu Xutang. Gear Meshing Principle[M]. Xi'an: Xi'an Jiaotong University Press, 2009(in Chinese).
- [14] Liu J L, Ma C, Gui H Q, et al. Simultaneous geometric and thermal error control of gear profile grinder based on analytical correlation between tooth surface error and position error of grinding wheel/workpiece[J]. Mechanism and Machine Theory, 2022, 169: 104639.
- [15] Xiang S T, Li H M, Deng M, et al. Geometric error analysis and compensation for multi-axis spiral bevel gears milling machine[J]. Mechanism and Machine Theory, 2018, 121: 59-74.
- [16] 张大卫, 杨金玉, 高卫国, 等. 基于 CAE 热分析的机床结构工作空间热误差建模[J]. 天津大学学报(自然科学与工程技术版), 2016, 49(2): 111-119.
- Zhang Dawei, Yang Jinyu, Gao Weiguo, et al. Structural thermal error modeling of machine tools in working space based on CAE thermal analysis[J]. Journal of Tianjin University (Science and Technology), 2016, 49(2): 111-119(in Chinese).

(责任编辑: 王晓燕)