

DOI:10.12171/j.1000-1522.20240321

基于非线性混合效应模型的东北红松树高-胸径关系

李欣宇¹ 叶尔江·拜克吐尔汗² 王娟³ 张新娜¹ 张春雨¹ 赵秀海¹

(1. 北京林业大学国家林业和草原局森林经营工程技术研究中心, 北京 100083; 2. 新疆农业大学林学与风景园林学院, 新疆干旱区林业生态与产业技术重点实验室, 新疆乌鲁木齐 830052; 3. 北京林业大学生态与自然保护学院, 北京 100083)

摘要:【目的】构建红松非线性混合效应树高-胸径模型, 并对分析不同抽样方法和不同抽样数量对模型预测精度的影响, 为研究红松的生长发育规律提供理论依据。【方法】基于吉林省蛟河地区与黑龙江省凉水地区两块样地合计 4 441 组红松数据, 将数据随机分为建模数据(80%)和检验数据(20%)。对常见的 15 个树高-胸径模型进行拟合, 筛选效果最佳的模型作为基础模型, 并将胸高断面面积、优势木平均高和林分平均胸径加入基础模型, 构建最优广义模型。同时, 引入样方水平的随机效应, 分别构建基础混合效应模型和广义混合效应模型, 并评价两个固定效应模型与两个混合效应模型的拟合能力和预测精度。使用检验数据验证模型预测精度, 采用固定效应模型的平均水平预测(FPA)、混合模型的总体平均响应预测(MPA)和主体响应预测(MPS)3 种预测类型进行比较。此外, 对混合模型在随机抽取、抽胸径最大、抽胸径最小和抽取平均木(胸径接近平均值的样本)4 种抽样方案下的预测精度和样本数量关系进行分析。【结果】(1)Prodan 模型为最优基础模型(R^2 、RMSE、MAE 分别为 0.841、3.335 m、2.492 m), 加入林分平均胸径、优势木平均高和胸高断面面积的广义模型预测精度更高(R^2 、RMSE、MAE 分别为 0.914、2.449 m、1.816 m)。引入样方随机效应后, 模型的精度显著提升(基础混合效应模型 R^2 、RMSE、MAE 分别为 0.961、1.652 m、1.231 m, 广义混合效应模型 R^2 、RMSE、MAE 分别为 0.958、1.719 m、1.288 m)。(2)通过检验数据验证模型精度, 结果表明模型预测精度均表现为 MPA > FPA > MPS, 广义模型预测精度总体优于基础模型。(3)4 种抽样方案中, 抽取平均木的抽样方法表现最佳, 当抽取 8 株时, 预测能力最优; 在实际应用中, 考虑人工成本与经济成本, 抽取 5 株平均木测量树高以估计随机参数的方法亦合理可行。【结论】将林分因子和样方效应引入基础模型能够显著提高红松树高-胸径模型的精度, 采用抽取平均木的抽样方法预测精度更高。本研究探讨了非线性混合效应模型下红松树高与胸径的关系, 为精准预测东北主要建群种红松树高值以及后续实地调查与经营管理提供理论基础与实践参考。

关键词: 红松; 树高-胸径模型; 广义模型; 非线性混合效应模型; 抽样设计

中图分类号: S757 **文献标志码:** A **文章编号:** 1000-1522(2025)03-0038-11

引文格式: 李欣宇, 叶尔江·拜克吐尔汗, 王娟, 等. 基于非线性混合效应模型的东北红松树高-胸径关系 [J]. 北京林业大学学报, 2025, 47(3): 38-48. Li Xinyu, Yeerjiang Baiketuerhan, Wang Juan, et al. Relationship between tree height and DBH of *Pinus koraiensis* in northeastern China based on nonlinear mixed effects model [J]. Journal of Beijing Forestry University, 2025, 47(3): 38-48.

Relationship between tree height and DBH of *Pinus koraiensis* in northeastern China based on nonlinear mixed effects model

Li Xinyu¹ Yeerjiang Baiketuerhan² Wang Juan³ Zhang Xinna¹ Zhang Chunyu¹ Zhao Xiuhai¹

(1. Research Center of Forest Management Engineering of National Forestry and Grassland Administration, Beijing Forestry University, Beijing 100083, China;

2. College of Forestry and Landscape Architecture, Xinjiang Agricultural University, Key Laboratory of Xinjiang Uygur Autonomous Region for Forest Ecology and Industrial Technology in Arid Zone, Urumqi 830052, Xinjiang, China;

3. School of Ecology and Nature Conservation, Beijing Forestry University, Beijing 100083, China)

收稿日期: 2024-09-26 修回日期: 2024-10-21

基金项目: 国家重点研发计划(2023YFF1304004-06)。

第一作者: 李欣宇。主要研究方向: 树高胸径模型。Email: lixinyu5273@163.com 地址: 100083 北京市海淀区清华东路 35 号北京林业大学林学院。

责任作者: 张春雨, 博士, 教授。主要研究方向: 森林经营理论与技术。Email: zcy_0520@163.com 地址: 同上。

本刊网址: <http://j.bjfu.edu.cn>; <http://journal.bjfu.edu.cn>

Abstract: [Objective] This paper aims to construct a nonlinear mixed-effects model for the tree height-DBH relationship of *Pinus koraiensis*, compare the prediction accuracy of various sampling methods and sample sizes, and provide a theoretical basis for understanding the growth patterns of *Pinus koraiensis*. [Method] This study used 4 441 sets of data from two sample plots in Jiaohe, Jilin Province, and Liangshui, Heilongjiang Province of northeastern China. The data were randomly divided into two parts, with 80% used for modeling and 20% for validation. Fifteen common tree height-DBH models were fitted, and the best-performing model was selected as the base model. Variables such as basal area, dominant height, and quadratic mean diameter were added to the base model to construct the optimal generalized model. Random effects at the plot level were also considered, resulting in the construction of a base mixed-effects model and a generalized mixed-effects model. The fitting ability and prediction accuracy of two fixed-effects models and two nonlinear mixed-effects models were evaluated. We validated the model prediction accuracy using validation data, compared three prediction types: fixed effects model average prediction (FPA), mixed model overall mean response prediction (MPA), and subject response prediction (MPS). Additionally, we analyzed the prediction accuracy and relationship between sample size and four sampling schemes for the mixed model: random sampling, the largest DBH sampling, the smallest DBH sampling, and average tree sampling (samples with DBH close to the average value). [Result] (1) The optimal base model was the Prodan model (R^2 , RMSE, MAE were 0.841, 3.335 m, 2.492 m, respectively). The generalized model incorporating quadratic mean, dominant height, and basal area had the highest prediction accuracy (R^2 , RMSE, MAE were 0.914, 2.449 m, 1.816 m, respectively). Introducing plot-level random effects significantly improved model accuracy; the base mixed-effects model had R^2 , RMSE, MAE of 0.961, 1.652 m, 1.231 m, respectively, and the generalized mixed-effects model had R^2 , RMSE, MAE of 0.958, 1.719 m, 1.288 m, respectively. (2) Model accuracy tested with validation data showed $MPA > FPA > MPS$, and prediction accuracy of generalized model was better than base model. (3) Among four sampling schemes, the sampling method of average trees was the best, and the prediction ability was the best when eight trees were selected; in practical application, considering the labor cost and economic cost, the method of selecting five average trees to measure the tree height to estimate the random parameters was also reasonable and feasible. [Conclusion] Incorporating stand factors and plot effects into the base model significantly improves the accuracy of tree height-DBH model for *Pinus koraiensis*. Additionally, the sampling method using average trees provides higher prediction accuracy. This study explores the relationship between tree height and DBH of *Pinus koraiensis* under a nonlinear mixed-effects model. It provides a theoretical foundation and practical reference for accurately predicting tree height of *Pinus koraiensis*, the main constructive species in northeastern China, as well as for subsequent field surveys and management practices.

Key words: *Pinus koraiensis*; tree height-DBH model; generalized model; nonlinear mixed effects model; sampling design

森林调查中, 树高和胸径是必不可少的两个调查因子, 两者在森林经营与森林质量评价中具有重要作用^[1]。然而, 在实际调查中发现, 测量树木胸径相对简单且精度较高^[2], 而树高数据的获取则相对困难。林内环境以及林分结构会影响树高的测量, 导致树高数据精度较低, 且增加了测量成本^[3]。研究表明, 通过树高-胸径模型, 能够预测样地内未测量树木的树高, 从而降低调查成本^[4-5]。同时, 林分环境和营林方式也会影响树高与胸径之间的关系, 因此常将林分因子加入模型以提高预测精度^[6]。但广义模型无法解释样地样方差异对模型的影响^[7], 为此, 引

入随机效应被证明能进一步提高模型精度^[8]。自 20 世纪 80 年代以来, 混合效应模型逐渐应用于林业研究^[9-10], 并在树高模型的研究中表现出了良好的预测能力^[10-11]。在华北落叶松 (*Larix principis-rupprechtii*) 和白桦 (*Betula platyphylla*) 混交林的建模研究中, 非线性混合效应模型显示出更优的预测效果^[12]。许多研究也探讨了基于混合效应模型预测能力, 例如, 曹晓梅等^[13]在对于帽儿山针阔混交林的研究中发现, 每个树种组抽取 1 株小树预测精度最高; 周晏平等^[14]在樟子松 (*Pinus sylvestris* var. *mongolica*) 研究中发现, 每个样地随机抽取 3 株树的预测精度

最佳; 在国外的桦木(*Betula pubescens*)研究也得出了类似的结论^[15]。余昆隆等^[16]认为, 抽取7株平均木的情况预测精度最好; 臧颢等^[17]、李婉婷等^[18]则指出, 抽取4株树木的精度最大。

红松(*Pinus koraiensis*)作为东北地区优势建群树种, 对该地区的生态和经济价值具有重要贡献^[17]。因此, 研究红松的树高-胸径模型对于其生长发育与资源开发具有重要意义, 也为东北地区红松经营管理与资源调查提供理论支持。

本研究以东北两个地区的红松为研究对象, 基于15个常见的模型进行筛选, 进一步引入林分因子, 探究不同变量对模型拟合精度的影响, 最终筛选出最优广义模型, 并以样方为随机效应构建非线性混合效应模型, 并采用3种预测类型对检验数据进行模型精度验证。此外, 设计了4种抽样方法, 并对其预测能力及与抽样数目的关系, 为红松树高的预测与经营管理提供理论依据。

1 研究区概况与研究方法

1.1 研究区概况

本研究选取东北地区两块不同纬度的固定监测样地作为研究对象。研究地分别位于吉林省蛟河市辖区的吉林省林业实验区国有林保护中心和黑龙江省伊春市带岭管理局凉水森林中心保护区。两个研究区均受人为干扰较小, 均属于温带大陆性季风气候, 夏季温和湿润、降水较多, 冬季寒冷干燥。地貌以低山丘陵为主, 土壤类型为山地暗棕色森林土。研究区群落物种多样性丰富, 林分类型为典型针阔混交林, 主要木本植物包括红松(*Pinus koraiensis*)、蒙古栎(*Quercus mongolica*)、水曲柳(*Fraxinus mandshurica*)、胡桃楸(*Juglans mandshurica*)等, 其中红松为主要建群种。

1.2 数据来源

在两个研究区内设置固定监测样地, 使用全站

仪将每个样地划分为20 m × 20 m的样方。在最终进行实地测量前, 每个样方被细分为16个5 m × 5 m的小样方, 定桩编号挂牌, 以胸径1 cm作为起测胸径, 对样方进行每木检尺并记录, 调查间隔期为5年。两个样地初建于2010年, 并于2015年、2020年对凉水样地(29.64 hm², 380 m × 780 m)和蛟河样地(42 hm², 500 m × 840 m)内林木进行复测, 复测的调查因子与初测相同。基于样地复测结果, 筛选出健康未受损伤的主要针叶树种红松, 进行模型构建。本研究共获得4 441组红松数据, 在建模时将数据随机分为两部分, 其中80%作为建模数据, 20%作为检验数据, 同时对建模数据进行五折交叉验证, 以确保选择最优模型。根据调查数据, 计算各个样方胸高断面积、林分平均胸径、林分密度以及优势木平均高, 表1为样地调查因子统计结果。

1.3 研究方法

1.3.1 基础模型选择

为了获得最佳的模型拟合效果, 选取15个常用的非线性树高-胸径模型(表2), 其中包括10个两参数模型和5个三参数模型。基于这15个模型, 筛选出最适合红松的基础模型。

1.3.2 广义模型选择

基础模型通常仅描述树高与胸径在平均水平上的数量关系。然而, 在物种丰富、立地条件复杂、林分结构多样的地区, 树高-胸径的相关关系可能会发生变化。为此, 本文通过再参数化和直接乘积两种方法建立广义模型^[17]。在树高与林分变量的相关性分析基础上, 结合最优基础模型, 加入不同林分变量, 构建预测精度最高的广义模型。

1.3.3 非线性混合效应模型

将随机效应引入上述模型建立混合效应模型, 本研究以样方作为随机效应, 模型一般形式为

$$\begin{cases} H_{ij} = f(\beta, \mu_i, D_{ij}) + \varepsilon_{ij} \\ \mu_i \sim N(0, D) \quad \varepsilon_{ij} \sim N(0, R_{ij}) \end{cases} \quad (1)$$

表1 样地调查因子统计

Tab. 1 Statistical analysis of survey factors for sample plots

数据	指标	DBH/cm	树高/m	胸高断面积/(m ² ·hm ⁻²)	林分平均胸径/cm	林分密度/(株·hm ⁻²)	优势木平均高/m
建模数据(n = 3 589)	最小值	1.20	1.50	4.05	10.14	200	2.00
	最大值	102.00	43.80	143.96	55.20	3 025	43.80
	均值	34.77	18.86	40.09	23.02	1 017	21.06
	标准差	23.00	8.37	14.15	2.08	379.76	6.52
检验数据(n = 852)	最小值	1.40	1.50	13.07	11.9	450	1.50
	最大值	90.10	37.10	70.81	32.06	2 755	33.10
	均值	31.12	16.62	37.87	22.23	1 019	17.99
	标准差	19.98	7.60	9.29	3.61	328.45	6.22

表 2 备选树高-胸径基础模型

Tab. 2 Basic model of candidate tree height-DBH

模型	参数类型	函数形式	参考文献
Stage	二参数	$H = 1.3 + \beta_1 D^{\beta_2}$	[19]
Wykoff	二参数	$H = 1.3 + e^{\left[\beta_1 + \left(\frac{\beta_2}{D+1}\right)\right]}$	[20]
Bates	二参数	$H = 1.3 + \beta_1 \frac{D}{(\beta_2 + D)}$	[21]
Meyer 1	二参数	$H = 1.3 + \beta_1 [1 - e^{(-\beta_2 D)}]$	[22]
Meyer 2	二参数	$H = 1.3 + \frac{D^2}{(\beta_1 + \beta_2 D)^2}$	[22]
Schumacher	二参数	$H = 1.3 + \beta_1 e^{\left(\frac{\beta_2}{D}\right)}$	[23]
Larson	二参数	$H = 1.3 + \frac{\beta_1 D}{(D+1)} + \beta_2 D$	[24]
Curtis	二参数	$H = 1.3 + \beta_1 \left[\frac{D}{(D+1)}\right]^{\beta_2}$	[25]
Näslund	二参数	$H = 1.3 + \left[\frac{D}{(\beta_1 + \beta_2 D)}\right]^3$	[26]
Bertalanffy	二参数	$H = 1.3 + \beta_1 [1 - e^{(-\beta_2 D)}]^3$	[27]
Ratkowsky	三参数	$H = 1.3 + e^{\left[\beta_1 + \frac{\beta_2}{(D-\beta_2)}\right]}$	[28]
Pearl	三参数	$H = 1.3 + \frac{\beta_1}{[1 + \beta_2 e^{(-\beta_3 D)}]}$	[29]
Winsor	三参数	$H = 1.3 + \beta_1 e^{[-\beta_2 e^{(-\beta_3 D)}]}$	[30]
Prodan	三参数	$H = 1.3 + \frac{D^2}{(\beta_1 + \beta_2 D + \beta_3 D^2)}$	[31]
Richards	三参数	$H = 1.3 + \beta_1 [1 - e^{(-\beta_2 D)}]^{\beta_3}$	[32]

注: H 为树高预测值; D 为胸径; β_1 、 β_2 、 β_3 为模型参数。

式中: H_{ij} 为第 i 个样方第 j 株树的树高实测值(m), D_{ij} 为第 i 个样方第 j 株树的胸径实测值(cm), $f(\beta, \mu_i, D_{ij})$ 为包含 H_{ij} 与 D_{ij} 的函数关系, β 为固定效应参数估计值, μ_i 为随机效应参数估计值, D 为随机效应方差-协方差矩阵, R_{ij} 为随机效应内方差-协方差矩阵; $\mu_i \sim N(0, D)$ 表示随机参数服从期望为 0、方差为 D 的正态分布; ε_{ij} 为误差项, 服从期望为 0、方差为 R_{ij} 的正态分布, ε_i 与 μ_i 相独立。

随机效应之间的变化性通过随机效应间的方差协方差结构来体现。

不同的随机参数数量也会有不同的结构形式, 3 个随机参数方差协方差结构形式如下

$$D = \begin{bmatrix} \sigma_{\mu_1}^2 & \sigma_{\mu_1\mu_2} & \sigma_{\mu_1\mu_3} \\ \sigma_{\mu_2\mu_1} & \sigma_{\mu_2}^2 & \sigma_{\mu_2\mu_3} \\ \sigma_{\mu_3\mu_1} & \sigma_{\mu_3\mu_2} & \sigma_{\mu_3}^2 \end{bmatrix} \quad (2)$$

式中: μ_1 、 μ_2 、 μ_3 为随机参数; $\sigma_{\mu_1}^2$ 、 $\sigma_{\mu_2}^2$ 、 $\sigma_{\mu_3}^2$ 是其方差; $\sigma_{\mu_1\mu_2}$ 、 $\sigma_{\mu_2\mu_1}$ 为 μ_1 和 μ_2 的协方差, $\sigma_{\mu_1\mu_3}$ 、 $\sigma_{\mu_3\mu_1}$ 为 μ_1 和 μ_3 的协方差, $\sigma_{\mu_2\mu_3}$ 、 $\sigma_{\mu_3\mu_2}$ 为 μ_2 和 μ_3 的协方差。

随机效应内的方差协方差结构即误差效应的方差协方差结构, 其反映数据间的异方差和自相关问题, 其表达式为

$$R_{ij} = \sigma^2 G_{ij}^{0.5} \Gamma_{ij} G_{ij}^{0.5} \quad (3)$$

式中: σ^2 是模型的残差方差值, Γ_{ij} 是组内误差相关性结构, G_{ij} 描述方差异质性的对角矩阵。

1.3.4 模型的预测与检验

本研究中的模型预测类型分为 3 种: 第 1 种是固定效应模型的平均水平预测(fixed effect average prediction, FPA), 第 2 种是混合模型的总体平均响应预测(overall mean response prediction, MPA), 第 3 种是主体响应预测(subject response prediction, MPS)。其中 MPA 仅使用混合模型中的固定效应部分, 预测时将随机参数设为 0。MPS 需要重新抽取样本, 并对未包含在建模样本中的样方计算其随机参数值^[14], 需使用经验线性最优无偏估计方法计算随机效应参数值, 计算方法^[33-34]如下

$$\hat{u}_i \approx \hat{D} \hat{Z}_i^T (\hat{Z}_i \hat{D} \hat{Z}_i^T + \hat{R}_i)^{-1} \hat{e}_i \quad (4)$$

式中: \hat{u}_i 为随机效应参数最优无偏估计值, \hat{D} 为随机效应参数的方差协方差矩阵, \hat{R}_i 为样方内方差协方差矩阵, \hat{Z}_i 为设计矩阵, \hat{Z}_i^T 为转置矩阵, \hat{e}_i 为实际值减去用固定效应参数计算的预测值。

混合效应预测中, 一般抽取数量越多, 预测精度越高, 但相应的工作量也增大。由于本数据集各样方数据较为分散, 因此将检验数据以 4 cm 径阶划分后进行抽样预测。本文采用 4 种抽样方法(各径阶随机抽取、各径阶内抽取最大胸径木、各径阶内抽取最小胸径木、参照各径阶胸径平均抽取平均木), 每种抽样方法均抽取 1~10 棵树。

1.3.5 模型评价指标

通过决定系数(coefficient of determination, R^2)、平均绝对误差(mean absolute error, MAE)、均方根误差(root mean square error, RMSE)、5 折交叉验证的均方根误差(5-fold cross-validated root mean square error, NMSE)、平均相对误差绝对值(relative mean absolute value of error, RMA)等比较模型的拟合能力, 计算公式参考文献 [5-6] 和 [17]。

同时还通过对比模型的赤池信息准则(Akaike information criterion, AIC)、贝叶斯信息准则(Bayesian information criterion, BIC)和似然比检验(Likelihood ratio test, LRT)数值来评价模型, 计算公式参考文献 [6]。

本文数据处理分析以及建模都在 Excel、R 语言软件中完成。

2 结果与分析

2.1 基础模型筛选

将建模数据基于所选的 15 个基础模型进行拟合, 对比各模型的 R^2 、NMSE、MAE 和 RMA 值, 最终筛选最佳红松基础模型。结果表明, 15 个模型均表现出较好的拟合效果(表 3)。各模型的 R^2 值为 0.722 ~ 0.841, NMSE 为 3.335 ~ 4.412 m, MAE 为 2.492 ~ 3.593 m, RMA 为 14.419% ~ 22.408%。由表 3 可见, Prodan 模型拟合效果最好, 其 R^2 、NMSE、MAE 以及 RMA 值分别为 0.841、3.335 m、2.492 m 和 14.419%。因此, 选择 Prodan 模型作为红松基础模型, 模型一般表达式为

$$H_{ij} = 1.3 + \frac{D_{ij}^2}{(a_1 + a_2 D_{ij} + a_3 D_{ij}^2)} + \varepsilon_{ij} \quad (5)$$

式中: a_1 、 a_2 、 a_3 为模型参数。

2.2 广义模型拟合

林分平均胸径、胸高断面积和优势木平均高与树高存在极显著关系($P < 0.01$)(表 4), 此外经共线性检验, 所有因子的方差膨胀因子(variance inflation factor, VIF)值均小于 10。根据不同组合形式, 将胸高断面积、优势木平均高和林分平均胸径 3 个变量加入筛选的基础模型(式 5), 并比较其统计指标(表 5), 以筛选出最佳的红松广义树高-胸径模型。从表 5 可知, 加入林分变量后, 模型的 R^2 值明显增大, RMA 和 RMSE 相应减小, 表明立地条件和林分因子的加入能够提高广义模型的拟合精度。加入单一变量时, 增加优势木平均高(模型 G1)能获得最佳拟合效果, R^2 、RMA、RMSE 分别是 0.904、12.089%、2.587 m; 增加 2 个变量时, 以含胸高断面积和优势木平均高的模型 G2 拟合效果最佳, R^2 、RMA、RMSE 分别是 0.912、11.721%、2.483 m, F 检验结果表明与模型 G1 存在显著差异($F = 307.24$, $P < 0.001$); 将

表 3 基础模型拟合结果

Tab. 3 Fitting results of basic models

模型	决定系数 (R^2)	NMSE/m	平均绝对误差 (MAE)/m	平均相对误差绝对值 (RMA)/%	排名
Stage	0.786	3.873	3.107	19.457	14
Wykoff	0.838	3.354	2.538	16.960	5
Bates	0.829	3.465	2.681	16.258	11
Meyer 1	0.834	3.408	2.605	15.557	9
Meyer 2	0.835	3.355	2.518	14.433	7
Schumacher	0.835	3.354	2.538	16.960	6
Larson	0.722	4.412	3.593	22.408	15
Curtis	0.837	3.344	2.519	15.908	4
Näslund	0.837	3.340	2.497	14.376	3
Bertalanffy	0.819	3.556	2.722	20.344	13
Ratkowsky	0.839	3.338	2.497	14.589	2
Pearl	0.824	3.513	2.667	16.169	12
Winsor	0.833	3.424	2.577	15.304	10
Prodan	0.841	3.335	2.492	14.419	1
Richards	0.834	3.368	2.518	14.501	8

注: NMSE表示5折交叉验证的均方根误差。

3 个林分变量(模型 G3)加入基础模型时, R^2 、RMA、NMSE 分别是 0.914、11.699%、2.449 m, 与基础模型相比, R^2 提高了 0.073, RMA 降低了 2.72%、RMSE 降低了 0.886 m, F 检验结果显示与模型 G2 差异显著($F = 102.39$, $P < 0.001$)。综上, 模型 G3 为最优广义模型, 其一般表现形式为

$$H_{ij} = 1.3 + \frac{D_{ij}^2}{[(a_1 + a_2 D_{gi}) + (a_3 + a_4 h_{yi} + a_5 BA_i) D_{ij} + a_6 D_{ij}^2]} + \varepsilon_{ij} \quad (6)$$

式中: D_{gi} 为第 i 个样方的林分平均胸径(cm); h_{yi} 为第 i 个样方的优势木平均高(m); BA_i 为第 i 个样方的胸高断面积(m^2/hm^2); a_1 、 a_2 、 a_3 、 a_4 、 a_5 、 a_6 为模型参数。

表 4 树高与林分因子相关性分析

Tab. 4 Correlation analysis between tree height and stand factors

变量	树高	胸径	胸高断面积	林分密度	优势木平均高	林分平均胸径
树高	1.000					
胸径	0.835**	1.000				
胸高断面积	0.227**	0.269**	1.000			
林分密度	-0.157	-0.160*	0.200**	1.000		
优势木平均高	0.722**	0.56**	0.369**	-0.126**	1.000	
林分平均胸径	0.308**	0.352**	0.583**	-0.610	0.398**	1.000

注: **表示两个变量在 $P < 0.01$ 水平上显著相关, *表示两个变量在 $P < 0.05$ 水平上显著相关。

表 5 不同林分变量个数的树高-胸径最优模型

Tab. 5 Optimal models of tree height-DBH relationship for variables in different stands

模型	函数形式	R ²	RMA/%	均方根误差(RMSE)/m
G1	$H = 1.3 + \frac{D^2}{[a_1 + a_2D + (a_3 + a_4h_y)D^2]}$	0.904	12.089	2.587
G2	$H = 1.3 + \frac{D^2}{[(a_1 + a_2BA) + (a_3 + a_4h_y)D + a_5D^2]}$	0.912	11.721	2.483
G3	$H = 1.3 + \frac{D^2}{[(a_1 + a_2D_g) + (a_3 + a_4h_y + a_5BA)D + a_6D^2]}$	0.914	11.699	2.449

2.3 非线性混合效应模型拟合

2.3.1 基础混合效应模型

最优基础模型(式 5)引入随机效应, 建模结果(表 6)显示, 基础模型的 AIC 与 BIC 值最大, 分别为 18 835.75 和 18 860.49。引入一个随机参数后, 随机效应作用在 μ_1 、 μ_2 、 μ_3 3 种情况模型都收敛, AIC 和 BIC 值相比基础模型有所降低, 且经过似然比检验, 模型拟合结果显著优于基础模型(LRT=1 611.797, $P < 0.000 1$)。当随机效应作用于参数 μ_2 时, AIC 与 BIC 值最小, 分别为 17 225.95 与 17 256.88。进一步引入两个随机参数拟合基础混合效应模型时, 同样 3 种情况收敛, 且 AIC 与 BIC 值继续降低。与引入单个随机效应的混合模型相比, 两者差异显著(LRT=145.509, $P < 0.000 1$)。当随机效应作用在 μ_2 、 μ_3 两个参数时, AIC 与 BIC 值最小, 分别为 17 084.44、17 127.74, 此时模型的拟合效果最佳。其模型一般表达式为

$$H_{ij} = 1.3 + \frac{D_{ij}^2}{[a_1 + (a_2 + \mu_{2i})D_{ij} + (a_3 + \mu_{3i})D_{ij}^2]} + \varepsilon_{ij} \quad (7)$$

式中: μ_{2i} 、 μ_{3i} 为样方水平的随机参数。

2.3.2 广义混合效应模型筛选

在最佳广义模型中引入随机效应构建混合模型, 获得 19 种模型(表 7)。17 种情况的 AIC 与 BIC 值均小于前期筛选的广义模型(式 6)。当引入 1 个随机效应时, 6 种情况都收敛, 其中随机效应作

用在参数 μ_3 的情况拟合效果最好, 经似然比检验, 该模型拟合效果显著优于广义模型(LRT=187.227, $P < 0.000 1$); 当引入 2 个随机效应时, 共有 11 种情况收敛, 其中随机效应作用在 μ_3 、 μ_6 的情况拟合效果最好, 其 AIC 与 BIC 值分别是 16 372.14 和 16 433.99, 对比一个随机效应, 该模型拟合效果显著提高(LRT = 68.701, $P < 0.000 1$); 当引入 3 个随机效应时, 随机效应作用在 μ_1 、 μ_3 、 μ_6 的情况拟合效果最好, 其 AIC 与 BIC 值分别是 16 349.12 和 16 429.53, 相较随机效应作用于 μ_2 、 μ_3 时显著提高(LRT = 29.015, $P < 0.000 1$), 最终选择其为最佳广义混合效应模型, 模型表达式为

$$H_{ij} = 1.3 + \frac{D_{ij}^2}{\{(a_1 + \mu_{1i}) + a_2D_{g_i} + (a_3 + \mu_{3i}) + [a_4h_{y_i} + a_5BA_i]D_{ij} + (a_6 + \mu_{6i})\}} + \varepsilon_{ij} \quad (8)$$

式中: μ_{1i} 、 μ_{3i} 、 μ_{6i} 为样方水平的随机参数。

2.4 模型评价与对比

2.4.1 模型预测精度评价

筛选得到 4 种模型的残差分布图见图 1, 广义模型的残差分布比基础模型更紧密, 离散程度更小, 两个混合模型的残差分布都在 0 刻度上下波动, 说明未出现明显异方差现象。此外, 两种模型的残差分布较为均衡, 其拟合结果优于固定效应, 说明混合模型对树高值预测更准确稳定, 红松数据统计拟合结果可靠, 预测结果与实测数据趋势一致。

表 6 基础混合效应模型验证结果

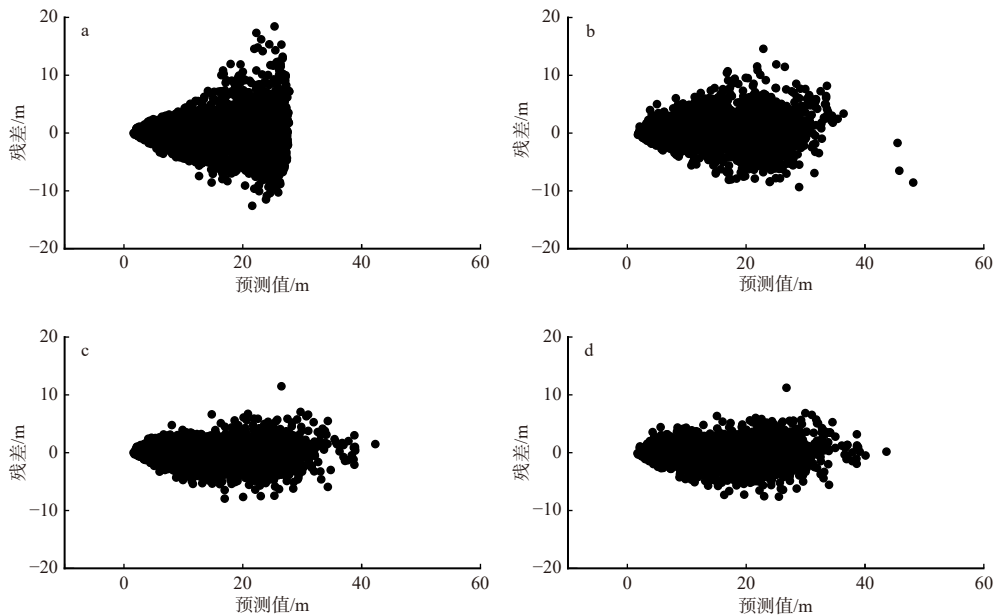
Tab. 6 Verification results of basic mixed effects model

模型	随机参数	参数个数	AIC	BIC	对数似然值	似然比检验值(LRT)	P
基础模型		3	18 835.75	18 860.49	-9 413.874		
	μ_1	4	18 480.04	18 510.97	-9 235.020		
	μ_2	4	17 225.95	17 256.88	-8 607.975	1 611.797	< 0.000 1
	μ_3	4	17 421.44	17 452.37	-8 705.719		
基础混合效应模型	$\mu_1 + \mu_2$	5	17 129.03	17 172.33	-8 557.514		
	$\mu_1 + \mu_3$	5	17 250.96	17 294.26	-8 618.482		
	$\mu_2 + \mu_3$	5	17 084.44	17 127.74	-8 535.221	145.509	< 0.000 1

表7 广义混合效应模型验证结果

Tab. 7 Verification results of generalized mixed effects model

模型	随机参数	参数个数	AIC	BIC	对数似然值	LRT	<i>P</i>
广义模型		6	16 622.06	16 665.36	-8 304.032		
	μ_1	7	16 798.88	16 848.37	-8 391.442		
	μ_2	7	16 494.42	16 543.91	-8 239.212		
	μ_3	7	16 436.84	16 486.32	-8 210.418	187.227	< 0.000 1
	μ_4	7	16 460.30	16 509.78	-8 222.149		
	μ_5	7	16 498.53	16 548.01	-8 241.263		
	μ_6	7	16 481.62	16 531.11	-8 232.812		
	$\mu_1 + \mu_3$	8	16 429.28	16 491.13	-8 204.639		
	$\mu_1 + \mu_6$	8	16 444.86	16 506.72	-8 212.431		
	$\mu_3 + \mu_6$	8	16 372.14	16 433.99	-8 176.068	68.701	< 0.000 1
广义混合效应模型	$\mu_2 + \mu_4$	8	16 444.96	16 506.81	-8 212.477		
	$\mu_4 + \mu_5$	8	16 459.34	16 521.19	-8 219.668		
	$\mu_2 + \mu_3$	8	16 407.12	16 468.98	-8 193.562		
	$\mu_3 + \mu_4$	8	16 422.01	16 483.8	-8 201.007		
	$\mu_3 + \mu_5$	8	16 502.53	16 564.38	-8 241.263		
	$\mu_2 + \mu_6$	8	16 405.44	16 467.30	-8 192.721		
	$\mu_4 + \mu_6$	8	16 381.88	16 443.74	-8 180.940		
	$\mu_5 + \mu_6$	8	16 917.14	16 979.00	-8 448.571		
	$\mu_1 + \mu_3 + \mu_6$	9	16 349.12	16 429.53	-8 161.560	29.015	< 0.000 1
	$\mu_2 + \mu_4 + \mu_5$	9	16 447.52	16 527.94	-8 210.761		



a. 基础模型; b. 广义模型; c. 基础混合效应模型; d. 广义混合效应模型

图1 4种模型残差分布

Fig. 1 Residual distribution of four models

4种模型的拟合对比(表8)结果显示,广义模型RMA平均下降2.72%,RMSE下降0.886 m,MAE下降0.676 m。与基础模型(式5)比较,混合模型的估算精度有显著提高,混合效应模型(式7)的 R^2 比

基础模型相比(式5)增加0.12,RMA减少5.997, RMSE减少1.683 m,MAE减少1.261 m。广义混合效应模型(式8)的 R^2 比广义模型(式6)增加0.044,RMA减少2.947%,RMSE减少0.73 m,MAE减少

表 8 各模型拟合结果

Tab. 8 Fitting results of each model

拟合统计指标	基础模型	基础混合效应模型	广义模型	广义混合效应模型
R^2	0.841	0.961	0.914	0.958
RMA/%	14.419	8.422	11.699	8.752
RMSE/m	3.335	1.652	2.449	1.719
MAE/m	2.492	1.231	1.816	1.288

表 9 模型检验结果比较

Tab. 9 Comparison of model test results

模型		检验指标		
		RMA/%	RMSE/m	MAE/m
固定效应模型	基础模型	15.031	3.289	2.556
	广义模型	14.170	2.871	2.099
混合效应模型	基础模型	12.262	2.406	1.876
	广义模型	11.774	2.125	1.655

0.528 m。基础混合效应模型的模型表现比广义混合效应模型稍好,但两者之间差别较小,一方面原因是样方随机效应中包含林分因素的差异性,另一方面则说明混合效应中林分因子对树高-胸径的作用被样方之间的差异性削弱。

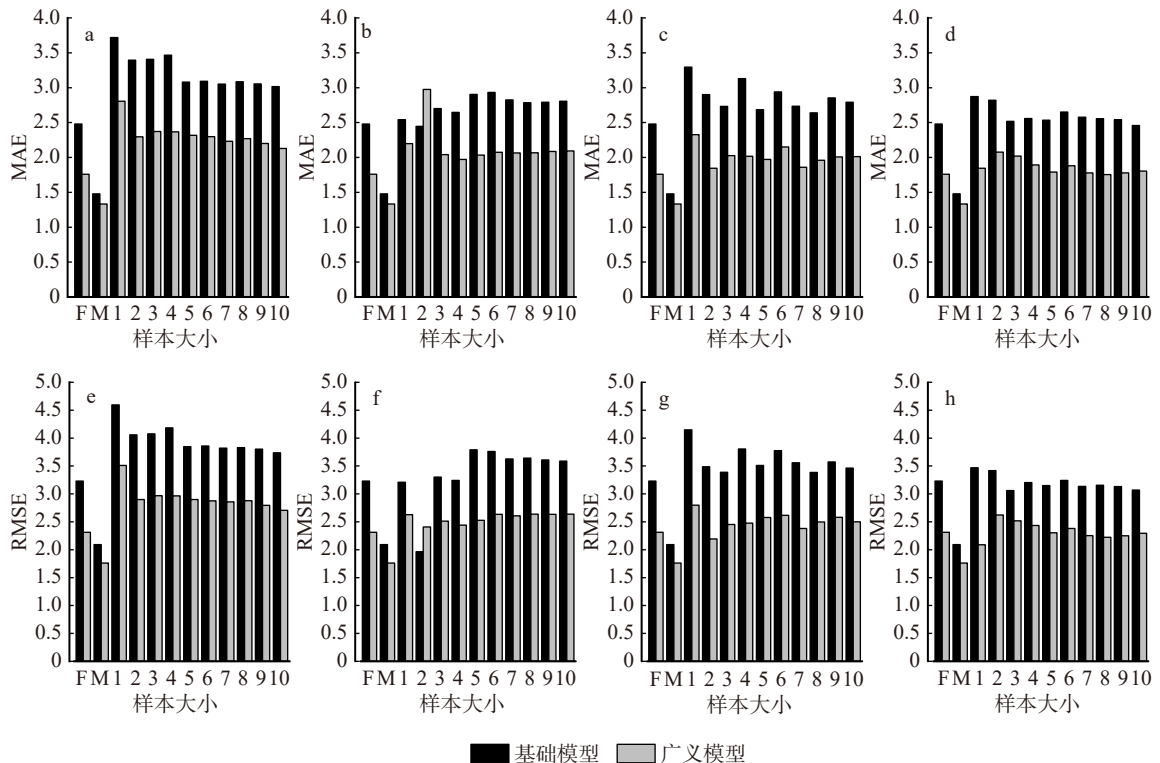
利用检验数据对 4 种模型检验(表 9),混合模型和固定模型相比,前者的拟合效果更优,广义优于基础模型,说明林分变量与随机效应均能提高模型的表现能力。

2.4.2 模型抽样比较

比较各模型 4 种抽样下的 3 种预测情况(图 2),MPA 预测精度最高,基础模型的 FPA 和 MPA 精度较其 MPS 提高,MAE 分别降低了 0.130 和 1.131 m;广义模型的 FPA 和 MPA 精度较其 MPS 同样提高,MAE 分别降低了 0.103 和 0.528 m。模型 FPA 和 MPA 预测情况,广义模型精度均高于基础模型。当进行

FPA、MPA 预测时,模型的预测精度主要受预测变量的影响,而出现 MPA 优于 FPA,说明混合模型的 MPA 能代表其总体水平预测,林分变量对混合模型的作用影响较大。MPS 预测中混合模型的 MAE 和 RMSE 变化趋势相同。在 4 种抽取方案中,几乎所有抽样方案都显示出广义混合模型优于基础混合模型,最大值抽取与平均木抽取预测精度都随着样本数量增加而提高,其余方法无明显规律。

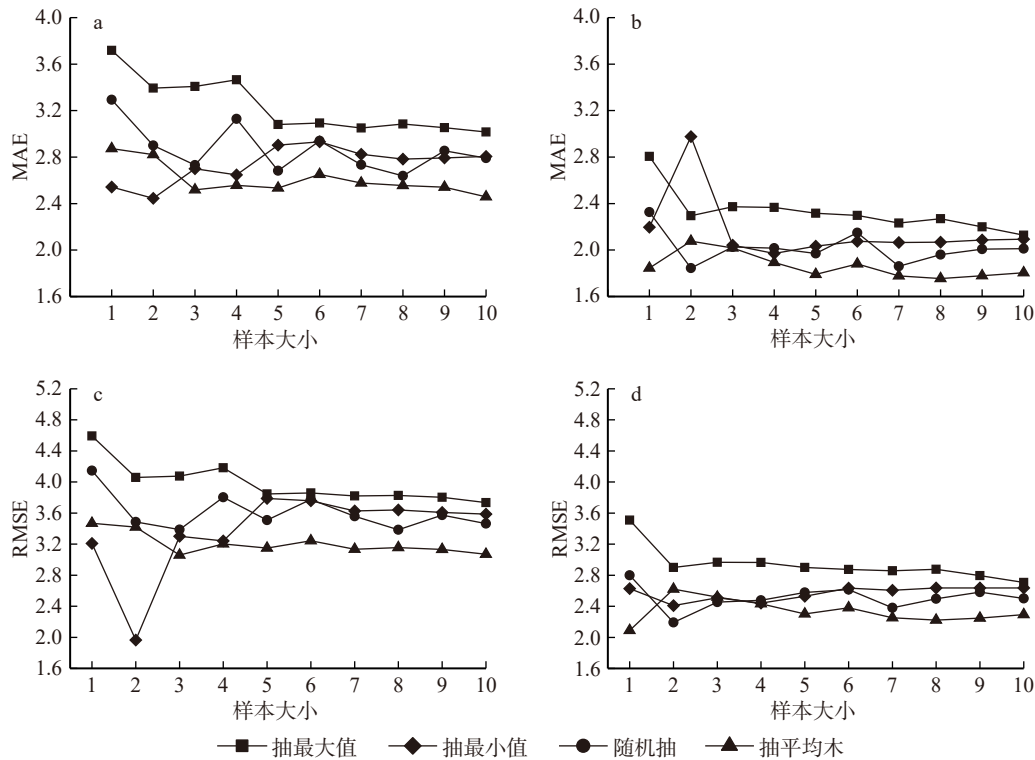
两种混合效应模型在不同抽样方案下的预测精度和样本量的关系如图 3 所示。所有抽样方案中,广义模型的预测精度优于基础模型。在基础混合效应模型中,MAE 和 RMSE 的变化趋势一致,而在广义混合效应模型中(除最小值抽取外),总体抽样的 MAE 和 RMSE 变化趋势也保持一致。两种模型的 MPS 中,总体趋势精度最高的是平均木抽取,精度



F. 固定效应模型的平均水平预测(FPA); M. 混合模型的总体平均响应预测(MPA); a、e. 抽最大值; b、f. 抽最小值; c、g. 随机抽; d、h. 抽平均木

图 2 不同抽样方案下模型的 3 种预测精度

Fig. 2 Three prediction accuracies of the model under different sampling schemes



a、c. 基础模型; b、d. 广义模型

图3 4种抽样方案下模型的预测精度与抽样数量变化

Fig. 3 Predictive accuracy of the model under four sampling scenarios and changes in sampling size

最低的是最大值抽取。抽样数量较少时,两种模型的变化趋势均表现出较大波动,在抽样数量从5株开始,随数量增加变化趋势逐渐稳定。在平均木抽样方案时,当抽取8株样本木时精度达到最高,MAE和RMSE分别为1.755和2.089 m。综上可得,在广义混合效应模型中,抽取8株平均木的预测精度最好。在抽取平均木中,当抽取5株树时,预测精度提高幅度达到峰值。然而,当抽样数量超过5株后,尽管预测精度仍随样本量的增加略有提高,但这种提高幅度相对不显著。因此,结合人力成本的考虑,平均木法中抽取5株树也是可行的选择。

3 讨论

树高和胸径不仅能直接体现林分结构特征,两者的内在关系还可以更深入地揭示林分生长规律,从而进行合理森林经营。因此,本研究针对红松树高与胸径之间的数量关系进行拟合和检验,并从15个常用模型中筛选出最优基础模型用于后续建模分析。早期研究表明,树木的生长发育不仅由遗传因素决定,还受到环境条件、林分特征等多种外部因素的影响^[35]。为筛选出表现最好的红松树高-胸径模型,本研究对林分因子与树高进行了相关性分析,并通过不同组合方式将林分因子引入模型,从而提升模型的表现能力。当引入单个因子时,优势木平

均高对模型影响最明显。优势木平均高可以用于评估立地质量,因此考虑立地质量可以提高模型精度。在此基础上,继续引入胸高断面积能进一步提升模型拟合效果。当所有林分因子均被纳入模型时,模型的拟合效果达到最佳。Bronisz等^[34]的研究也得到类似结论。林分平均胸径是反映林分竞争的重要指标,因此考虑竞争因素能更好地预测树高^[35]。

本文通过对比不同混合模型的AIC与BIC值确定最佳混合模型。建模结果显示,基础混合效应模型在 a_2 、 a_3 参数上引入随机效应提升了模型表现能力;而广义混合效应模型在 a_1 、 a_3 、 a_6 参数上引入随机效应时拟合效果最佳。另外,从模型的统计值来看,混合模型的表现能力更突出,这与程雯等^[6]对东北阔叶红松林建模结论一致,与华北落叶松针阔混交林研究结论^[12]也相符。尽管与广义混合效应模型相比,基础混合效应模型的表现稍好,但是优越程度非常小,该结论与红松^[17]、马尾松(*Pinus massoniana*)^[36]、樟子松^[14]等建模结果相吻合,说明样方与林分因子影响作用有重叠,但是在检验数据中则是广义混合效应模型拟合能力优于基础混合效应模型,樊伟等^[37]对杉木(*Cunninghamia lanceolata*)的建模也得出相同结论。然而,Zang等^[38]在东北落叶松研究中发现基础模型中添加其他相关变量甚至会减弱其表现能力。

模型 MPA 和 FPA 两种预测无需随机参数, 此时预测能力一般会随着预测变量的变化而变化, 这两种预测方式的变化结果几乎是一致的^[14]。但在基础模型中容易出现 FPA 预测精度高于 MPA 的特殊情况, 其主要原因是混合模型存在随机效应, 而此时随机效应为 0 的 MPA 一般不能准确表达预测能力^[39]。因此在研究中会进行混合模型的 MPS 预测, 而 MPS 的预测变化一般是比较明显的。以往研究结果多为 MPS 精度高于 MPA^[14], 而本研究 MPA 的预测精度是最高的, 推测原因有二: 第一, 可能是由于红松数据集的采集地条件相似度高; 第二, 因为林分变量与样方影响情况存在交叉, 会干扰模型的表达^[39]。国内外诸多学者围绕抽样方案与抽样精度展开了深入研究, 研究表明, 抽样方案与抽样精度会受到林分类型、样地类型、物种类型等众多因素的综合作用, 进而导致研究结果呈现差异性^[34]。西班牙西北部蓝桉(*Eucalyptus globulus*) 研究中对 5 种抽样策略预测效果, 精度最高的是抽取最小树^[40]。Temesgen 等^[41]与 Bronisz 等^[34]均发现每个样地抽取胸径最大是精度最高, Ciceu 等^[33]的研究表明抽取平均木 6 棵树预测精度最高, 臧颢等^[17]在红松树高模型研究中得出结论为抽取平均木的抽样设计最优, 抽取 4 株树预测精度提升最为明显。在实际应用中, 研究地点与树种存在差异, 抽样方法和样本数量难以统一, 所以需在模型中比对不同抽样方法与样本数, 以达到最佳预测效果。

4 结 论

本文选取了 15 个常用树高模型, 并经过对比分析得到 Prodan 模型作为红松基础模型, 同时结合树高与林分因子的相关性分析结果, 引入胸高断面面积、林分平均胸径与优势木平均高构建最优广义模型, 然后在固定效应模型中添加样方随机效应构建混合效应模型, 模型表现能力提高。建模数据中基础混合效应模型拟合水平稍好于广义混合效应模型, 检验数据中广义混合效应模型预测精度更好。此外对两种混合模型进行 FPA、MPA 和 MPS 3 种精度预测, 结果呈现为 MPA > FPA > MPS, MPS 精度预测中, 设计 4 种抽样方法比较预测能力, 预测结果显示抽取平均木的情况是最优的, 不考虑任何成本时抽取 8 株树木的预测效果最好, 考虑成本时至少抽取 5 株树。

参 考 文 献

[1] 卢军, 张会儒, 雷相东, 等. 长白山云冷杉针阔混交林幼树树高-胸径模型[J]. 北京林业大学学报, 2015, 37(11): 10-25.

Lu J, Zhang H R, Lei X D, et al. Height-diameter models for saplings in a spruce-fir mixed forest in Changbai Mountains[J]. Journal of Beijing Forestry University, 2015, 37 (11): 10-25.

[2] Luo W, Kim H S, Zhao X, et al. New forest biomass carbon stock estimates in Northeast Asia based on multisource data[J]. Global Change Biology, 2020, 26(12): 7045-7066.

[3] Sharma R P, Vacek Z, Vacek S, et al. A nonlinear mixed-effects height-to-diameter ratio model for several tree species based on Czech National forest inventory data[J]. Forests, 2019, 10(1): 70.

[4] 李海奎, 法蕾. 基于分级的全国主要树种树高-胸径曲线模型[J]. 林业科学, 2011, 47(10): 83-90.

Li H K, Fa L. Height-diameter model for major tree species in China using the classified height method[J]. Scientia Silvae Sinicae, 2011, 47(10): 83-90.

[5] Cui K D, Wu X Y, Zhang C Y, et al. Estimating height-diameter relations for structure groups in the natural forests of Northeastern China[J]. Forest Ecology and Management, 2022, 519: 120298.

[6] 程雯, 武晓昱, 叶尔江·拜克吐尔汗, 等. 基于混合效应和分位数回归的温带针阔混交林树高与胸径关系研究[J]. 北京林业大学学报, 2024, 46(2): 28-39.

Cheng W, Wu X Y, Baketuerhan Y E J, et al. Research on the relationship between tree height and DBH of temperate coniferous and broadleaved mixed forests based on mixed effects and quantile regression[J]. Journal of Beijing Forestry University, 2024, 46(2): 28-39.

[7] 符利勇, 张会儒, 李春明, 等. 非线性混合效应模型参数估计方法分析[J]. 林业科学, 2013, 49(1): 114-119.

Fu L Y, Zhang H R, Li C M, et al. Analysis of nonlinear mixed effects model parameter estimation methods[J]. Scientia Silvae Sinicae, 2013, 49(1): 114-119.

[8] 易达, 李凤日, 马爱云, 等. 基于混合效应模型和分位数回归的长白落叶松枝下高模型构建[J]. 应用生态学报, 2023, 34(4): 1035-1042.

Yi D, Li F R, Ma A Y, et al. Model construction for height to crown base of *Larix olgensis* based on mixed-effects model and quantile regression[J]. Chinese Journal of Applied Ecology, 2023, 34(4): 1035-1042.

[9] Gregorie T G. Generalized error structure for forestry yield models[J]. Forest Science, 1987, 33(2): 423-444.

[10] West P W, Ratkowsky D A, Davis A W. Problems of hypothesis testing of regressions with multiple measurements from individual sampling units[J]. Forest Ecology and Management, 1984, 7(3): 207-224.

[11] Lappi J. A longitudinal analysis of height/diameter curves[J]. Forest Science, 1998, 43(3): 555-570.

[12] 王冬至, 张冬燕, 张志东, 等. 基于非线性混合模型的针阔混交林树高与胸径关系[J]. 林业科学, 2016, 52(1): 30-36.

Wang D Z, Zhang D Y, Zhang Z D, et al. Height-diameter relationship for conifer mixed forest based on nonlinear mixed-effects model[J]. Scientia Silvae Sinicae, 2016, 52(1): 30-36.

[13] 曹晓梅, 苗铮, 郝元朔, 等. 基于树种分类的帽儿山阔叶混交林树高-胸径模型[J]. 应用生态学报, 2024, 35(2): 307-320.

Cao X M, Miao Z, Hao Y S, et al. Height-diameter model of

- broad-leaved mixed forest based on species classification in Maoershan, Northeast China[J]. Chinese Journal of Applied Ecology, 2024, 35(2): 307–320.
- [14] 周晏平, 雷泽勇, 赵国军, 等. 沙地樟子松不同树高-胸径模型比较分析[J]. 华南农业大学学报, 2019, 40(3): 75–81.
Zhou Y P, Lei Z Y, Zhao G J, et al. Comparing different height-diameter models of *Pinus sylvestris* var. *mongolica* in sandy land[J]. Journal of South China Agricultural University, 2019, 40(3): 75–81.
- [15] Gómez-García E, Diéguez-Aranda U, Castedo-Dorado F, et al. A comparison of model forms for the development of height-diameter relationships in even-aged stands[J]. Forest Science, 2014, 60(3): 560–568.
- [16] 余昆隆, 谭伟, 杨靖, 等. 基于分位数组合的杉木树高-胸径模型[J]. 中南林业科技大学学报, 2022, 42(11): 94–101.
Yu K L, Tan W, Yang J, et al. Height-diameter models for *Cunninghamia lanceolata* based on quantile groups[J]. Journal of Central South University of Forestry & Technology, 2022, 42(11): 94–101.
- [17] 臧颢, 雷相东, 张会儒, 等. 红松树高-胸径的非线性混合效应模型研究[J]. 北京林业大学学报, 2016, 38(6): 8–16.
Zang H, Lei X D, Zhang H R, et al. Nonlinear mixed-effects height-diameter model of *Pinus koraiensis*[J]. Journal of Beijing Forestry University, 2016, 38(6): 8–16.
- [18] 李婉婷, 姜立春, 万道印. 基于混合效应的兴安落叶松树高与胸径关系模拟[J]. 植物研究, 2014, 34(3): 343–348.
Li W T, Jiang L C, Wan D Y. Simulation of height-diameter relationships for *Larix gmelinii* based on mixed effects[J]. Bulletin of Botanical Research, 2014, 34(3): 343–348.
- [19] Stage A R. Prediction of height increment for models of forest growth[Z]. Ogden: U. S. Dept. of Agriculture, 1975.
- [20] Wykoff W, Crookston N L, Stage A R. User's guide to the stand prognosis model[R]. Ogden: U. S. Department of Agriculture, 1982.
- [21] Bates D M, Watts D G. Relative curvature measures of nonlinearity[J]. Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological), 1980, 42(1): 1–16.
- [22] Meyer H A. A mathematical expression for height curves[J]. Journal of Forestry, 1940, 38(5): 415–420.
- [23] Schumacher F X. A new growth curve and its application to timber yield studies[J]. Journal of Forestry, 1939, 37: 819–820.
- [24] Larson B C. Development and growth of even-aged stands of Douglas-fir and grand fir[J]. Canadian Journal of Forest Research, 1986, 16(2): 367–372.
- [25] Curtis R. Height-diameter and height-diameter-age equations for second-growth Douglas-fir[J]. Forest Science, 1967(4): 365–375.
- [26] Näslund M. Skogsförsöksanstaltens gallringsförsök i tallskog: primärbearbetning[J]. Meddelanden Från Statens Skogsförsöksanstalt, 1936, 29: 37.
- [27] Bertalanffy L V. Quantitative laws in metabolism and growth[J]. The Quarterly Review of Biology, 1957, 32(3): 217–231.
- [28] Ratkowsky D A. handbook of non-Linear regression models[M]. New York: Marcel and Dekker, 1990: 241.
- [29] Pearl R, Reed L J. On the rate of growth of the population of the United States since 1790 and its mathematical representation[J]. Proceedings of the National Academy of Sciences, 1920, 6(6): 275–288.
- [30] Winsor C P. The Gompertz curve as a growth curve[J]. Proceedings of the National Academy of Sciences, 1932, 18(1): 1–8.
- [31] Prodan M. Growth functions in: forest biometrics[M]. Oxford: Pergamon Press, 1968: 341–394.
- [32] Richards F J. A flexible growth function for empirical use[J]. Journal of Experimental Botany, 1959(2): 290–301.
- [33] Ciceu A, Garcia-Duro J, Seceleanu I, et al. A generalized nonlinear mixed-effects height-diameter model for Norway spruce in mixed-uneven aged stands[J]. Forest Ecology and Management, 2020, 477: 118507.
- [34] Bronisz K, Mehtätalo L. Mixed-effects generalized height-diameter model for young silver birch stands on post-agricultural lands[J]. Forest Ecology and Management, 2020, 460: 117901.
- [35] Santiago-García W, Jacinto-Salinas A H, Rodríguez-Ortiz G, et al. Generalized height-diameter models for five pine species at Southern Mexico[J]. Forest Science and Technology, 2020, 16(2): 49–55.
- [36] 陈浩, 罗扬. 马尾松树高-胸径非线性混合效应模型构建[J]. 森林与环境学报, 2021, 41(4): 439–448.
Chen H, Luo Y. Construction of nonlinear mixed effect height-diameter models for *Pinus massoniana*[J]. Journal of Forest and Environment, 2021, 41(4): 439–448.
- [37] 樊伟, 许崇华, 崔珺, 等. 基于混合效应的大别山地区杉木树高-胸径模型比较[J]. 应用生态学报, 2017, 28(9): 2831–2839.
Fan W, Xu C H, Cui J, et al. Comparisons of height-diameter models of Chinese fir based on mixed effect in Dabie Mountain area, China[J]. Chinese Journal of Applied Ecology, 2017, 28(9): 2831–2839.
- [38] Zang H, Lei X, Zeng W. Height-diameter equations for larch plantations in Northern and Northeastern China: a comparison of the mixed-effects, quantile regression and generalized additive models[J]. Forestry, 2016(4): 89.
- [39] Yang Y, Huang S. Allometric modelling of crown width for white spruce by fixed- and mixed-effects models[J]. Forestry Chronicle, 2017, 93(2): 138–147.
- [40] Crecente-Campo F, Tomé M, Soares P, et al. A generalized nonlinear mixed-effects height-diameter model for *Eucalyptus globulus* L. in northwestern Spain[J]. Forest Ecology and Management, 2010, 259(5): 943–952.
- [41] Temesgen H, Monleon V J, Hann D W. Analysis and comparison of nonlinear tree height prediction strategies for Douglas-fir forests[J]. Canadian Journal of Forest Research, 2008, 38(3): 553–565.

(责任编辑 范娟
责任编辑委 张会儒)