文章编号:1000-1638(2025)01-0008-08 DOI:10.13484/j.nmgdxxbzk.20250102

矩阵对偶核-EP 逆以及性质*

李 凡,海国君
(内蒙古大学数学科学学院,呼和浩特 010021)

摘要:基于核-EP 分解和 Hartwig-Spindelböck 分解给出了矩阵对偶核-EP 逆的表示,并给出了矩阵与其对偶核-EP 逆可交换的等价条件,讨论了对偶核-EP 逆的幂等性以及其他性质。

关键词:对偶核-EP 逆; 核-EP 分解; Hartwig-Spindelböck 分解
中图分类号:O151.21 **文献标志码:**A

近几十年来,矩阵的广义逆已被越来越多的学者研究和熟悉。1903 年,Fredholm[1] 在研究积分算子问题时首次提出了广义逆的思想。此后,广义逆的思想转化为定义在文献[2]中发表。1920 年,Moore[3] 以投影矩阵的形式定义了任意矩阵的广义逆。尽管如此,由于研究成果的抽象晦涩,这一创举在当时并未引起学术界太多关注。1955 年,Penrose[4] 通过四个方程直观地定义了广义逆,该广义逆为这四个方程的唯一解:给定 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$,若 $X\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 满足 $AXA=A$,$XAX=X$,$(AX)^*=AX$,$(XA)^*=XA$,称 X 为 A 的 Moore-Penrose 逆,记为 $X=A^\dagger$。1958 年,Drazin[5] 给出了 Drazin 逆的定义,它满足以下三个矩阵方程:给定 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$,若 $X\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 满足 $XAX=X$,$AX=XA$,$A^{k+1}X=A^k$,$ind(A)=k$,称 X 为 A 的 Drazin 逆,记为 $X=A^D$。如果 $ind(A)=1$,则称之为 A 的群逆,记为 $A^\#$。2010 年,Baksalary 等[6] 定义了核逆,设 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$,$ind(A)\leqslant 1$。若 X 满足 $AX=AA^\dagger$,$R(X)\subseteq R(A)$,称 X 为 A 的核逆,其具体研究可见文献[7-9]。2014 年,Manjunatha 等[10] 定义了核-EP 逆:给定 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$,若 $X\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 满足 $XAX=X$,$R(X)=R(X^*)=R(A^k)$,称 X 为 A 的核-EP 逆,记为 $A^\oplus$。由文献[11]可知,核-EP 逆还可以表示为 $A^\oplus=A^DA^k(A^k)^\dagger$。Manjunatha 等[10] 还引入了另一种广义逆,即对偶核-EP 逆 $A_\oplus$,其适用于任意矩阵。尽管对于核-EP 逆的研究持续进展,但对于对偶核-EP 逆的研究仍有深入空间。

2016 年,Wang[11] 首次提出了一种新的矩阵分解——核-EP 分解。本文基于核-EP 分解和 Hartwig-Spindelböck 分解,给出了对偶核-EP 逆的表达式,讨论了对偶核-EP 逆与原矩阵可交换的等价条件以及对偶核-EP 逆幂等性的等价刻画,此外,研究了对偶核-EP 逆的其他性质。

1 预备知识

令 $\mathbb{C}$ 为复数域,$\mathbb{C}^{n\times n}$ 表示 $\mathbb{C}$ 上的 n 阶矩阵的集合,I 表示 $\mathbb{C}^{n\times n}$ 中的单位矩阵。对于 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$,$A^*$、$\mathrm{rank}(A)$、$R(A)$、$N(A)$ 分别表示 A 的共轭转置矩阵、秩、值域和零空间,$P_{R(A)}=AA^\dagger$、$P_{N(A)}=I-A^\dagger A$ 分别为 $R(A)$ 和 $N(A)$ 上的投影。若 A 是奇异的,则满足条件 $\mathrm{rank}(A^k)=\mathrm{rank}(A^{k+1})$ 的最

* **收稿日期:**2024-03-28; **修回日期:**2024-08-11
基金项目:国家自然科学基金项目(11761052); 内蒙古自然科学基金项目(2020ZD01)
作者简介:李 凡(1999-),男,内蒙古赤峰人,2021 级硕士研究生。E-mail:2361588802@qq.com
通信作者:海国君(1983-),男,内蒙古通辽人,教授,博士。主要从事算子理论研究。E-mail:haigj@qq.com

小非负整数 k 称为 A 的指标，记为 $ind(A)$。特别地，非奇异矩阵的指标为 0。本文涉及到的广义逆概念如下：

定义 1[10]　设矩阵 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$，$ind(A)=k$。若存在唯一矩阵 $X\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 满足等式

$$XAX=X,R(X)=R(X^*)=R((A^k)^*),$$

则称 X 为 A 的对偶核-EP 逆，记为 $X=A_{\oplus}$。此外，由文献[12-13]知，对偶核-EP 逆可表示为 $A_{\oplus}=(A^k)^{\dagger}A^kA^D$，由文献[14]进一步推导得到 $A_{\oplus}=(A^k)^{\dagger}A^kA^D=(A^DA)^{\dagger}A^D$。

引理 1[11]　（核-EP 分解）设 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$，$ind(A)=k$，$\operatorname{rank}(A)=r>0$，则存在一个酉矩阵 $U\in\mathbb{C}^{n\times n}$，使得

$$A=U\begin{pmatrix}T & S\\ 0 & N\end{pmatrix}U^* \tag{1}$$

其中 T 是非奇异的，$N^k=0$。

引理 2[15]　（Hartwig-Spindelböck 分解）设 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$，$\operatorname{rank}(A)=r>0$，则存在一个酉矩阵 $U\in\mathbb{C}^{n\times n}$，使得

$$A=U\begin{pmatrix}\Sigma K & \Sigma L\\ 0 & 0\end{pmatrix}U^* \tag{2}$$

其中 $\Sigma=\operatorname{diag}(\sigma_1 I_{r_1},\sigma_2 I_{r_2},\cdots,\sigma_t I_{r_t})$ 为对角阵，$\sigma_1>\sigma_2>\cdots>\sigma_t>0$，$r_1+r_2+\cdots+r_t=r$ 并且 $K\in\mathbb{C}^{r\times r}$ 和 $L\in\mathbb{C}^{r\times(n-r)}$ 满足 $KK^*+LL^*=I_r$。

引理 3[16]　2×2 块算子矩阵 $\begin{pmatrix}A & B\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ 是 MP 可逆的当且仅当 $R(A)+R(B)$ 是闭的，并且 $\begin{pmatrix}A & B\\ 0 & 0\end{pmatrix}^{\dagger}=\begin{pmatrix}A^*(AA^*+BB^*)^{\dagger} & 0\\ B^*(AA^*+BB^*)^{\dagger} & 0\end{pmatrix}$。

引理 4[17]　设 $A,B,T,S\in\mathbb{C}^{n\times n}$，若 $M=\begin{pmatrix}A & AT\\ SA & B\end{pmatrix}$，即可得到

$$\operatorname{rank}(M)=\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(B-SAT)。$$

引理 5[18]　令 A 为(1)式中的复矩阵，则

$$A^{\dagger}=U\begin{pmatrix}T^*\Delta & -T^*\Delta SN^{\dagger}\\ (I_{n-t}-N^{\dagger}N)S^*\Delta & N^{\dagger}-(I_{n-t}-N^{\dagger}N)S^*\Delta SN^{\dagger}\end{pmatrix}U^*,$$

$$A^D=U\begin{pmatrix}T^{-1} & (T^{k+1})^{-1}\widetilde{T}\\ 0 & 0\end{pmatrix}U^*,A^k=U\begin{pmatrix}T^k & \widetilde{T}\\ 0 & 0\end{pmatrix}U^*,$$

其中 $\Delta=(TT^*+S(I-N^{\dagger}N)S^*)^{-1}$，$\widetilde{T}=\sum_{j=0}^{k-1}T^jSN^{k-1-j}$。

引理 6[19]　令 A 为(2)式中的复矩阵，则

$$A^D=U\begin{pmatrix}(\Sigma K)^D & ((\Sigma K)^D)^2\Sigma L\\ 0 & 0\end{pmatrix}U^* \tag{3}$$

2　主要结论及证明

定理 1　设 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$，$\operatorname{rank}(A)=r$，$A$ 为(2)式中的复矩阵，则

$$A_{\oplus}=U\begin{pmatrix}K^*((\Sigma K)^D\Sigma)^{\dagger}(\Sigma K)^D & K^*((\Sigma K)^D\Sigma)^{\dagger}((\Sigma K)^D)^2\Sigma L\\ L^*((\Sigma K)^D\Sigma)^{\dagger}(\Sigma K)^D & L^*((\Sigma K)^D\Sigma)^{\dagger}((\Sigma K)^D)^2\Sigma L\end{pmatrix}U^* \tag{4}$$

证明　由(2)、(3)式可知

$$A^{D}A=U\begin{pmatrix}(\Sigma K)^{D}\Sigma K & (\Sigma K)^{D}\Sigma L\\ 0 & 0\end{pmatrix}U^{*},$$

由引理 3 可设

$$(A^{D}A)^{\dagger}=\begin{pmatrix}X_{1} & 0\\ X_{2} & 0\end{pmatrix},$$

故

$$\begin{aligned}X_{1}&=((\Sigma K)^{D}\Sigma K)^{*}\left((\Sigma K)^{D}\Sigma K((\Sigma K)^{D}\Sigma K)^{*}+(\Sigma K)^{D}\Sigma L((\Sigma K)^{D}\Sigma L)^{*}\right)^{\dagger}\\&=((\Sigma K)^{D}\Sigma K)^{*}\left((\Sigma K)^{D}\Sigma KK^{*}((\Sigma K)^{D}\Sigma)^{*}+(\Sigma K)^{D}\Sigma LL^{*}((\Sigma K)^{D}\Sigma)^{*}\right)^{\dagger}\\&=((\Sigma K)^{D}\Sigma K)^{*}\left((\Sigma K)^{D}\Sigma((\Sigma K)^{D}\Sigma)^{*}\right)^{\dagger}\\&=K^{*}((\Sigma K)^{D}\Sigma)^{*}\left(((\Sigma K)^{D}\Sigma)^{*}\right)^{\dagger}((\Sigma K)^{D}\Sigma)^{\dagger}\\&=K^{*}P_{R(((\Sigma K)^{D}\Sigma)^{\dagger})}((\Sigma K)^{D}\Sigma)^{\dagger}\\&=K^{*}((\Sigma K)^{D}\Sigma)^{\dagger}。\end{aligned}$$

同理可知,$X_{2}=L^{*}((\Sigma K)^{D}\Sigma)^{\dagger}$,由 $A_{\oplus}$ 的定义,即得证。

注 1 定理 1 中,X_1,X_2 的计算用到了$(AA^{*})^{\dagger}=(A^{*})^{\dagger}A^{\dagger}$,$R(A^{\dagger})=R(A^{*})$,其中 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$(见文献[20])。

定理 2 设 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$,$\operatorname{rank}(A)=r$,$A$ 为(2) 式中的复矩阵,则下列条件等价:

(a) $A_{\oplus}$ 是幂等的;

(b) $(A^{D})^{2}=A^{D}$;

(c) $((\Sigma K)^{D})^{2}=(\Sigma K)^{D}$。

证明 (a)⇒(b):若$(A_{\oplus})^{2}=A_{\oplus}$,则

$$(A^{D}A)^{\dagger}A^{D}(A^{D}A)^{\dagger}A^{D}=(A^{D}A)^{\dagger}A^{D},$$

上式两边左乘 $A^{D}A$ 可得

$$A^{D}A(A^{D}A)^{\dagger}A^{D}(A^{D}A)^{\dagger}A^{D}=A^{D}A(A^{D}A)^{\dagger}A^{D},$$

则

$$A^{D}A(A^{D}A)^{\dagger}A^{D}AA^{D}(A^{D}A)^{\dagger}A^{D}=A^{D}A(A^{D}A)^{\dagger}A^{D},$$

由于 $A^{D}A(A^{D}A)^{\dagger}A^{D}A=A^{D}A$,应用于上式左侧可得

$$A^{D}AA^{D}(A^{D}A)^{\dagger}A^{D}=P_{R(A^{D})}A^{D},$$

所以 $A^{D}(A^{D}A)^{\dagger}A^{D}=A^{D}$,同理左乘 A 可得$(A^{D})^{2}=A^{D}$。

(b)⇒(c):若$(A^{D})^{2}=A^{D}$, 由(3)式可知

$$\begin{pmatrix}((\Sigma K)^{D})^{2} & ((\Sigma K)^{D})^{3}\Sigma L\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(\Sigma K)^{D} & ((\Sigma K)^{D})^{2}\Sigma L\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

由此可得

$$((\Sigma K)^{D})^{2}=(\Sigma K)^{D},$$
$$((\Sigma K)^{D})^{3}\Sigma=((\Sigma K)^{D})^{2}\Sigma,$$

因此得到 $((\Sigma K)^{D})^{2}=(\Sigma K)^{D}$。

(c)⇒(a):若$((\Sigma K)^{D})^{2}=(\Sigma K)^{D}$,右乘 ΣK 可得

$$(\Sigma K)^{D}=(\Sigma K)^{D}\Sigma K,$$

由定理 1 可知

$$A_{\oplus}=U\begin{pmatrix}K^{*}((\Sigma K)^{D}\Sigma)^{\dagger}(\Sigma K)^{D} & K^{*}((\Sigma K)^{D}\Sigma)^{\dagger}((\Sigma K)^{D})^{2}\Sigma L\\ L^{*}((\Sigma K)^{D}\Sigma)^{\dagger}(\Sigma K)^{D} & L^{*}((\Sigma K)^{D}\Sigma)^{\dagger}((\Sigma K)^{D})^{2}\Sigma L\end{pmatrix}U^{*}$$

$$=U\begin{pmatrix}K^*((\Sigma K)^D\Sigma)^\dagger(\Sigma K)^D\Sigma K & K^*((\Sigma K)^D\Sigma)^\dagger((\Sigma K)^D)^2\Sigma L\\ L^*((\Sigma K)^D\Sigma)^\dagger(\Sigma K)^D\Sigma K & L^*((\Sigma K)^D\Sigma)^\dagger((\Sigma K)^D)^2\Sigma L\end{pmatrix}U^*,$$

从而可验证$(A_{\oplus})^2=A_{\oplus}$。

交换性是广义逆的一个重要性质，下面讨论对偶核-EP 逆与原矩阵的变换性。由下面的例子可知，复矩阵与其对偶核-EP 逆不可交换。令

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1&-1\\0&1&1&-1\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

则 A 与 $A_{\oplus}$不可交换，因为计算可知

$$A_{\oplus}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}&0&0\\-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&0\\\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

并且 $AA_{\oplus}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}&0&\frac{2}{3}&0\\0&1&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，$A_{\oplus}A=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}&0&0\\-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&0\\\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，易知 $AA_{\oplus}\neq A_{\oplus}A$，即对偶核-EP 逆不具有交换性。

定理 3　设 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$，$\mathrm{rank}(A)=r$，$A$ 为(2) 式中的复矩阵，则 $AA_{\oplus}=A_{\oplus}A$ 当且仅当 $((\Sigma K)^D\Sigma)^\dagger(\Sigma K)^D\Sigma K=K\Sigma((\Sigma K)^D\Sigma)^\dagger(\Sigma K)^D$ 且 $R(L)\subset N((\Sigma K)^D\Sigma)$。

证明　由(2)、(4)式可知

$$AA_{\oplus}=U\begin{pmatrix}\Sigma((\Sigma K)^D\Sigma)^\dagger(\Sigma K)^D & \Sigma((\Sigma K)^D\Sigma)^\dagger((\Sigma K)^D)^2\Sigma L\\0&0\end{pmatrix}U^*,$$

$$A_{\oplus}A=U\begin{pmatrix}K^*((\Sigma K)^D\Sigma)^\dagger(\Sigma K)^D\Sigma K & K^*((\Sigma K)^D\Sigma)^\dagger(\Sigma K)^D\Sigma L\\ L^*((\Sigma K)^D\Sigma)^\dagger(\Sigma K)^D\Sigma K & L^*((\Sigma K)^D\Sigma)^\dagger(\Sigma K)^D\Sigma L\end{pmatrix}U^*。$$

由 $AA_{\oplus}=A_{\oplus}A$ 易知

$$K^*((\Sigma K)^D\Sigma)^\dagger(\Sigma K)^D\Sigma K=\Sigma((\Sigma K)^D\Sigma)^\dagger(\Sigma K)^D \tag{5}$$

$$L^*((\Sigma K)^D\Sigma)^\dagger(\Sigma K)^D\Sigma K=0 \tag{6}$$

$$L^*((\Sigma K)^D\Sigma)^\dagger(\Sigma K)^D\Sigma L=0 \tag{7}$$

(5) 式两边左乘 K 与(6)式两边左乘 L 后，两式合并可得

$$((\Sigma K)^D\Sigma)^\dagger(\Sigma K)^D\Sigma K=K\Sigma((\Sigma K)^D\Sigma)^\dagger(\Sigma K)^D,$$

(6) 式两边右乘 K^* 与(7)式两边右乘 L^* 后，两式合并可得

$$L^*((\Sigma K)^D\Sigma)^\dagger(\Sigma K)^D\Sigma=0,$$

即$((\Sigma K)^D\Sigma)^\dagger(\Sigma K)^D\Sigma L=0$，由此可得 $R(L)\subset N(((\Sigma K)^D\Sigma)^\dagger(\Sigma K)^D\Sigma)=N((\Sigma K)^D\Sigma)$。证毕。

注 2 定理 3 的证明用到了 $N(A^\dagger A)=N(A)$,其中 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$。

设 A 为(1)式中的复矩阵,则可推出

$$A_{\oplus}=U\begin{pmatrix}\Delta_1^{-1}T^{-1} & \Delta_1^{-1}(T^{k+1})^{-1}\widetilde{T}\\ (TX_0)^*\Delta_1^{-1}T^{-1} & (TX_0)^*\Delta_1^{-1}(T^{k+1})^{-1}\widetilde{T}\end{pmatrix}U^* \tag{8}$$

其中 $\Delta_1=(I+TX_0(TX_0)^*)$,$\widetilde{T}=T^{k+1}X_0$。事实上,由引理 5 可知

$$A^DA=U\begin{pmatrix}I & TX_0\\ 0 & 0\end{pmatrix}U^*,A^\dagger=U\begin{pmatrix}T^*\Delta & -T^*\Delta SN^\dagger\\ (I_{n-t}-N^\dagger N)S^*\Delta & N^\dagger-(I_{n-t}-N^\dagger N)S^*\Delta SN^\dagger\end{pmatrix}U^*,$$

那么

$$(A^DA)^\dagger=U\begin{pmatrix}\Delta_1^{-1} & 0\\ (TX_0)^*\Delta_1^{-1} & 0\end{pmatrix}U^*,$$

故由 $A_{\oplus}=(A^DA)^\dagger A^D$ 即可得证。

众所周知,如果 A 是一个非奇异矩阵,则 $X=A^{-1}$ 是下面秩方程的唯一解,

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix}A & I\\ I & X\end{pmatrix}=\operatorname{rank}(A)。$$

为了得到 $A_{\oplus}$ 的一个类似表示形式,对奇异矩阵 A 给出了下面结论。

定理 4 设 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$,$ind(A)=k$,$\operatorname{rank}(A^k)=r$,则存在唯一的矩阵 X 满足

$$A^kX=0,X^*=X,X^2=X,\operatorname{rank}(X)=n-r \tag{9}$$

存在唯一的矩阵 Y 满足

$$A^kY=0,YA(A^k)^*=0,Y^2=Y,\operatorname{rank}(Y)=n-r \tag{10}$$

存在唯一的矩阵 Z 满足

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix}A & I-Y\\ I-X & Z\end{pmatrix}=\operatorname{rank}(A) \tag{11}$$

此时 $Z=A_{\oplus}$,$X=I-A_{\oplus}A$,$Y=I-AA_{\oplus}$。

证明 为了证明(9)式成立,令

$$(A^k)^*A^k=U_1\begin{pmatrix}J_1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}U_1^*,$$

其中 U_1 是酉矩阵,J_1 是一个 r 阶的非奇异矩阵,容易验证

$$X=U_1\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & I_{n-r}\end{pmatrix}U_1^*$$

满足(9)式。为了证明唯一性,假设 X_0 也满足(9)式,令 $X_1=U_1^*X_0U_1$,假设

$$X_1=\begin{pmatrix}E_1 & F_1\\ G_1 & H_1\end{pmatrix},E_1\in\mathbb{C}^{r\times r},$$

由(9)式可知

$$\begin{pmatrix}J_1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E_1 & F_1\\ G_1 & H_1\end{pmatrix}=0,$$

所以 $E_1=0$,$F_1=0$,从而 $X_1=\begin{pmatrix}0 & 0\\ G_1 & H_1\end{pmatrix}$。由 $X_1^*=X_1$ 且 $\operatorname{rank}(X_1)=n-r$ 可知,$G_1=0$,$H_1=I$。因此

$$X_0=U_1\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & I_{n-r}\end{pmatrix}U_1^*=X,$$

容易验证 $I-A_{\oplus}A=I-(A^DA)^\dagger A^DA$ 满足(9)式,故 $X=I-A_{\oplus}A$。

接着证明(10)式成立。令 $A=U\begin{pmatrix}T & S\\ 0 & N\end{pmatrix}U^*$ 为核-EP 分解矩阵,由引理 5 和(8)式可知

$$A^k=U\begin{pmatrix}T^k & \widetilde{T}\\ 0 & 0\end{pmatrix}U^*,$$

$$A(A^k)^*=U\begin{pmatrix}T(T^k)^*+S(T^k)^* & 0\\ N(\widetilde{T})^* & 0\end{pmatrix}U^*,$$

$$A_{\oplus}=U\begin{pmatrix}\Delta_1^{-1}T^{-1} & \Delta_1^{-1}(T^{k+1})^{-1}\widetilde{T}\\ (TX_0)^*\Delta_1^{-1}T^{-1} & (TX_0)^*\Delta_1^{-1}(T^{k+1})^{-1}\widetilde{T}\end{pmatrix}U^*。$$

容易验证

$$Y=I-AA_{\oplus}=U\begin{pmatrix}I-(T\Delta_1T^{-1}+S(TX_0)^*\Delta_1^{-1}T^{-1}) & -(T\Delta_1^{-1}X_0+S(TX_0)^*\Delta_1^{-1}X_0)\\ -N(TX_0)^*\Delta_1^{-1}T^{-1} & I-N(TX_0)^*\Delta_1^{-1}X_0\end{pmatrix}U^*$$

满足(10)式。其中

$$\begin{aligned}YA(A^k)^*&=(I-AA_{\oplus})A(A^k)^*=A(A^k)^*-A(A^DA)^{\dagger}A^DA(A^k)^*\\&=A(A^k)^*-A(I-P_{N(A^DA)})(A^k)^*=A(A^k)^*-A(I-P_{N(A^k)})(A^k)^*\\&=A(A^k)^*-A(I-P_{R((A^k)^*)^{\perp}})(A^k)^*=A(A^k)^*-A(A^k)^*=0。\end{aligned}$$

下面证明 Y 的唯一性。假设 Y_0 也满足(10)式,设 $Y_1=U^*Y_0U$ 有分块形式

$$Y_1=\begin{pmatrix}E_2 & F_2\\ G_2 & H_2\end{pmatrix},E_2\in\mathbb{C}^{r\times r}。$$

由 $A^kY=0$,可以得到

$$\begin{pmatrix}T^k & \widetilde{T}\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E_2 & F_2\\ G_2 & H_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}W_1 & W_2\\ W_3 & W_4\end{pmatrix}=0,$$

其中 $W_1=T^kE_2+\widetilde{T}G_2=0,W_2=T^kF_2+\widetilde{T}H_2=0$。由 T 的非奇异性得

$$E_2=-T^{-k}\widetilde{T}G_2,F_2=-T^{-k}\widetilde{T}H_2 \tag{12}$$

又因为 $YA(A^k)^*=0$,有

$$\begin{pmatrix}E_2 & F_2\\ G_2 & H_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}T & S\\ 0 & N\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(T^k)^* & 0\\ (\widetilde{T})^* & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}Z_1 & 0\\ Z_2 & 0\end{pmatrix}=0。$$

已知 $\widetilde{T}=T^{k+1}X_0$,其中

$$Z_1=E_2T(T^k)^*+(E_2S+F_2N)(\widetilde{T})^*=(E_2(T+S(TX_0)^*)+F_2N(TX_0)^*)(T^k)^*=0,$$

$$Z_2=G_2T(T^k)^*+(G_2S+H_2N)(\widetilde{T})^*=(G_2(T+S(TX_0)^*)+H_2N(TX_0)^*)(T^k)^*=0,$$

于是,由 T 的非奇异性可得

$$E_2=-F_2N(TX_0)^*(T+S(TX_0)^*)^{-1},G_2=-H_2N(TX_0)^*(T+S(TX_0)^*)^{-1} \tag{13}$$

因为 $\operatorname{rank}(Y)=n-r$,所以可得 $\operatorname{rank}(H_2)=n-r$,$H_2$ 可逆,又由 $Y^2=Y$,可以得到 $G_2F_2+H_2^2=H_2$,代入(12)、(13)式可以得到 $H_2^{-1}=N(TX_0)^*(T+S(TX_0)^*)^{-1}TX_0+I$,很容易验证 $H_2=I-N(TX_0)^*\Delta_1^{-1}X_0$。再代入(12)、(13)式中可求得 $E_2=I-(T\Delta_1T^{-1}+S(TX_0)^*\Delta_1^{-1}T^{-1})$,$F_2=-(T\Delta^{-1}{}_1X_0+S(TX_0)^*\Delta_1^{-1}X_0)$,$G_2=-N(TX_0)^*\Delta_1^{-1}T^{-1}$。所以 $Y=Y_0$,通过上面的计算可知 $Y=I-AA_{\oplus}$ 满足(10)式,此时

$$\begin{pmatrix}A & I-Y\\ I-X & Z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A & AA_{\oplus}\\ A_{\oplus}A & Z\end{pmatrix}。$$

从而由引理 4 和(11)式可得

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} A & I-Y \\ I-X & Z \end{pmatrix}=\operatorname{rank}\begin{pmatrix} A & AA_{\oplus} \\ A_{\oplus}A & Z \end{pmatrix}=\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(Z-A_{\oplus}AA_{\oplus}),$$

由此可知,当 $Z=A_{\oplus}AA_{\oplus}=A_{\oplus}$时,(11)式成立,证毕。

例 设

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

则 $\operatorname{rank}(A)=3$,$\operatorname{rank}(A^2)=\operatorname{rank}(A^3)=2$,即 $ind(A)=2$,计算可得

$$A^D=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},A^DA=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$(A^DA)^{\dagger}=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},A_{\oplus}=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

则分块矩阵 $B=\begin{pmatrix} A & I-Y \\ I-X & Z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & AA_{\oplus} \\ A_{\oplus}A & Z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

满足 $\operatorname{rank}(B)=\operatorname{rank}(A)=3$。

参考文献:

[1] FREDHOLM I. Sur une classe d'équations fonctionnelles[J]. Acta Mathematica,1903,27(1):365-390.

[2] HALL F J,HARTWIG R E. Further results on generalized inverses of partitioned matrices[J]. SIAM Journal on Applied Mathematics,1976,30(4):617-624.

[3] MOORE E H. On the reciprocal of the general algebraic matrix[J]. Bulletin of the American Mathematical Society,1920,26:294-295.

[4] PENROSE R. A generalized inverse for matrices[J]. Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society,1955,51(3):406-413.

[5] DRAZIN M P. Pseudo-inverses in associative rings and semigroups[J]. The American Mathematical Monthly,

1958,65(7):506-514.

[6] BAKSALARY O M,TRENKLER G. Core inverse of matrices[J]. Linear and Multilinear Algebra,2010,58(6):681-697.

[7] MA H F,LI T T. Characterizations and representations of the core inverse and its applications[J]. Linear and Multilinear Algebra,2021,69(1):93-103.

[8] WANG H X,LIU X J. Characterizations of the core inverse and the core partial ordering[J]. Linear and Multilinear Algebra,2015,63(9):1829-1836.

[9] 赵代兄,海国君,阿拉坦仓. 一类算子矩阵的核逆表示[J]. 内蒙古大学学报(自然科学版),2020,51(1):33-39.

[10] MANJUNATHA P K,MOHANA K S. Core-EP inverse[J]. Linear and Multilinear Algebra,2014,62(6):792-802.

[11] WANG H X. Core-EP decomposition and its applications[J]. Linear Algebra and Its Applications,2016,508:289-300.

[12] GAO Y F,CHEN J L. Pseudo core inverses in rings with involution[J]. Communications in Algebra,2018,46(1):38-50.

[13] MOSIĆ D,KYRCHEI I I,STANIMIROVIĆ P S. Representations and properties for the MPCEP inverse[J]. Journal of Applied Mathematics and Computing,2021,67(1):101-130.

[14] MOSIĆ D,STANIMIROVIĆ P S,MA H F. Generalization of core-EP inverse for rectangular matrices[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications,2021,500(1):125101.

[15] HARTWIG R E,SPINDELBÖCK K. Matrices for which A^* and $A^\dagger$ commute[J]. Linear and Multilinear Algebra,1983,14(3):241-256.

[16] DENG C Y,DU H K. Representations of the moore-penrose inverse of 2×2 block operator valued matrices[J]. Journal of the Korean Mathematical Society,2009,46(6):1139-1150.

[17] MATSAGLIA G,PH S G. Equalities and inequalities for ranks of matrices[J]. Linear and Multilinear Algebra,1974,2(3):269-292.

[18] FU Z M,ZUO K Z,YAN H,et al. Generalized inverses-idempotents and projectors[J]. Filomat,2022,36(1):207-219.

[19] MALIK S B,THOME N. On a new generalized inverse for matrices of an arbitrary index[J]. Applied Mathematics and Computation,2014,226:575-580.

[20] 海国君,阿拉坦仓. Hilbert 空间上的广义逆算子与 Fredholm 算子[M]. 北京:高等教育出版社,2018.

(责任编委　李　宏)

Matrix Dual Core-EP Inverse and Other Properties

LI Fan,HAI Guojun

(*School of Mathematical Sciences*,*Inner Mongolia University*,*Hohhot* 010021,*China*)

Abstract:The representation of the dual core-EP inverse of a matrix using the core-EP decomposition and Hartwig-Spindelböck decomposition is introduced. The commutability of the matrix with its dual core-EP inverse is further examined and its idempotence and other properties are explored.

Key words:dual core-EP inverse; core-EP decomposition; Hartwig-Spindelböck decomposition