

文章编号:1000-1638(2025)01-0026-11

DOI:10.13484/j.nmgdxzbk.20250104

具有正弦波纹的环形微通道中电渗流动*

长 龙^{1,2}, 布仁满都拉³, 孙艳军^{1,2}, 刘全生², 管永军^{4,5}

(1. 内蒙古财经大学统计与数学学院, 呼和浩特 010070;

2. 内蒙古大学数学科学学院, 呼和浩特 010021; 3. 内蒙古师范大学数学科学学院, 呼和浩特 010022;

4. 东华大学非线性科学研究所, 上海 201620; 5. 东华大学数学与统计学院, 上海 201620)

摘要:研究了具有正弦波纹的环形微通道中牛顿流体电渗流动。通过摄动展开法求解了线性化的 Poisson-Boltzmann 方程和 Navier-Stokes 方程, 获得了速度和流量(平均速度)的近似解。通过 Matlab 绘图分析了无量纲电动宽度 K 、平均内半径与外半径之比 α 、内壁面与外壁面 zeta 电势之比 ζ 、内外圆柱壁面波纹相位差 β 、波纹振幅与通道的平均外半径的比值 δ 、通道壁面波数 λ 以及无量纲压力梯度 G 对电渗流速度及流量(平均速度)的影响。结果表明:正弦波纹微通道中的平均速度相对于光滑通道的平均速度可能会有变化;速度分布明显受到了 β 的影响; G 对电渗流起促进($G > 0$)或阻碍($G < 0$)作用;电渗流速度随着 α 的增加而减少;对于给定的 ζ , 波纹微通道中的平均速度 \bar{u} 和平均速度的增量 u_{2m} 随 G 和 β 的增加而增加。

关键词:正弦波纹; 微环形通道; 电渗流动; 双电层; 牛顿流体

中图分类号:O29; O175.2; O357.1 **文献标志码:**A

随着微流控技术的发展,电渗流(Electroosmotic flow, EOF)被广泛应用于 DNA 分离、细胞分选和微流控芯片中的离子输运、样品分离和混合等方面^[1]。EOF 在微米或纳米通道中能够引起流体运动,且这一过程无须依赖外部机械力,具有能耗低、操作简单等优点。与常规尺度通道内的流动问题相比,微尺度通道内的流动有其特点,如具有相对较高表面粗糙度影响、显著的微尺度效应、滑移效应、不可忽视的表面力及毛细效应、快速热传导效应等^[2]。国内外学者在理论、数值模拟和实验方面对不同几何形状的光滑微通道内牛顿流体^[3-6]和非牛顿流体^[7-8]的电渗流动进行了大量的研究。

微通道的制造过程或其他物质的沉积可能会在壁面增加其粗糙度,然而,在某些情况下,为了提高混合效率,可以人为设计壁面的粗糙度。因此,微通道壁面的粗糙度可被视为有意设计的特征,而不仅仅是不可避免的缺陷。尽管微流动内部是层流,但由于尺寸小,壁面粗糙度与通道半径之比的相对壁面粗糙度增加,因此由壁面粗糙度引起的很小扰动可能渗透到主流区并影响整个流动。不同的流速模式会影响组分分离、混合反应、流量和热传导过程。壁面粗糙度对流动有复杂的利弊影响,但目前大多数研究仅限于光滑微通道中的流动,很少考虑壁面粗糙度。自 1970 年以来,一些学者对具

* 收稿日期:2024-01-27; 修回日期:2024-04-03

基金项目:国家自然科学基金项目(12162003, 11862018, 12262026); 内蒙古自然科学基金项目(2024LHMS01010, 2024LHMS01008); 内蒙古高等学校创新团队发展计划支持项目(NMGIRT2323); 内蒙古直属高校基本科研业务费项目(NCYWT23035); 内蒙古财经大学 2024 年度高质量成果培育基金项目(GZCG2459, GZCG24268)

作者简介:长 龙(1979-),男(蒙古族),内蒙古兴安盟人,副教授,博士。主要从事微流体力学及应用数学研究。E-mail:suolunga@163.com

通信作者:管永军(1974-),男,内蒙古巴彦淖尔人,教授,博士。主要从事微流体力学及应用数学研究。E-mail:jianyj@dhu.edu.cn

有粗糙壁面的层流问题进行了研究。Wang^[9]首先研究了波纹粗糙度平板间的 Stokes 流动。Chu^[10]用摄动展开法研究了波纹粗糙度对流体流动的影响。长龙等^[11]用摄动展开法研究了具有正弦波纹环形微管道中的脉冲流动。针对具有壁面波纹的微通道 EOF 问题,人们广泛利用边界摄动法(Boundary perturbation method, BPM)进行研究。Shu 等^[12]利用 BPM 求解具有纵向正弦波纹边界的平行微通道 EOF 解析解,并验证了其精确性。Chang 等^[13]利用 BPM 研究具有轴向波纹的圆形微通道 EOF。考虑相对波纹幅值、波数以及压力梯度对电势和速度分布的影响,解释了速度增加或减小的原因。通过平稳随机函数理论的摄动方法, Ma 等^[14]研究了平行板和 Wang 等^[15]研究了圆柱形微通道内小振幅随机横向壁粗糙度对微通道中电磁流体动力流动的影响。Hosham 等^[16]基于复杂波纹微通道中的黏塑性宾汉流体模型,研究了 EOF 中的传热传质效应。通过数值模拟评估了在微通道侧壁引入后向直角梯形凹槽对流体混合及传热性能的增强效果,发现该设计显著提升了热传递效率,并在优化凹槽角度后保持了较低流动阻力,为微通道散热片的设计提供了新思路。Mohammadi 等^[18]利用有限体积法研究了纳米流体作为冷却剂和正弦波壁对矩形微通道散热器性能的影响。

综上所述,大多数文献对壁面粗糙度,尤其是正弦波纹效应的研究主要集中在平行板或圆形微通道中,而在环形微通道内具有波纹的 EOF 还没有引起足够的重视,尤其在理论分析和图形结合方面的研究还正处在发展阶段,有大量的基础性、机理性的系统研究需要进行。基于这一现状,本文采用线性化的 Poisson-Boltzmann 方程和 Navier-Stokes 方程研究正弦波纹的环形微通道中 EOF 的影响。

1 数学模型和近似解

如图 1 所示,在微通道中考虑不可压缩、黏性导电牛顿流体的定常 EOF。

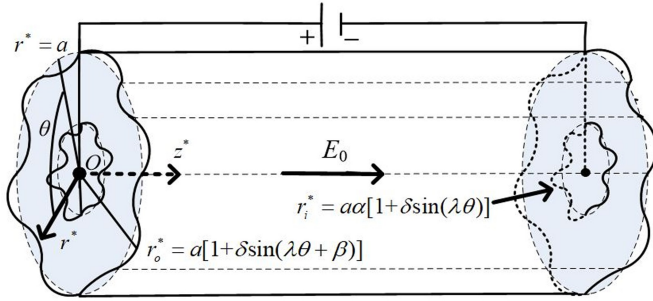


图 1 具有正弦波纹的环形微通道中 EOF 示意图

Fig. 1 Schematic diagram of the EOF in annular microchannel with sinusoidal corrugation

微通道的平均外半径为 a , 平均内半径为 $a\alpha$, α 是内外平均半径之比。选择柱坐标系 (r^*, θ, z^*) 且 z^* 方向为流体的流动方向。内波纹壁面和外波纹壁面分别表示为

$$r_i^* = a\alpha[1 + \delta\sin(\lambda\theta)], r_o^* = a[1 + \delta\sin(\lambda\theta + \beta)] \quad (1)$$

其中, δ 是波纹振幅与通道的平均外半径之比, λ 是波数, β 是相位差。根据双电层(Electric double layer, EDL)理论,电势 $\Psi(r^*, \theta)$ 和单位体积净电荷密度 $\rho_e^*(r^*, \theta)$ 分别满足 Poisson 方程和 Boltzmann 方程。考虑 Debye-Hückel 线性化,可以得到线性化的 Poisson-Boltzmann 方程为

$$\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial \Psi}{\partial r^*} \right) + \frac{1}{r^{*2}} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2} = \kappa^2 \Psi \quad (2)$$

其中, $\kappa = z_v e (2n_0 / \epsilon k_b T)^{1/2}$ 是 Debye-Hückel 参数, $1/\kappa$ 表示 EDL 的厚度, 即 Debye 长度, $z_v, e, n_0, \epsilon, k_b$ 和 T 分别表示化合价、电子所带的电荷量、液体离子的浓度、电解质溶液的介电常数、Boltzmann 常数和绝对温度。在 $r^* = r_j^*$ 处 ($j = o$ 或 i), 方程(2)对应的边界条件为

$$\Psi(r^*, \theta) = \zeta_j \quad (3)$$

假设内壁面和外壁面处的 zeta 电势 ζ_i 和 ζ_o 是常数^[12]。

假定牛顿流体的流动是定常的,且只沿 z^* 方向流动,流动速度为 $(0,0,W)$ 。此时,动量方程可简化为

$$-\frac{\partial P}{\partial z^*} + \mu \left[\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial W}{\partial r^*} \right) + \frac{1}{r^{*2}} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} \right] - \kappa^2 \varepsilon E_0 \Psi = 0 \quad (4)$$

在 $r^* = r_o^*$ 和 $r^* = r_i^*$ 处,对应的通道内外壁面满足无滑移边界条件

$$W(r^*, \theta) = 0 \quad (5)$$

引入一组无量纲化参数

$$r = \frac{r^*}{a}, K = \kappa a, \zeta = \frac{\zeta_i}{\zeta_o}, \varphi(r, \theta) = \frac{\Psi(r^*, \theta)}{\zeta_o}, \omega(r, \theta) = \frac{W(r^*, \theta)}{U_o} \quad (6)$$

$$U_o = -\frac{\varepsilon \zeta_o E_0}{\mu}, G = -\frac{a^2}{\mu U_o} \frac{\partial P}{\partial z^*}$$

式中, K 为无量纲的电动宽度,它表示通道平均半径 a 与 Debye 长度 $(1/\kappa)$ 的比值。 U_o 表示牛顿流体的定常 Helmholtz-Smoluchowski 电渗速度, G 表示施加在通道轴向的无量纲压力梯度。

将公式(6)代入控制方程(2)和(4)以及边界条件(3)和(5),得到无量纲化电势 $\varphi(r, \theta)$ 和速度 $\omega(r, \theta)$ 所满足的方程为

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} = K^2 \varphi \quad (7)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \omega}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \theta^2} = -G - K^2 \varphi \quad (8)$$

对应的边界条件为

$$\begin{cases} \varphi(r, \theta) = 1, \omega(r, \theta) = 0, \text{在 } r = 1 + \delta \sin(\lambda \theta + \beta) \text{ 处} \\ \varphi(r, \theta) = \zeta, \omega(r, \theta) = 0, \text{在 } r = \alpha + \alpha \delta \sin(\lambda \theta) \text{ 处} \end{cases} \quad (9)$$

在没有正弦波纹的情况下,电势 φ 和速度 ω 仅仅是 r 的函数。然而,壁面波纹的存在引起 θ 方向的函数变化。在下面的分析中,假定 $\delta \ll 1$,函数 R 按 δ 的幂次展开为

$$R(r, \theta) = R_0(r) + \delta R_1(r, \theta) + \delta^2 R_2(r, \theta) + \dots \quad (10)$$

式中, $R(r, \theta)$ 表示电势 $\varphi(r, \theta)$ 或流体速度 $\omega(r, \theta)$ 。在壁面 $r=1$ 和 $r=\alpha$ 处函数 R 的泰勒展开式为

$$\left\{ \begin{aligned} R(1 + \delta \sin(\lambda \theta + \beta), \theta) &= R(1, \theta) + \delta \sin(\lambda \theta + \beta) R_r(1, \theta) + \frac{\delta^2 \sin^2(\lambda \theta + \beta)}{2} R_{rr}(1, \theta) + \dots \\ &= R_0(1) + \delta [\sin(\lambda \theta + \beta) R'_0(1) + R_1(1, \theta)] \\ &\quad + \delta^2 \left[\frac{\sin^2(\lambda \theta + \beta)}{2} R''_0(1) + \sin(\lambda \theta + \beta) R_{1r}(1, \theta) + R_2(1, \theta) \right] + \dots \\ R(\alpha + \alpha \delta \sin(\lambda \theta), \theta) &= R(\alpha, \theta) + \alpha \delta \sin(\lambda \theta) R_r(\alpha, \theta) + \frac{\delta^2 \alpha^2 \sin^2(\lambda \theta)}{2} R_{rr}(\alpha, \theta) + \dots \\ &= R_0(\alpha) + \delta [\alpha \sin(\lambda \theta) R'_0(\alpha) + R_1(\alpha, \theta)] + \delta^2 \left[\frac{\alpha^2 \sin^2 \lambda \theta}{2} R''_0(\alpha) \right. \\ &\quad \left. + \alpha \sin(\lambda \theta) R_{1r}(\alpha, \theta) + R_2(\alpha, \theta) \right] + \dots \end{aligned} \right. \quad (11)$$

将方程(10)代入到方程(7)和(8)中,得到关于 δ 的幂次所满足的微分方程组为

$$\delta^0: \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\varphi_0}{dr} \right) = K^2 \varphi_0, \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\omega_0}{dr} \right) = -G - K^2 \varphi_0 \quad (12)$$

$$\delta^1: \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \theta^2} = K^2 \varphi_1, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \omega_1}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial \theta^2} = -K^2 \varphi_1 \quad (13)$$

$$\delta^2: \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial \theta^2} = K^2 \varphi_2, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \omega_2}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \omega_2}{\partial \theta^2} = -K^2 \varphi_2 \quad (14)$$

对应的边界条件(9)使用 $r=1$ 和 $r=\alpha$ 处函数 R 的泰勒展开式(11),同样可以得到一些边界条件

$$\delta^0: \varphi_0(1) = 1, \varphi_0(\alpha) = \zeta, \omega_0(1) = 0, \omega_0(\alpha) = 0 \quad (15)$$

$$\delta^1: \begin{cases} \varphi_1(1, \theta) = -\sin(\lambda\theta + \beta)\varphi'_0(1), \varphi_1(\alpha, \theta) = -\alpha\sin(\lambda\theta)\varphi'_0(\alpha) \\ \omega_1(1, \theta) = -\sin(\lambda\theta + \beta)\omega'_0(1), \omega_1(\alpha, \theta) = -\alpha\sin(\lambda\theta)\omega'_0(\alpha) \end{cases} \quad (16)$$

$$\delta^2: \begin{cases} \varphi_2(1, \theta) = -\frac{\sin^2(\lambda\theta + \beta)}{2}\varphi''_0(1) - \sin(\lambda\theta + \beta)\frac{\partial\varphi_1}{\partial r}\Big|_{r=1} \\ \varphi_2(\alpha, \theta) = -\frac{\alpha^2\sin^2(\lambda\theta)}{2}\varphi''_0(\alpha) - \alpha\sin(\lambda\theta)\frac{\partial\varphi_1}{\partial r}\Big|_{r=\alpha} \\ \omega_2(1, \theta) = -\frac{\sin^2(\lambda\theta + \beta)}{2}\omega''_0(1) - \sin(\lambda\theta + \beta)\frac{\partial\omega_1}{\partial r}\Big|_{r=1} \\ \omega_2(\alpha, \theta) = -\frac{\alpha^2\sin^2(\lambda\theta)}{2}\omega''_0(\alpha) - \alpha\sin(\lambda\theta)\frac{\partial\omega_1}{\partial r}\Big|_{r=\alpha} \end{cases} \quad (17)$$

由方程(12)和(15),计算可得

$$\varphi_0(r) = A_0 I_0(Kr) + B_0 K_0(Kr), \omega_0(r) = -\frac{Gr^2}{4} + C_0 \ln r + D_0 - A_0 I_0(Kr) - B_0 K_0(Kr) \quad (18)$$

待定常数 A_0, B_0, C_0, D_0 , 详见附录 A。

根据边界条件(16),方程(13)解的形式可以表示为

$$\varphi_1(r, \theta) = f_1(r)\sin(\lambda\theta) + g_1(r)\cos(\lambda\theta), \omega_1(r, \theta) = F_1(r)\sin(\lambda\theta) + G_1(r)\cos(\lambda\theta) \quad (19)$$

方程(19)代入方程(13),在边界条件(16)的情况下,计算可得

$$\begin{cases} f_1(r) = A_1 I_\lambda(Kr) + B_1 K_\lambda(Kr) \\ g_1(r) = A_2 I_\lambda(Kr) + B_2 K_\lambda(Kr) \\ F_1(r) = C_1 r^\lambda + D_1 r^{-\lambda} - A_1 I_\lambda(Kr) - B_1 K_\lambda(Kr) \\ G_1(r) = C_2 r^\lambda + D_2 r^{-\lambda} - A_2 I_\lambda(Kr) - B_2 K_\lambda(Kr) \end{cases} \quad (20)$$

待定常数 A_j, B_j, C_j, D_j ($j=1, 2$), 详见附录 A。

根据边界条件(17),方程(14)解的形式可以表示为

$$\begin{cases} \varphi_2(r, \theta) = h(r) + f_2(r)\sin(2\lambda\theta) + g_2(r)\cos(2\lambda\theta) \\ \omega_2(r, \theta) = H(r) + F_2(r)\sin(2\lambda\theta) + G_2(r)\cos(2\lambda\theta) \end{cases} \quad (21)$$

方程(21)代入方程(14),在符合边界条件(17)的情况下,计算可得

$$\begin{cases} h(r) = A_3 I_0(Kr) + B_3 K_0(Kr) \\ f_2(r) = A_4 I_{2\lambda}(Kr) + B_4 K_{2\lambda}(Kr) \\ g_2(r) = A_5 I_{2\lambda}(Kr) + B_5 K_{2\lambda}(Kr) \\ H(r) = C_3 \ln r + D_3 - A_3 I_0(Kr) - B_3 K_0(Kr) \\ F_2(r) = C_4 r^{2\lambda} + D_4 r^{-2\lambda} - A_4 I_{2\lambda}(Kr) - B_4 K_{2\lambda}(Kr) \\ G_2(r) = C_5 r^{2\lambda} + D_5 r^{-2\lambda} - A_5 I_{2\lambda}(Kr) - B_5 K_{2\lambda}(Kr) \end{cases} \quad (22)$$

待定常数 A_j, B_j, C_j, D_j ($j=3, 4, 5$), 详见附录 A。

通过微通道单位宽度的流量,在具有波纹壁面的通道的一个波长长度上进行平均计算,可推导出流量(平均速度)为

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \frac{\lambda}{2\pi(1-\alpha)} \int_0^{\frac{2\pi}{\lambda}} d\theta \int_{\alpha+a\delta\sin(\lambda\theta)}^{1+\delta\sin(\lambda\theta+\beta)} \omega(r, \theta) r dr = \frac{\lambda}{2\pi(1-\alpha)} \int_0^{\frac{2\pi}{\lambda}} \left\{ \int_\alpha^1 \omega(r, \theta) r dr \right. \\ &\quad \left. + \int_1^{1+\delta\sin(\lambda\theta+\beta)} \omega(r, \theta) r dr + \int_{\alpha+a\delta\sin(\lambda\theta)}^\alpha \omega(r, \theta) r dr \right\} d\theta = u_{0m} + \delta^2 u_{2m} + o(\delta^2) \end{aligned} \quad (23)$$

其中

$$\begin{cases}
 u_{0m} = \frac{1}{2(1-\alpha)} \left\{ \frac{G(\alpha^4-1)}{8} + (1-\alpha^2) \left(D_0 - \frac{C_0}{2} \right) - \alpha^2 C_0 \ln \alpha \right. \\
 \quad \left. - \frac{2A_0}{K} [I_1(K) - \alpha I_1(K\alpha)] + \frac{2B_0}{K} [K_1(K) - \alpha K_1(K\alpha)] \right\} \\
 u_{2m} = \frac{1}{2(1-\alpha)} \left\{ (1-\alpha^2) \left(D_3 - \frac{C_3}{2} \right) - \frac{2A_3}{K} [I_1(K) - \alpha I_1(K\alpha)] + \frac{2B_3}{K} [K_1(K) - \alpha K_1(K\alpha)] \right. \\
 \quad \left. - \alpha^2 C_3 \ln \alpha + F_1(1) \cos \beta + G_1(1) \sin \beta + \frac{1}{2} w'_0(1) - \alpha^2 F_1(\alpha) - \frac{\alpha^3}{2} w'_0(\alpha) \right\}
 \end{cases} \quad (24)$$

2 结果与讨论

上一节求解了具有正弦波纹的环形微通道中 EOF, 结果主要受无量纲电动宽度 K 、内外平均半径之比 α 、内外壁面 zeta 电势之比 ζ 、内外圆柱壁面波纹相位差 β 、波纹振幅与通道的平均外半径的比值 δ 、通道壁面波数 λ 以及无量纲压力梯度 G 的影响。在下面的计算中, 典型参数 α 和 δ 分别被限制为 $0 < \alpha < 1, 0 < \delta \leq 0.1$ 。微圆环的特征尺度为 $a = 100 \mu\text{m}$, 流体的动力学黏度 $\mu = 10^{-3} \text{Pa} \cdot \text{s}$ 。

所有的计算结果通过使用 Matlab 程序实现。给定 $G=0, K=10, \lambda=8, \delta=0.05, \zeta=1, \alpha=0.5$, 图 2 显示了在不同的 δ 和 β 下绘制的无量纲等高线速度分布。图 2(a) 表示了光滑通道情况下(即 $\delta=0$)速度的分布, 容易看到会出现经典的塞形速度剖面。图 2(b)–(d) 可以看出速度分布明显受到了内外圆柱壁面波纹相位差 β 的影响。此外, 从图中还可以看出壁面附近 EDL 内速度变化较为迅速, 其原因是 EDL 狭窄的层内电渗力较大所致。

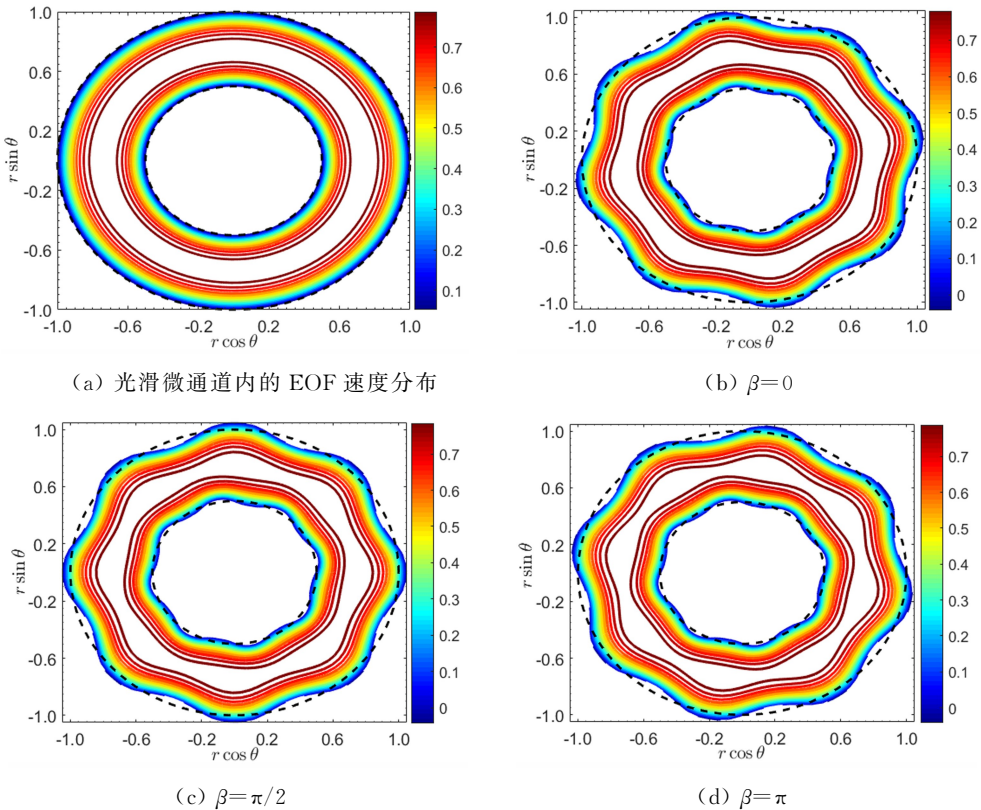


图 2 不同 δ 和 β 对应的 EOF 速度等高线分布图

Fig. 2 EOF velocity contours for different δ and β

给定 $K=10, \lambda=8, \zeta=1, \alpha=0.5, \beta=\pi$, 图 3 显示了不同的 G 和 δ 下绘制的等高线速度分布。比

较图 3(a)与 3(b)和图 3(c)与 3(d),容易看出在微通道中,波纹壁面引起了明显的速度波动。特别是微通道中间层的流体离壁面较远,但是也受到了波纹壁面的扰动而引起波动。此外, $G > 0$ (图 3(a), 3(b))或 $G < 0$ (图 3(c), 3(d))时,压力梯度对电渗流动分别起促进作用或阻碍作用,原因是压力相比于 EOF 变为推力或阻力。

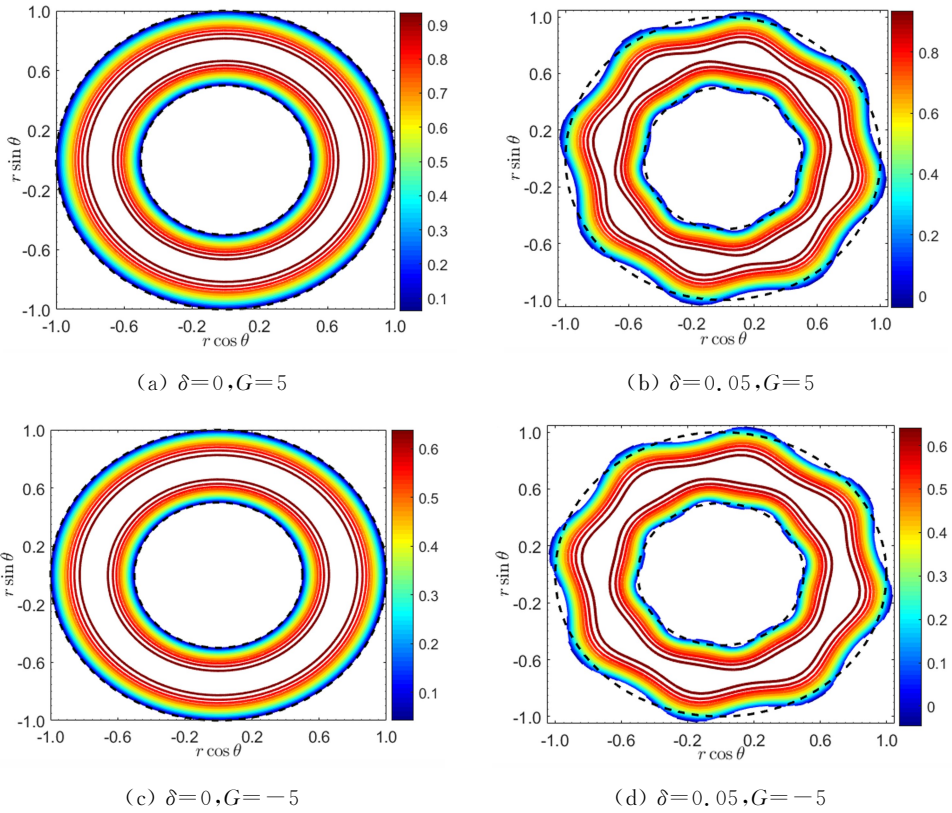
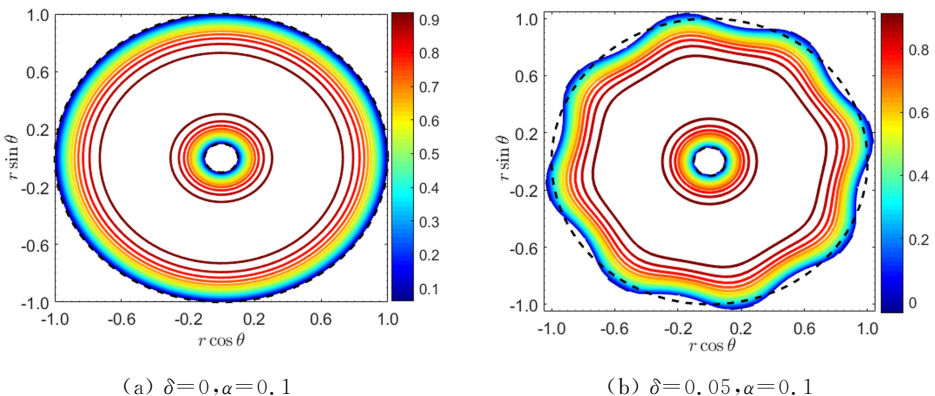


图 3 不同 δ 和 G 对应的 EOF 速度等高线分布图

Fig. 3 EOF velocity contours for different δ and G

给定 $G=0, K=10, \lambda=8, \zeta=1, \beta=0$,图 4 显示了不同的 α 和 δ 下绘制的等高线速度分布。比较图 4(a)–4(d),容易看出在微通道中,EOF 速度随着 α 的增加而减少,其原因是 α 增加意味着两个圆柱体之间的间隙很窄,而波纹壁面增加了流体和固壁之间的接触面,因此有较大的流动阻力。

给定 $G=0, K=10, \lambda=8, \alpha=0.5, \beta=0$,图 5 显示了不同的 ζ 和 δ 下绘制的等高线速度分布。从图 5(a),5(b)可以看出,当两个圆柱壁带相反电荷时(即 $\zeta < 0$),微环形通道中 EOF 的方向与通道壁面带电极性直接相关,该结论与文献[5]中的结论一致。



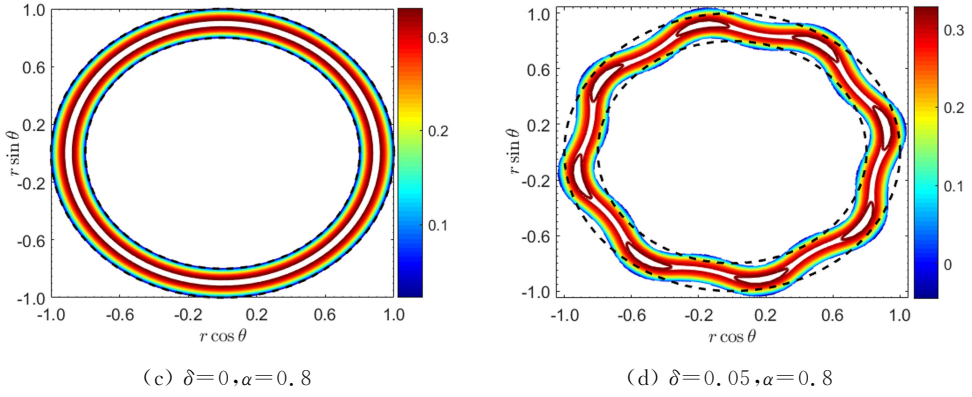
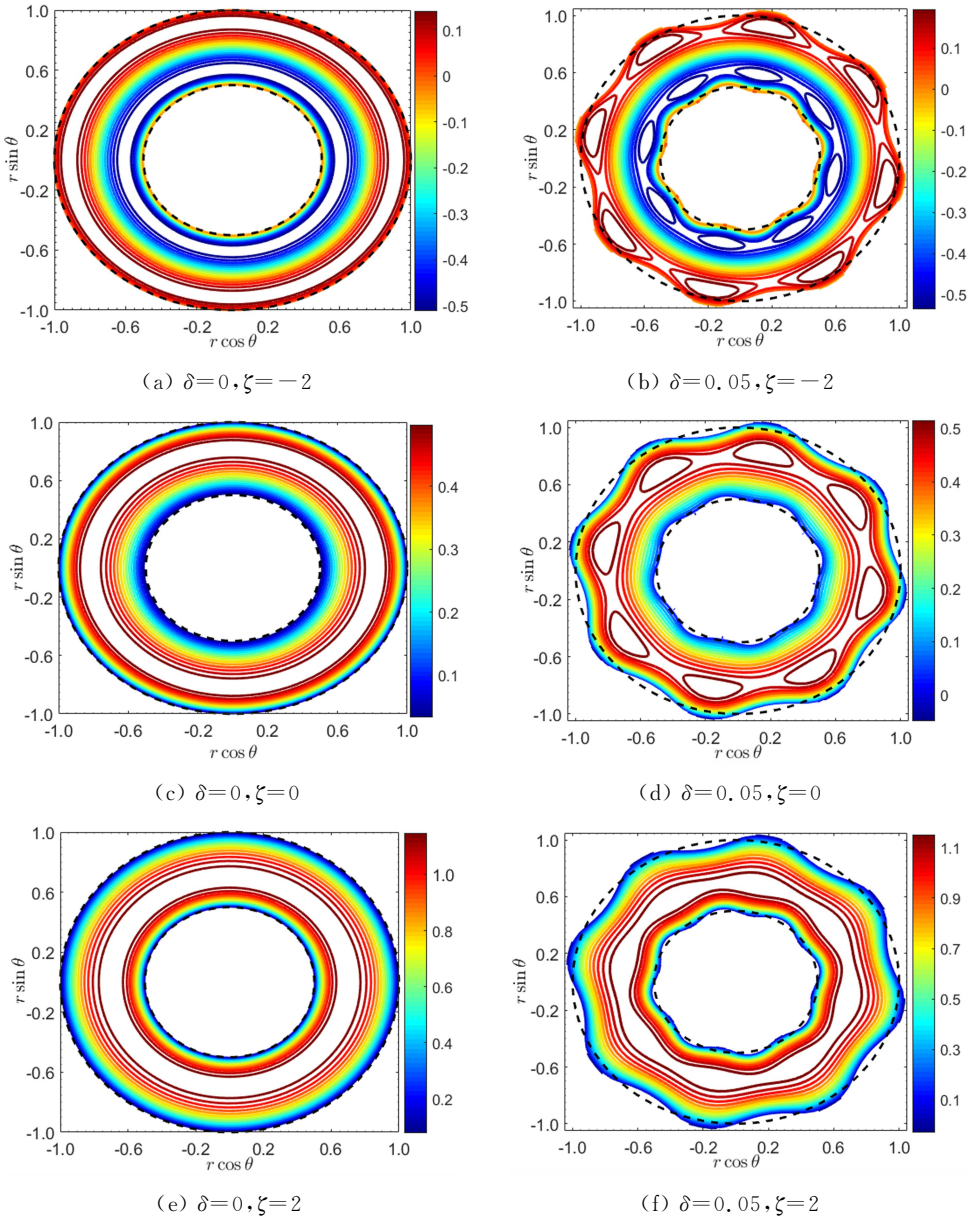
图 4 不同 δ 和 α 对应的 EOF 速度等高线分布图Fig. 4 EOF velocity contours for different δ and α 图 5 不同 δ 和 ζ 对应的 EOF 速度等高线分布图Fig. 5 EOF velocity contours for different δ and ζ

图 5 显示,当内圆柱体的 ζ 电势较高时,速度会在内壁 EDL 区域从零开始迅速增加到最大值,然后,速度随着远离内圆柱壁的距离而减小,在外壁 EDL 区域内逐渐增加,速度在外圆柱壁上达到零,这归因于流体的流动受到外加电场和 EDL 相互作用产生的电渗力驱动。当内圆柱体的 ζ 电势较高时,EDL 内的离子浓度较高,从而导致流体在内壁 EDL 区域的流动更为剧烈。而在外壁 EDL 区域内离子浓度较低,流体的流动也较为缓慢。

从式(23)可以知道, $u_{2m} > 0$ 或 $u_{2m} < 0$ 分别对应于具有正弦波纹微通道中的平均速度相对于光滑通道的平均速度增加或减少。给定 $K=10, \zeta=1, \alpha=0.3, \lambda=2$,图 6 绘制了平均速度的增量 u_{2m} (正弦波纹修正函数)随相关参数的变化情况,如图 6 所示。

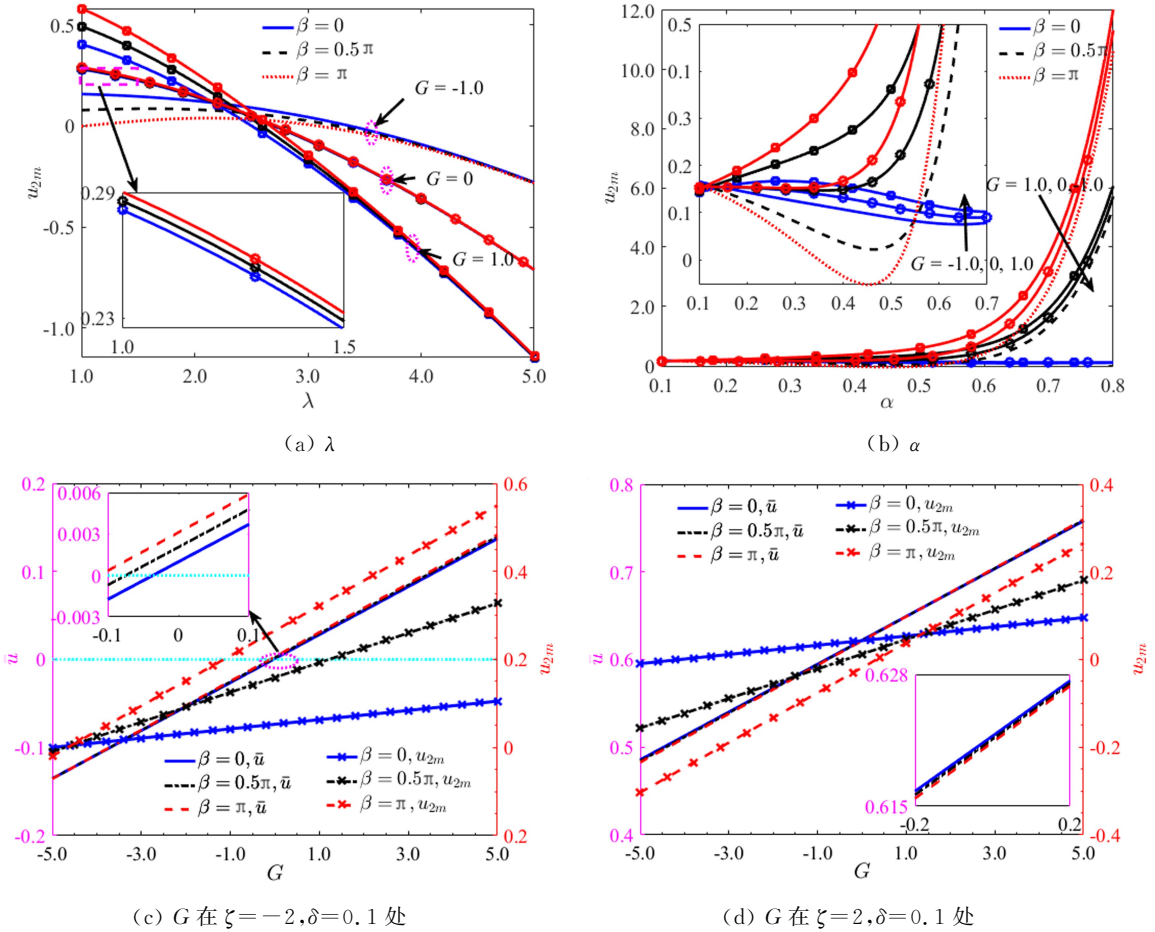


图 6 平均速度的增量 u_{2m} 随相关参数的变化

Fig. 6 Variation of mean velocity increment u_{2m} with related parameters

从图 6(a)很容易看出,对于任意给定的 G 和 β, u_{2m} 随 λ 增加而减少;对于任意给定的 λ (如 $\lambda \geq 2.4$), u_{2m} 随 G 增加而减少。这是因为壁面对流体的阻力随着流体和固体壁面接触面的增加而增加。从图中还可以看出,对于较大的 λ (如 $\lambda \geq 4$), β 对 u_{2m} 无影响,而对于较小的 λ (如 $\lambda < 4$), u_{2m} 随 β 增加而增加($G \geq 0$),对于逆压力梯度结果相反。从图 6(b)中观察到,对于给定的 G, β 对 u_{2m} 影响不明显。尤其是 $\alpha < 0.1$ 时, G 对 u_{2m} 无明显影响,然而 $\alpha \geq 0.1$, 随着 G 的增加和两个圆柱微通道的间隙减少 (α 增加)而 u_{2m} 增加。其原因是相同条件下压力梯度对流动促进作用($G > 0$)或阻碍作用($G < 0$)所致。因此,从图中很容易得出顺压力梯度($G > 0$)和纯 EOF($G = 0$) u_{2m} 比逆压力梯度($G < 0$)明显增大。从图 6(c), 6(d)容易看出,对于给定的内外壁面 zeta 电势比,波纹微通道中的 \bar{u} 和 u_{2m} 随 G 的增加而增加。当逆压力梯度 $G < 0$ 和内外壁面 zeta 电势比 $\zeta = -2$ 时,内圆柱壁面附近流速将为负值,

产生回流(如图 5(a),5(b))。这说明电渗力推动不足以克服逆压力梯度对流动的影响,意味着逆压力梯度对平均速度的作用与电渗力推动所形成的平均速度达到平衡状态。波纹微通道中的 \bar{u} 和 u_{2m} 随 β 的增加而增加(如图 6(c),6(d))。此外,当逆压力梯度 $G < 0$ 和内外壁面 zeta 电势比 $\zeta = 2$ 时,虽然逆压力梯度对流动起阻碍作用,但是电渗力所推动的流动足以克服逆压力梯度对流动的影响。

3 结论

在 Debye-Hückel 近似下,利用摄动展开法研究了具有正弦形波纹环形微通道中电渗流动,并得到如下结论:速度分布明显受到 β 的影响,壁面附近 EDL 内速度变化较快,光滑通道($\delta = 0$)中会出现经典的塞形速度剖面;压力梯度对电渗流动起促进($G > 0$)作用或阻碍($G < 0$)作用;微通道中,波纹壁面引起了明显的速度波动,尤其是较大的 α 其波动变化较明显;EOF 速度随着 α 的增加而减少;当两个圆柱壁带相反电荷时(即 $\zeta < 0$),微环形通道中 EOF 的方向与通道壁面带电极性直接相关;当内圆柱体的 ζ 电势较高时,速度会在内壁 EDL 区域从零开始迅速增加到最大值,然后,速度随着远离内圆柱壁的距离而减小,在外壁 EDL 区域内逐渐增加;对于给定的 G 和 β , u_{2m} 随 λ 增加而减少;对于给定的 λ (如 $\lambda \geq 2.4$), u_{2m} 随 G 增加而减少;对于较大的 λ (如 $\lambda \geq 4$), β 对 u_{2m} 无影响,而较小的 λ (如 $\lambda < 4$), u_{2m} 随 β 增加而增加($G \geq 0$),对于逆压力梯度结果相反;当 $\alpha < 0.4$ 时, u_{2m} 随 G 和 β 也无明显变化,然而 $\alpha \geq 0.4$, u_{2m} 随着 G 和 α 的增加而增加;对于给定的 ζ ,波纹微通道中的 \bar{u} 和 u_{2m} 随 G 和 β 的增加而增加。

附录 A

$$A_0 = \frac{K_0(\alpha K) - \zeta K_0(K)}{I_0(K)K_0(\alpha K) - I_0(\alpha K)K_0(K)}, B_0 = \frac{I_0(\alpha K) - \zeta I_0(K)}{I_0(\alpha K)K_0(K) - I_0(K)K_0(\alpha K)},$$

$$C_0 = \left\{ \frac{G}{4}(\alpha^2 - 1) - A_0[I_0(K) - I_0(\alpha K)] - B_0[K_0(K) - K_0(K\alpha)] \right\} / \ln \alpha,$$

$$D_0 = \frac{G}{4} + A_0 I_0(K) + B_0 K_0(K),$$

$$A_1 = \frac{f_1(\alpha)K_\lambda(K) - f_1(1)K_\lambda(K\alpha)}{I_\lambda(K\alpha)K_\lambda(K) - I_\lambda(K)K_\lambda(K\alpha)}, B_1 = \frac{f_1(\alpha)I_\lambda(K) - f_1(1)I_\lambda(K\alpha)}{I_\lambda(K)K_\lambda(K\alpha) - I_\lambda(K\alpha)K_\lambda(K)},$$

$$A_2 = \frac{g_1(1)K_\lambda(K\alpha)}{I_\lambda(K)K_\lambda(K\alpha) - I_\lambda(K\alpha)K_\lambda(K)}, B_2 = \frac{g_1(1)I_\lambda(K\alpha)}{I_\lambda(K\alpha)K_\lambda(K) - I_\lambda(K)K_\lambda(K\alpha)},$$

$$C_1 = [-F_1(1) + \alpha^\lambda F_1(\alpha) - A_1 I_\lambda(K) + A_1 \alpha^\lambda I_\lambda(K\alpha) - B_1 K_\lambda(K) + B_1 \alpha^\lambda K_\lambda(K\alpha)] / (\alpha^{2\lambda} - 1),$$

$$D_1 = [\alpha^\lambda (\alpha^\lambda F_1(1) - F_1(\alpha) + A_1 \alpha^\lambda I_\lambda(K) - A_1 I_\lambda(K\alpha) + B_1 \alpha^\lambda K_\lambda(K) - B_1 K_\lambda(K\alpha))] / (\alpha^{2\lambda} - 1),$$

$$C_2 = [G_1(1) + A_2 I_\lambda(K) - A_2 \alpha^\lambda I_\lambda(K\alpha) + B_2 K_\lambda(K) - B_2 \alpha^\lambda K_\lambda(K\alpha)] / (1 - \alpha^{2\lambda}),$$

$$D_2 = [\alpha^\lambda (-\alpha^\lambda G_1(1) - A_2 \alpha^\lambda I_\lambda(K) + A_2 I_\lambda(K\alpha) - B_2 \alpha^\lambda K_\lambda(K) + B_2 K_\lambda(K\alpha))] / (1 - \alpha^{2\lambda}),$$

$$A_3 = \frac{h(\alpha)K_0(K) - h(1)K_0(K\alpha)}{I_0(K\alpha)K_0(K) - I_0(K)K_0(K\alpha)}, B_3 = \frac{h(1)I_0(K\alpha) - h(\alpha)I_0(K)}{I_0(K\alpha)K_0(K) - I_0(K)K_0(K\alpha)},$$

$$A_4 = \frac{f_2(\alpha)K_{2\lambda}(K) - f_2(1)K_{2\lambda}(K\alpha)}{I_{2\lambda}(K\alpha)K_{2\lambda}(K) - I_{2\lambda}(K)K_{2\lambda}(K\alpha)}, B_4 = \frac{f_2(1)I_{2\lambda}(K\alpha) - f_2(\alpha)I_{2\lambda}(K)}{I_{2\lambda}(K\alpha)K_{2\lambda}(K) - I_{2\lambda}(K)K_{2\lambda}(K\alpha)},$$

$$A_5 = \frac{g_2(\alpha)K_{2\lambda}(K) - g_2(1)K_{2\lambda}(K\alpha)}{I_{2\lambda}(K\alpha)K_{2\lambda}(K) - I_{2\lambda}(K)K_{2\lambda}(K\alpha)}, B_5 = \frac{g_2(1)I_{2\lambda}(K\alpha) - g_2(\alpha)I_{2\lambda}(K)}{I_{2\lambda}(K\alpha)K_{2\lambda}(K) - I_{2\lambda}(K)K_{2\lambda}(K\alpha)},$$

$$C_3 = [H(\alpha) - H(1) - A_3 I_0(K) + A_3 I_0(K\alpha) + B_3 K_0(K\alpha) - B_3 K_0(K)] / \ln \alpha,$$

$$D_3 = H(1) + A_3 I_0(K) + B_3 K_0(K),$$

$$C_4 = [\alpha^{2\lambda} F_2(\alpha) - F_2(1) - A_4 I_{2\lambda}(K) + A_4 \alpha^{2\lambda} I_{2\lambda}(K\alpha) - B_4 K_{2\lambda}(K) + B_4 \alpha^{2\lambda} K_{2\lambda}(K\alpha)] / (\alpha^{4\lambda} - 1),$$

$$D_4 = [\alpha^{2\lambda} (\alpha^{2\lambda} F_2(1) - F_2(\alpha) + A_4 \alpha^{2\lambda} I_{2\lambda}(K) - A_4 I_{2\lambda}(K\alpha) + B_4 \alpha^{2\lambda} K_{2\lambda}(K) - B_4 K_{2\lambda}(K\alpha))] / (\alpha^{4\lambda} - 1),$$

$$C_5 = [\alpha^{2\lambda} G_2(\alpha) - G_2(1) - A_5 I_{2\lambda}(K) + A_5 \alpha^{2\lambda} I_{2\lambda}(K\alpha) - B_5 K_{2\lambda}(K) + B_5 \alpha^{2\lambda} K_{2\lambda}(K\alpha)] / (\alpha^{4\lambda} - 1),$$

$$D_5 = [\alpha^{2\lambda} (\alpha^{2\lambda} G_2(1) - G_2(\alpha) + A_5 \alpha^{2\lambda} I_{2\lambda}(K) - A_5 I_{2\lambda}(K\alpha) + B_5 \alpha^{2\lambda} K_{2\lambda}(K) - B_5 K_{2\lambda}(K\alpha))] / (\alpha^{4\lambda} - 1),$$

其中 $f_1(1) = -\cos\beta\varphi'_0(1)$, $f_1(\alpha) = -\alpha\varphi'_0(\alpha)$, $g_1(1) = -\sin\beta\varphi'_0(1)$, $F_1(1) = -\cos\beta w'_0(1)$,

$$F_1(\alpha) = -\alpha w'_0(\alpha), G_1(1) = -\sin\beta w'_0(1),$$

$$h(1) = -\frac{1}{4}\varphi''_0(1) - \frac{1}{2}\cos\beta f'_1(1) - \frac{1}{2}\sin\beta g'_1(1), h(\alpha) = -\frac{\alpha^2}{4}\varphi''_0(\alpha) - \frac{\alpha}{2}f'_1(\alpha),$$

$$f_2(1) = -\frac{1}{4}\sin 2\beta\varphi''_0(1) - \frac{1}{2}\sin\beta f'_1(1) - \frac{1}{2}\cos\beta g'_1(1), f_2(\alpha) = -\frac{\alpha}{2}g'_1(\alpha),$$

$$g_2(1) = \frac{1}{4}\cos 2\beta\varphi''_0(1) - \frac{1}{2}\sin\beta g'_1(1) + \frac{1}{2}\cos\beta f'_1(1), g_2(\alpha) = \frac{\alpha^2}{4}\varphi''_0(\alpha) + \frac{\alpha}{2}f'_1(\alpha),$$

$$H(1) = -\frac{1}{4}w''_0(1) - \frac{1}{2}\cos\beta F'_1(1) - \frac{1}{2}\sin\beta G'_1(1), H(\alpha) = -\frac{\alpha^2}{4}w''_0(\alpha) - \frac{\alpha}{2}F'_1(\alpha),$$

$$F_2(1) = -\frac{1}{4}\sin 2\beta w''_0(1) - \frac{1}{2}\sin\beta F'_1(1) - \frac{1}{2}\cos\beta G'_1(1),$$

$$F_2(\alpha) = -\frac{\alpha}{2}G'_1(\alpha), G_2(1) = \frac{1}{4}\cos 2\beta w''_0(1) - \frac{1}{2}\sin\beta G'_1(1) + \frac{1}{2}\cos\beta F'_1(1),$$

$$G_2(\alpha) = \frac{\alpha^2}{4}w''_0(\alpha) + \frac{\alpha}{2}F'_1(\alpha).$$

参考文献:

- [1] STONE H A, STROOCK A D, AJDARI A. Engineering flows in small devices: Microfluidics toward a lab-on-a-chip[J]. Annual Review of Fluid Mechanics, 2004, 36: 381-411.
- [2] BAYRAKTAR T, PIDUGU S B. Characterization of liquid flows in microfluidic systems[J]. International Journal of Heat and Mass Transfer, 2006, 49(5/6): 815-824.
- [3] JIAN Y J, YANG L G, LIU Q S. Time periodic electroosmotic flow through a microannulus[J]. Physics of Fluids, 2010, 22(4): 042001.
- [4] CHANG L, SUN Y J, BUREN M, et al. Thermal and flow analysis of fully developed electroosmotic flow in parallel-plate micro-and nanochannels with surface charge-dependent slip[J]. Micromachines, 2022, 13(12): 2166.
- [5] KANG Y J, YANG C, HUANG X Y. Electroosmotic flow in a capillary annulus with high zeta potentials[J]. Journal of Colloid and Interface Science, 2002, 253(2): 285-294.
- [6] 刘雅鹏, 菅永军, 布仁满都拉. 粗糙微管道壁面振荡的磁流体流动[J]. 内蒙古大学学报(自然科学版), 2015, 46(4): 363-369.
- [7] 郑佳璇, 梁韵笛, 菅永军. 高 zeta 势下 Phan-Thien-Tanner (PTT) 流体的电渗微推进器[J]. 应用数学和力学, 2023, 44(10): 1213-1225.
- [8] 段娟, 陈耀钦, 朱庆勇. 微扩张管道内幂律流体非定常电渗流动[J]. 物理学报, 2016, 65(3): 162-174.
- [9] WANG C Y. On stokes flow between corrugated plates[J]. Journal of Applied Mechanics, 1979, 46(2): 462-464.
- [10] CHU Z K H. Slip flow in an annulus with corrugated walls[J]. Journal of Physics D: Applied Physics, 2000, 33(6): 627.
- [11] 长龙, 刘全生, 菅永军, 等. 具有正弦粗糙度的环形微管道中脉冲流动[J]. 应用数学和力学, 2016, 37(10): 1118-1128.
- [12] SHU Y C, CHANG C C, CHEN Y S, et al. Electroosmotic flow in a wavy microchannel: Coherence between the

- electric potential and the wall shape function[J]. *Physics of Fluids*, 2010, 22(8):082001.
- [13] CHANG L, JIAN Y J, BUREN M, et al. Electroosmotic flow through a microtube with sinusoidal roughness[J]. *Journal of Molecular Liquids*, 2016, 220:258-264.
- [14] MA N, SUN Y J, JIAN Y J. Electromagnetohydrodynamic (EMHD) flow in a microchannel with random surface roughness[J]. *Micromachines*, 2023, 14(8):1617.
- [15] WANG Z L, SUN Y J, JIAN Y J. The effect of random roughness on the electromagnetic flow in a micropipe [J]. *Micromachines*, 2023, 14(11):2054.
- [16] HOSHAM H A, THABET E N, ABD-ALLA A M, et al. Dynamic patterns of electroosmosis peristaltic flow of a Bingham fluid model in a complex wavy microchannel[J]. *Scientific Reports*, 2023, 13(1):8686.
- [17] ZHU Q F, SU R R, HU L Y, et al. Heat transfer enhancement for microchannel heat sink by strengthening fluids mixing with backward right-angled trapezoidal grooves in channel sidewalls[J]. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 2022, 135:106106.
- [18] MOHAMMADI R, SHAHKARAMI N. Performance improvement of rectangular microchannel heat sinks using nanofluids and wavy channels[J]. *Numerical Heat Transfer, Part A: Applications*, 2022, 82(10):619-639.

(责任编辑 李 宏)

Electroosmotic Flow in Microannulus with Sinusoidal Corrugation

CHANG Long^{1,2}, BUREN Mandula³, SUN Yanjun^{1,2}, LIU Quansheng², JIAN Yongjun^{4,5}

(1. *School of Statistics and Mathematics, Inner Mongolia University of Finance and Economics, Hohhot 010070, China;*

2. *College of Mathematics Sciences, Inner Mongolia University, Hohhot 010021, China;*

3. *College of Mathematics Science, Inner Mongolia Normal University, Hohhot 010022, China;*

4. *Institute for Nonlinear Science, Donghua University, Shanghai 201620, China;*

5. *School of Mathematics and Statistics, Donghua University, Shanghai 201620, China)*

Abstract: The electroosmotic flow (EOF) of Newtonian fluids in microannulus with sinusoidal corrugation has been studied. The Poisson-Boltzmann and Navier-Stokes equations were solved by the perturbation expansion method, the approximate analytical velocity and volume flow rate (average velocity) were yielded. The effect of the dimensionless electric width K , the ratio of the average inner to outer radius α , the wall zeta potentials ratio of the inner to the outer cylinder ζ , the phase difference between two wall corrugation β , the ratio of the corrugation amplitude to the average outer radius of the channel δ , the wave number of the wall corrugations λ , and dimensionless pressure gradient G , on the velocity and flow rate (average velocity) of EOF were analyzed using Matlab. The results show that the average velocity in the sinusoidal corrugated microchannel may vary relative to that in the smooth channel; the velocity distribution is clearly influenced by β ; G promotes ($G > 0$) or hinders ($G < 0$) EOF; the velocity of EOF decreases with increasing α ; for a given ζ , the average velocity \bar{u} in the corrugated microchannel and the increment u_{2m} of the average velocity increase with the increasing G and β .

Key words: sinusoidal corrugation; microannulus; electroosmotic flow; electric double layer; Newtonian fluid