文章编号:1000－1638(2025)02-0113-12 DOI:10.13484/j.nmgdxxbzk.20250201

线性关系矩阵的点谱、剩余谱和连续谱*

吕映雪,黄俊杰

(内蒙古大学数学科学学院,呼和浩特 010021)

摘要:首先研究了两个线性关系矩阵的乘积等于它们形式乘积的条件,在此基础上得到了线性关系矩阵 $L_0-\mu I=\begin{pmatrix}A-\mu I & B\\ C & D-\mu I\end{pmatrix}$ 的 Frobenius-Schur 分解;其次利用 Frobenius-Schur 分解,讨论了 $L_0-\mu I$ 和它的 Schur 补在单射情况、值域的稠密性以及逆关系有界性之间的联系;最后刻画了 L_0 的点谱、剩余谱和连续谱。

关键词:线性关系矩阵;Frobenius-Schur 分解;点谱;剩余谱;连续谱

中图分类号:O177.7 **文献标志码:**A

线性关系可以看作是单值算子在多值情况下的推广。20 世纪中叶,Von Neumann 在研究非稠定微分算子的共轭时首次引入了线性关系的概念[1]。目前线性关系已经在经济学、医学、博弈论、人工智能领域[2]以及退化演变方程[3]和微分包含[4]等方面得到了广泛应用。线性关系矩阵就是以线性关系为元素的矩阵,又简称为关系矩阵。近些年人们开始关注关系矩阵的谱理论。

2022 年,Du 等[5]利用空间分解的方法研究了 Hilbert 空间中上三角关系矩阵 $L_C=\begin{pmatrix}A & C\\ 0 & D\end{pmatrix}$ 值域的闭性,给出了在不同条件下当 C 是有界算子时 L_C 值域闭和不闭的充要条件,在此基础上对关系矩阵 L_C 的闭值域谱进行了刻画。Álvarez 等[6] 利用 Frobenius-Schur 分解研究了关系矩阵 $L_0=\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}$ 的本质谱,将矩阵的本质谱与 Schur 补的本质谱联系起来。2017 年,Ammar 等[7]利用 Frobenius-Schur 分解在一定条件下得到了关系矩阵 L_0 的 Weyl 谱与 Schur 补 Weyl 谱之间的关系。2022 年,Ammar 等[8]研究了关系矩阵 L_0 在 Banach 空间中的 Frobenius-Schur 分解,并利用该分解得到了本质谱。可以发现,在研究关系矩阵的谱时 Frobenius-Schur 分解是一个强有力的工具,其实不只如此,在对算子矩阵的谱进行研究时,也经常会用到 Frobenius-Schur 分解以及 Schur 补[9-11]。

尽管关系矩阵 Frobenius-Schur 分解和谱理论的研究已经有了大量的成果,但是未见 2×2 关系矩阵的点谱、剩余谱和连续谱方面的描述,因此本文主要研究关系矩阵的 Frobenius-Schur 分解并进而讨论 2×2 关系矩阵的点谱、剩余谱和连续谱。

* **收稿日期:**2024-07-07;**修回日期:**2024-08-11

基金项目:国家自然科学基金项目(11961052);内蒙古高等学校创新团队发展计划项目(NMGIRT2317);内蒙古自然科学基金项目(2021MS01006)

作者简介:吕映雪(1999－),女,内蒙古赤峰人,2021 级硕士研究生。E-mail:3110695130@qq.com

通信作者:黄俊杰(1977－),男,内蒙古兴安盟人,教授,博士。主要从事数学物理与应用算子理论研究。E-mail:huangjunjie@imu.edu.cn

1 预备知识

若无特殊说明,本文中 X,Y,Z 是无穷维可分 Hilbert 空间,$\mathbb{C}$ 表示复数域。关系 $T:X\to Y$ 是一个映射,它将 $D(T)\subset X$(其中 $D(T)$ 是非空子集)中的元素映到 Y 中的某个非空子集中。若对于任意的 $x_1,x_2\in D(T)$ 和不全为零的数 $\alpha,\beta\subset\mathbb{C}$ 都有等式 $T(\alpha x_1+\beta x_2)=\alpha T(x_1)+\beta T(x_2)$ 成立,则称 T 为线性关系。记 $D(T)$ 和 $R(T)$ 分别表示 T 的定义域和值域,此时 $D(T)$ 和 $R(T)$ 都是线性子空间。记 $LR(X,Y)$ 为从 X 到 Y 的全体线性关系所构成的集合,$LR(X,X)$ 简记为 $LR(X)$。若线性关系 T 将定义域里的每一个点都映成一个单点集,则 T 就是线性算子。显然 T 是线性算子的充要条件为 $T(0)=\{0\}$。设 $T\in LR(X,Y)$,Q_T 表示从 Y 到 $Y/\overline{T(0)}$ 的商映射,则 Q_TT 是单值的。对于任意的 $x\in X$,定义 $\|Tx\|=\|Q_TTx\|$,并定义 T 的范数为 $\|T\|=\|Q_TT\|$。设 $T\in LR(X,Y)$,若 $\|T\|<\infty$,则称线性关系 T 是有界的,$BR(X,Y)$ 表示从 X 到 Y 的全体有界线性关系所构成的集合。设 $T\in LR(X,Y)$,若对于任意的邻域 $V\subset R(T)$,都有 $T^{-1}(V)$ 是 $D(T)$ 的邻域,则称线性关系 T 是连续的。线性关系 T 是连续的当且仅当 T 是有界的。设 $T\in LR(X,Y)$,若对于任意的邻域 $U\subset D(T)$,都有 $T(U)$ 是 $R(T)$ 的邻域,则称线性关系 T 是开的。线性关系 T 是开的当且仅当 T^{-1} 是连续的。

设 $T\in LR(X,Y)$,T 的图 $G(T)\subset X\times Y$ 定义为 $G(T)=\{(x,y)\in X\times Y:x\in D(T),y\in Tx\}$。$T^{-1},T^*,\overline{T}$ 分别表示 T 的逆关系、共轭关系和闭包,它们的图分别为 $G(T^{-1})=\{(y,x)\in Y\times X:(x,y)\in G(T)\}$,$G(T^*)=\{(y^*,x^*)\in Y\times X$:对任意的 $(x,y)\in G(T)$,$<x,x^*>=<y,y^*>\}$,$G(\overline{T})=\overline{G(T)}$。设 $T\in LR(X,Y)$,若它的图 $G(T)\subset X\times Y$ 是闭的(或者 $T=\overline{T}$),则称线性关系 T 是闭的,$CR(X,Y)$ 表示从 X 到 Y 的全体闭线性关系所构成的集合。

注 1[12] (ⅰ)对于线性关系 $T\in LR(X,Y)$,有等式成立:$D(T)=R(T^{-1})$,$D(T^{-1})=R(T)$,$N(T)=T^{-1}(0)$,$N(T^{-1})=T(0)$,$N(T^*)=R(T)^{\perp}$,$N(\overline{T})=R(T^*)^{\perp}$,$T^*(0)=D(T)^{\perp}$,$\overline{T}(0)=D(T^*)^{\perp}$。其中 $N(T)=\{x\in X:0\in Tx\}$ 是线性关系 T 的零空间,$T(0)=\{y\in Y:(0,y)\in G(T)\}$ 是线性关系 T 的多值部分;

(ⅱ) T 是单射当且仅当 $N(T)=\{0\}$;

(ⅲ) 设 $T\in LR(X,Y)$,则 T 是满射当且仅当 $R(T)=Y$;

(ⅳ) $TT^{-1}y=y+T(0)(y\in R(T))$,$T^{-1}Tx=x+T^{-1}(0)(x\in D(T))$。

定义 1[12] 设 $T\in LR(X,Y)$,则 T 预解集定义为

$$\rho(T)=\{\lambda\in\mathbb{C}:T-\lambda I\text{ 是单射,开的且值域是稠的}\}。$$

当 T 是闭的线性关系时,预解集可写为

$$\rho(T)=\{\lambda\in\mathbb{C}:(T-\lambda I)^{-1}\text{ 是定义在全空间上的有界线性算子}\},$$

结合闭图像定理 T 的预解集可写为

$$\rho(T)=\{\lambda\in\mathbb{C}:T-\lambda I\text{ 是单射也是满射}\}。$$

定义 $\sigma(T)=\mathbb{C}\backslash\rho(T)$ 为 T 的谱,$\sigma_p(T)$,$\sigma_r(T)$,$\sigma_c(T)$ 分别表示 T 的点谱、剩余谱和连续谱,并且定义为

$$\sigma_p(T)=\{\lambda\in\mathbb{C}:T-\lambda I\text{ 不是单射}\},$$

$$\sigma_r(T)=\{\lambda\in\mathbb{C}:T-\lambda I\text{ 是单射},\overline{R(T-\lambda I)}\neq Y\},$$

$$\sigma_c(T)=\{\lambda\in\mathbb{C}:T-\lambda I\text{ 是单射},\overline{R(T-\lambda I)}=Y,(T-\lambda I)^{-1}\text{ 无界}\}。$$

引理 2[12] 设 $S,T\in LR(X,Y)$,若 $D(T)=D(S)$,$T(0)=S(0)$,则 $T=S$ 或 T 和 S 互不包含。

引理 3[12] 设 $T_1\in LR(Y,Z)$,$T_2,T_3\in LR(X,Y)$,当 $D(T_1)$ 包含 T_2 和 T_3 的值域(特别地,

$D(T_1)=Y$)时，有 $T_1(T_2+T_3)=T_1T_2+T_1T_3$。

引理 4[12]　设 $T\in LR(X,Y)$，集合 $M\subset X$，$N\subset D(T)$，则 $T(M+N)=T(M)+T(N)$。

引理 5[7]　设 $A_1,A_2\in LR(X)$，$B_1,B_2\in LR(Y,X)$，$C_1,C_2\in LR(X,Y)$，$D_1,D_2\in LR(Y)$，则

$$\begin{pmatrix}A_1 & B_1\\ C_1 & D_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_2 & B_2\\ C_2 & D_2\end{pmatrix}\subset\begin{pmatrix}A_1A_2+B_1C_2 & A_1B_2+B_1D_2\\ C_1A_2+D_1C_2 & C_1B_2+D_1D_2\end{pmatrix}。$$

引理 6　设 $T\in LR(X,Y)$，$S\in LR(Y,Z)$，$H\in LR(X,Z)$，若 $ST=H$ 且 $D(S)\subset R(T)$，则 $R(H)=R(S)$。

证明　首先证明 $R(S)\subset R(H)$，取任意的 $z\in R(S)$，则存在 $y\in D(S)$ 使得 $z\in Sy$。因为 $y\in D(S)\subset R(T)$，所以存在 $x\in D(T)$ 使得 $y\in Tx$，因此 $z\in Sy\subset STx$，由 $ST=H$ 可知 $z\in R(H)$，故 $R(S)\subset R(H)$。

接下来证明 $R(H)\subset R(S)$，取任意的 $z\in R(H)$，则存在 $x\in D(H)$ 使得 $z\in STx$。因为 $D(H)=D(ST)=\{x\in X: STx\neq\varnothing\}=\{x\in X: D(S)\cap Tx\neq\varnothing\}$，所以存在 $y\in Tx$ 且 $y\in D(S)$ 满足 $z\in Sy$，进而有 $z\in STx$，由此可得 $R(H)\subset R(S)$。

引理 7[13]　设 $A\in LR(X)$，$B\in LR(Y,X)$，$C\in LR(X,Y)$，$D\in LR(Y)$，若 $R(A)\subset R(D)$，$R(C)\subset R(D)$，$N(A)\subset N(B)$ 且 $N(A)\subset N(C)$，则关系矩阵 $M_1=\begin{pmatrix}A & B\\ 0 & D\end{pmatrix}$ 和 $M_2=\begin{pmatrix}A & 0\\ C & D\end{pmatrix}$ 的逆分别为 $M_1^{-1}=\begin{pmatrix}A^{-1} & -A^{-1}BD^{-1}\\ 0 & D^{-1}\end{pmatrix}$，$M_2^{-1}=\begin{pmatrix}A^{-1} & 0\\ -D^{-1}CA^{-1} & D^{-1}\end{pmatrix}$。

引理 8[12]　设 $S,T\in LR(X,Y)$，若 $D(T)\subset D(S)$ 且 S 连续，则 $(S+T)^*=S^*+T^*$。

引理 9[12]　设闭子空间 $X_1,X_2\subset X$，则 $(X_1^{\perp}\cap X_2^{\perp})^{\perp}=\overline{X_1+X_2}$。

2　主要结果

定理 1　设 $A_2\in LR(X)$，$B_2\in LR(Y,X)$，$C_1,C_2\in LR(X,Y)$，$D_2\in LR(Y)$，若 $R(A_2)\cup R(B_2)\subset D(C_1)$，$A_2(0)+B_2(0)\subset N(C_1)$，则

$$\begin{pmatrix}I & 0\\ C_1 & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_2 & B_2\\ C_2 & D_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_2 & B_2\\ C_1A_2+C_2 & C_1B_2+D_2\end{pmatrix}。$$

证明　注意到 $R(A_2)\cup R(B_2)\subset D(C_1)$，结合引理 3 有

$$C_1(A_2(0)+B_2(0))=C_1A_2(0)+C_1B_2(0)\tag{1}$$

设 $M_1=\begin{pmatrix}I & 0\\ C_1 & I\end{pmatrix}$，$M_2=\begin{pmatrix}A_2 & B_2\\ C_2 & D_2\end{pmatrix}$，$M=\begin{pmatrix}A_2 & B_2\\ C_1A_2+C_2 & C_1B_2+D_2\end{pmatrix}$，此时有

$$\begin{aligned}M_1M_2(0)&=\begin{pmatrix}I & 0\\ C_1 & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_2 & B_2\\ C_2 & D_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I & 0\\ C_1 & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_2(0)+B_2(0)\\ C_2(0)+D_2(0)\end{pmatrix}\\ &\subset\begin{pmatrix}A_2(0)+B_2(0)\\ C_1(A_2(0)+B_2(0))+C_2(0)+D_2(0)\end{pmatrix},\end{aligned}$$

取任意的 $\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\in\begin{pmatrix}A_2(0)+B_2(0)\\ C_1(A_2(0)+B_2(0))+C_2(0)+D_2(0)\end{pmatrix}$，则

$$x\in A_2(0)+B_2(0),\ y\in C_1(A_2(0)+B_2(0))+C_2(0)+D_2(0),$$

即存在 $y_1\in C_1(A_2(0)+B_2(0))$，$y_2\in C_2(0)+D_2(0)$，使得 $y=y_1+y_2$。对于 y_1，存在 $x_1\in A_2(0)+B_2(0)$，满足 $y_1\in C_1(x+x_1)=C_1x+C_1x_1$。因为 $A_2(0)+B_2(0)\subset N(C_1)$，所以 $C_1x\subset C_1C_1^{-1}(0)=$

$C_1(0)$，故 $y\in C_1x+y_2$，因此

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\begin{pmatrix}I&0\\C_1&I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y_2\end{pmatrix}\subset\begin{pmatrix}I&0\\C_1&I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_2(0)+B_2(0)\\C_2(0)+D_2(0)\end{pmatrix},$$

即$\begin{pmatrix}A_2(0)+B_2(0)\\C_1(A_2(0)+B_2(0))+C_2(0)+D_2(0)\end{pmatrix}\subset M_1M_2(0)$。由公式(1)可知

$$M_1M_2(0)=\begin{pmatrix}A_2(0)+B_2(0)\\C_1A_2(0)+C_1B_2(0)+C_2(0)+D_2(0)\end{pmatrix}=M(0)。$$

由条件 $R(A_2)\cup R(B_2)\subset D(C_1)$，有

$$\begin{aligned}D(M_1M_2)&=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in X\times Y:\begin{pmatrix}I&0\\C_1&I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_2&B_2\\C_2&D_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\neq\varnothing\right\}\\&=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in X\times Y:D\left(\begin{pmatrix}I&0\\C_1&I\end{pmatrix}\right)\cap\begin{pmatrix}A_2&B_2\\C_2&D_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\neq\varnothing\right\}\\&=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in X\times Y:\begin{pmatrix}A_2&B_2\\C_2&D_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\neq\varnothing\right\}\\&=(D(A_2)\cap D(C_2))\times(D(B_2)\cap D(D_2))=D(M)。\end{aligned}$$

根据引理 2 和引理 5 可知 $M_1M_2=M$。

定理 2 设 $A_1\in LR(X)$，$B_2\in LR(Y,X)$，$C_1\in LR(X,Y)$，$D_1\in LR(Y)$，若 $R(B_2)\subset D(A_1)\cap D(C_1)$，$R(C_2)\subset D(B_1)\cap D(D_1)$，$C_1B_2(0)\subset C_1(0)+D_1(0)$，则

$$\begin{pmatrix}A_1&0\\C_1&D_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I&B_2\\0&I\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_1&A_1B_2\\C_1+D_1(0)&C_1B_2+D_1\end{pmatrix}。$$

证明 设 $M_1=\begin{pmatrix}A_1&0\\C_1&D_1\end{pmatrix}$，$M_2=\begin{pmatrix}I&B_2\\0&I\end{pmatrix}$，$M=\begin{pmatrix}A_1&A_1B_2\\C_1+D_1(0)&C_1B_2+D_1\end{pmatrix}$，此时有

$$M_1M_2(0)=\begin{pmatrix}A_1&0\\C_1&D_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I&B_2\\0&I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_1&0\\C_1&D_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B_2(0)\\0\end{pmatrix}\subset\begin{pmatrix}A_1B_2(0)\\C_1B_2(0)+D_1(0)\end{pmatrix},$$

取任意的$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\begin{pmatrix}A_1B_2(0)\\C_1B_2(0)+D_1(0)\end{pmatrix}$，则 $x\in A_1B_2(0)$，$y\in C_1B_2(0)+D_1(0)$，进而存在 $x_1,x_2\in B_2(0)$，$y_1\in C_1B_2(0)$，使得 $x\in A_1x_1$，$y\in y_1+D_1(0)$，$y_1\in C_1(x_1+x_2)=C_1x_1+C_1x_2$。因为 $C_1B_2(0)\subset C_1(0)+D_1(0)$，所以 $y\in C_1x_1+D_1(0)$，因此

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\begin{pmatrix}A_1&0\\C_1&D_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\0\end{pmatrix}\subset\begin{pmatrix}A_1&0\\C_1&D_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B_2(0)\\0\end{pmatrix},$$

进而有 $\begin{pmatrix}A_1B_2(0)\\C_1B_2(0)+D_1(0)\end{pmatrix}\subset\begin{pmatrix}A_1&0\\C_1&D_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B_2(0)\\0\end{pmatrix}$，因此 $M_1M_2(0)=M(0)$。注意到

$$\begin{aligned}D(M_1M_2)&=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in X\times Y:\begin{pmatrix}A_1&0\\C_1&D_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I&B_2\\0&I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\neq\varnothing\right\}\\&=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in X\times Y:D\left(\begin{pmatrix}A_1&0\\C_1&D_1\end{pmatrix}\right)\cap\begin{pmatrix}I&B_2\\0&I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\neq\varnothing\right\}\\&=(D(A_1)\cap D(C_1))\times(D(B_2)\cap D(D_1))\\&=D(M)。\end{aligned}$$

结合引理 2 和引理 5 可知 $M_1M_2=M$。

定理 3　设 $A\in LR(X)$，$B\in LR(Y,X)$，$C\in LR(X,Y)$，$D\in LR(Y)$，$D(A)\subset D(C)$，$R(B)\subset R(A)$，若 $CA^{-1}B(0)\subset C(0)+D(0)$，则

$$L_0=\begin{pmatrix} I & 0 \\ CA^{-1} & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D-CA^{-1}B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & A^{-1}B \\ 0 & I \end{pmatrix}。$$

证明　注意到 $D(CA^{-1})=\{x\in X: CA^{-1}x\neq\varnothing\}=\{x\in X: D(C)\cap A^{-1}x\neq\varnothing\}$，因为 $A^{-1}x\subset R(A^{-1})=D(A)\subset D(C)$，故 $D(CA^{-1})=\{x\in X: A^{-1}x\neq\varnothing\}=D(A^{-1})=R(A)$。根据定理 1 和定理 2 有 $RST=\begin{pmatrix} A-\mu I & P_1 \\ P_2 & P_3 \end{pmatrix}$，其中

$$P_1=AA^{-1}B,\ P_2=CA^{-1}A+D(0)-CA^{-1}B(0),$$

$$P_3=CA^{-1}AA^{-1}+CA^{-1}(0)+\Delta,\ \Delta=D-CA^{-1}B,$$

$$R=\begin{pmatrix} I & 0 \\ CA^{-1} & I \end{pmatrix},\ S=\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D-CA^{-1}B \end{pmatrix},\ T=\begin{pmatrix} I & A^{-1}B \\ 0 & I \end{pmatrix}。$$

此时 $RST\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & P_1 \\ P_2 & P_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A(0)+B(0) \\ CA^{-1}B(0)+D(0) \end{pmatrix}$，包含关系 $CA^{-1}B(0)\subset C(0)+D(0)$ 蕴含了 $CA^{-1}B(0)+D(0)\subset C(0)+D(0)$。注意到 $C(0)\subset CA^{-1}B(0)$，则 $C(0)+D(0)\subset CA^{-1}B(0)+D(0)$。因此 $CA^{-1}B(0)+D(0)=C(0)+D(0)$，即 $RST\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A(0)+B(0) \\ C(0)+D(0) \end{pmatrix}=(L_0-\mu I)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$。注意到

$$\begin{aligned} D(RST)&=\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\in X\times Y: RST\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\neq\varnothing\right\} \\ &=\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\in X\times Y: D(R)\cap ST\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\neq\varnothing\right\} \\ &=\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\in X\times Y: ST\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\neq\varnothing\right\} \\ &=D(A)\times(D(B)\cap D(D))=D(L_0)。\end{aligned}$$

结合引理 2 和引理 5 可知 $RST=L_0$。

推论 4　设 $A\in LR(X)$，$B\in LR(Y,X)$，$C\in LR(X,Y)$，$D\in LR(Y)$，若 $D(A)\subset D(C)$，$R(B)\subset R(A-\mu I)$ 且对于任意的 $\mu\in\mathbb{C}$，有 $C(A-\mu I)^{-1}B(0)\subset C(0)+D(0)$，则

$$L_0-\mu I=RST \tag{2}$$

成立，其中

$$\begin{aligned} &\Delta(\mu)=D-C(A-\mu I)^{-1}B-\mu I \\ &L_0-\mu I=\begin{pmatrix} A-\mu I & B \\ C & D-\mu I \end{pmatrix} \\ &R=\begin{pmatrix} I & 0 \\ C(A-\mu I)^{-1} & I \end{pmatrix} \\ &S=\begin{pmatrix} A-\mu I & 0 \\ 0 & D-C(A-\mu I)^{-1}B-\mu I \end{pmatrix} \\ &T=\begin{pmatrix} I & (A-\mu I)^{-1}B \\ 0 & I \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{3}$$

定理 5 设 $A\in LR(X)$,$B\in LR(Y,X)$,$C\in LR(X,Y)$,$D\in LR(Y)$,若 $D(A)\subset D(C)$,$R(B)\subset R(A-\mu I)$且对于任意的 $\mu\in\mathbb{C}$,有 $C(A-\mu I)^{-1}B(0)\subset C(0)+D(0)$,则当 B 是单射时,有 $\sigma_p(L_0)=\sigma_p(A)\cup(\sigma_p(\Delta)\cap\Omega_2)\cup\Omega_3$;当 B 不是单射时,有 $\sigma_p(L_0)=\sigma_p(A)\cup(\sigma_p(\Delta)\cap(\Omega_1\cup\Omega_2))\cup\Omega_3$,其中

$$\Omega_1=\{\mu\in\mathbb{C}:\text{存在 } y\neq 0,\text{使得 } 0\in By\cap\Delta(\mu)y\},$$

$$\Omega_2=\{\mu\in\mathbb{C}:\text{存在 } y\neq 0,\text{使得 } 0\in\Delta(\mu)y \text{ 且}(A-\mu I)x\cap(-By)\neq\{0\}\},$$

$$\Omega_3=\{\mu\in\mathbb{C}:\text{存在 } x\neq 0,\text{使得}(A-\mu I)x\cap B(0)\neq\{0\}\},$$

L_0 和 $\Delta(\mu)$的定义见推论 4 和公式(3)。

证明 记 $M(\mu)=\begin{pmatrix}A-\mu I & B\\ 0 & \Delta(\mu)\end{pmatrix}$,则 $L_0-\mu I$ 不是单射$\Leftrightarrow M(\mu)$不是单射,即 $\sigma_p(L_0)=\sigma_p(M(\mu))$。下证

$$M(\mu)\text{ 不是单射}\Leftrightarrow\begin{cases}B\text{ 不是单射时},\mu\in\sigma_p(A)\cup(\sigma_p(\triangle)\cap(\Omega_1\cup\Omega_2))\cup\Omega_3;\\ B\text{ 是单射时},\mu\in\sigma_p(A)\cup(\sigma_p(\triangle)\cap\Omega_2)\cup\Omega_3。\end{cases}$$

设 $M(\mu)$ 不是单射,则存在$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$,使得$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\in M(\mu)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$,即 $0\in\Delta(\mu)y$ 且 $0\in(A-\mu I)x+By$。

设 B 不是单射:当 $x\neq 0$,$y=0$ 时,有 $0\in(A-\mu I)x+B(0)$。若 $0\in(A-\mu I)x$,则 $A-\mu I$ 不是单射。若 $0\notin(A-\mu I)x$,则 $\mu\in\Omega_3$;当 $x=0$,$y\neq 0$ 时,由 $0\in A(0)+By$,$0\in\Delta(\mu)y$,易知 $\triangle(\mu)$ 不是单射。此时,若 $0\in By$,则 $\mu\in\Omega_1$,若 $0\notin By$,则 $A(0)\cap(-By)\neq\{0\}$;当 $x\neq 0$,$y\neq 0$ 时,有$0\in(A-\mu I)x+By$,$0\in\Delta(\mu)y$,易知 $\Delta(\mu)$ 不是单射且$(A-\mu I)x\cap(-By)\neq\{0\}$。

因为$\{\mu\in\mathbb{C}:\text{存在 } y\neq 0,\text{使得 } 0\in\Delta(\mu)y \text{ 且 } A(0)\cap(-By)\neq\{0\}\}\cup\{\mu\in\mathbb{C}:\text{存在 } x,y\neq 0,\text{使得 } 0\in\triangle(\mu)y\text{ 且}(A-\mu I)x\cap(-By)\neq\{0\}\}=\{\mu\in\mathbb{C}:\text{存在 } x\in D(A),y\neq 0,\text{使得 } 0\in\triangle(\mu)y \text{ 且}(A-\mu I)x\cap(-By)\neq\{0\}\}$,所以当 $\mu\in\sigma_p(M)$ 时可推得 $\mu\in\sigma_p(A)\cup(\sigma_p(\triangle)\cap(\Omega_1\cup\Omega_2))\cup\Omega_3$。

设 B 是单射:当 $x\neq 0$,$y=0$ 时,有 $0\in(A-\mu I)x+B(0)$。若 $0\in(A-\mu I)x$,则 $A-\mu I$ 不是单射,若 $0\notin(A-\mu I)x$,则 $\mu\in\Omega_3$;当 $x=0$,$y\neq 0$ 时,有 $0\in A(0)+By$,$0\in\Delta(\mu)y$,易知 $\Delta(\mu)$ 不是单射。此时 $0\notin By$(因为当 $0\in By$ 时,由于 $y\neq 0$ 可以推得 B 不是单射,这与已知矛盾),即 $A(0)\cap(-By)\neq\{0\}$;当 $x\neq 0$,$y\neq 0$ 时,有 $0\in(A-\mu I)x+By$,$0\in\Delta(\mu)y$,易知 $\Delta(\mu)$ 不是单射且$(A-\mu I)x\cap(-By)\neq\{0\}$。因此当 $\mu\in\sigma_p(M)$ 时,可推得 $\mu\in\sigma_p(A)\cup(\sigma_p(\Delta)\cap\Omega_2)\cup\Omega_3$。

反过来,下面分别从 B 不是单射和 B 是单射两种情形来讨论。

设 B 不是单射,下面分 4 种情形讨论:

情形 1: 设 $A-\mu I$ 不是单射,则存在 $x\neq 0$,使得 $0\in(A-\mu I)x$。显然$\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$且$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\in M(\mu)\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(A-\mu I)(x)+B(0)\\ \Delta(\mu)(0)\end{pmatrix}$,因此 $M(\mu)$不是单射。

情形 2: 设 $\Delta(\mu)$不是单射且 $\mu\in\Omega_1$,则存在 $y\neq 0$,使得 $0\in By\cap\Delta(\mu)y$,显然$\begin{pmatrix}0\\y\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$且$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\in M(\mu)\begin{pmatrix}0\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(A-\mu I)(0)+By\\ \Delta(\mu)y\end{pmatrix}$,因此 $M(\mu)$不是单射。

情形 3: 设 $\Delta(\mu)$不是单射且 $\mu\in\Omega_2$,则存在 $x\neq 0$,$y\neq 0$,使得$(A-\mu I)x\cap(-By)\neq\{0\}$,$0\in$

$\Delta(\mu)y$。显然$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$且$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\in M(\mu)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(A-\mu I)x+By\\\Delta(\mu)y\end{pmatrix}$,因此 $M(\mu)$不是单射。

情形 4: 设 $\mu\in\Omega_3$,则存在 $x\neq 0$,使得 $0\in(A-\mu I)x+B(0)$。显然$\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$且$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\in M(\mu)\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(A-\mu I)(x)+B(0)\\\Delta(\mu)(0)\end{pmatrix}$,因此 $M(\mu)$不是单射。

设 B 是单射:当 $A-\mu I$ 不是单射时,$M(\mu)$不是单射的证明与情形 1 的证明相同。当 $\Delta(\mu)$不是单射且 $\mu\in\Omega_2$ 时,$M(\mu)$不是单射的证明与情形 3 的证明相同。当 $\mu\in\Omega_3$ 时,$M(\mu)$不是单射的证明与情形 4 的证明相同。

注 2　若要 $L_0-\mu I$ 不是单射,即存在$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$满足$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\in(L_0-\mu I)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=RST\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$,注意到$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\in R\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$,所以只需满足$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\in ST\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$即可。根据定理 1 和引理 2 可知 $ST=\begin{pmatrix}A-\mu I & (A-\mu I)(A-\mu I)^{-1}B\\0 & \Delta(\mu)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A-\mu I & B\\0 & \Delta(\mu)\end{pmatrix}=M(\mu)$,所以当讨论 $L_0-\mu I$ 是否为单射时,只需考虑 $M(\mu)$是否为单射即可。

定理 6　设 $A\in LR(X)$,$B\in LR(Y,X)$,$C\in LR(X,Y)$,$D\in LR(Y)$,若 $D(A)\subset D(C)$,$D(L_0)\neq\{0\}$,$R(B)\subset R(A-\mu I)$且对于任意的 $\mu\in\mathbb{C}$,有 $C(A-\mu I)^{-1}B(0)\subset C(0)+D(0)$,则 $\sigma_r(L_0)=(\sigma_r(A)\cap\Omega_8)\cup(\sigma_r(\triangle)\cap\Omega_9))\cup\Omega_{10}$,其中

$$\Omega_8=(\Omega_5\backslash\sigma_p(\triangle))\cup(\Omega_5\cap\Omega_6\cap\Omega_7),$$
$$\Omega_9=(\Omega_5\backslash\sigma_p(\triangle))\cap\Omega_4,$$
$$\Omega_{10}=\Omega_4\cap(\Omega_5\backslash\sigma_p(\triangle))\cap\Omega_6\cap\Omega_7。$$

证明　记

$$\Omega_4=\{\mu\in\mathbb{C}:\overline{R(C(A-\mu I)^{-1})+R(\triangle(\mu))}\neq Y\},$$
$$\Omega_5=\{\mu\in\mathbb{C}:\text{任意的 }x\neq 0,\text{满足}(A-\mu I)x\cap B(0)=\varnothing\},$$
$$\Omega_6=\{\mu\in\mathbb{C}:\text{任意的 }y\neq 0,\text{满足 }A(0)\cap(-By)=\varnothing\},$$
$$\Omega_7=\{\mu\in\mathbb{C}:\text{任意的 }x,y\neq 0,\text{满足}(A-\mu I)x\cap(-By)=\varnothing\},$$

根据定理 4 的证明可知,$D(C(A-\mu I)^{-1})=R(A-\mu I)$,所以由公式(3)和定理 1 可知

$$RS=\begin{pmatrix}I & 0\\C(A-\mu I)^{-1} & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A-\mu I & 0\\0 & \Delta(\mu)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A-\mu I & 0\\C(A-\mu I)^{-1}(A-\mu I) & C(A-\mu I)^{-1}(0)+\Delta(\mu)\end{pmatrix},$$

记$\begin{pmatrix}A-\mu I & 0\\C(A-\mu I)^{-1}(A-\mu I) & C(A-\mu I)^{-1}(0)+\Delta(\mu)\end{pmatrix}=N(\mu)$。因为

$$\begin{aligned}D(RS)&=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in X\times Y:RS\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\neq\varnothing\right\}\\&=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in X\times Y:D(R)\cap S\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\neq\varnothing\right\}\\&=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in X\times Y:S\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\neq\varnothing\right\}\\&=D(A)\times(D(B)\cap D(D))。\end{aligned}$$

对于任意的 $x\in D(A)$，$y\in D(B)\cap D(D)$，取 $x_1\in(A-\mu I)^{-1}By\subset D(A)$，则存在 $x_2\in D(A)\subset X$ 满足 $x=x_1+x_2$，所以

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\begin{pmatrix}x_2+(A-\mu I)^{-1}By\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I & (A-\mu I)^{-1}B\\0 & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_2\\y\end{pmatrix}\subset R(T)。$$

结合引理 6 知 $R(L_0-\mu I)=R(N(\mu))$，所以$\overline{R(L_0-\mu I)}\neq X\times Y\Leftrightarrow\overline{R(N(\mu))}\neq X\times Y$。

下证$\overline{R(N(\mu))}=X\times Y\Leftrightarrow\overline{R(A-\mu I)}=X$ 且$\overline{R(C(A-\mu I)^{-1})+R(\Delta(\mu))}=Y$。

设$\overline{R(N(\mu))}=X\times Y$，对于任意$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in X\times Y$，存在$\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}\in R(N(\mu))$使得$\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}(n\to\infty)$。由$\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}\in R(N(\mu))$，故存在$\begin{pmatrix}x_n^0\\y_n^0\end{pmatrix}\in D(A)\times(D(B)\cap D(D))$满足$\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}\in\begin{pmatrix}(A-\mu I)x_n^0\\Cx_n^0+\Delta(\mu)y_n^0\end{pmatrix}$。因为 $x_n\to x(n\to\infty)$，所以$\overline{R(A-\mu I)}=X$。

由 $x_n\in(A-\mu I)x_n^0$ 可知$(A-\mu I)x_n^0=x_n+A(0)$，所以$(A-\mu I)^{-1}(A-\mu I)x_n^0=(A-\mu I)^{-1}(x_n+A(0))$，即 $x_n^0+(A-\mu I)^{-1}(0)=(A-\mu I)^{-1}x_n+(A-\mu I)^{-1}(0)$，因此 $x_n^0\in(A-\mu I)^{-1}x_n$。结合 $y_n\in Cx_n^0+\Delta(\mu)y_n^0$ 可得 $y_n\in C(A-\mu I)^{-1}x_n+\Delta(\mu)y_n^0$。因为 $y_n\to y(n\to\infty)$，所以$\overline{R(C(A-\mu I)^{-1})+R(\Delta(\mu))}=Y$。反过来，设$\overline{R(A-\mu I)}=X$ 且$\overline{R(C(A-\mu I)^{-1})+R(\Delta(\mu))}=Y$。对于任意的$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in X\times Y$，由$\overline{R(C(A-\mu I)^{-1})+R(\Delta(\mu))}=Y$ 可知，存在 $y_n\in R(C(A-\mu I)^{-1})+R(\Delta(\mu))$，满足 $y_n\to y(n\to\infty)$。注意到 $y_n\in R(C(A-\mu I)^{-1})+R(\Delta(\mu))$，则存在 $x_n^0\in R(A-\mu I)$，$y_n^0\in D(B)\cap D(D)$使得 $y_n\in C(A-\mu I)^{-1}x_n^0+\Delta(\mu)y_n^0$。此时存在 $x_n^1\in(A-\mu I)^{-1}x_n^0$，使得 $y_n\in Cx_n^1+\Delta(\mu)y_n^0$。因为$\overline{R(A-\mu I)}=X$，所以存在 $x_n\in R(A-\mu I)$，满足 $x_n\to x(n\to\infty)$。因为 $x_n\in R(A-\mu I)$，所以存在 $x_n^2\in D(A)$，使得 $x_n\in(A-\mu I)x_n^2=(A-\mu I)x_n^1+(A-\mu I)(x_n^2-x_n^1)$，进而有

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}&\in\begin{pmatrix}(A-\mu I)x_n^1+(A-\mu I)(x_n^2-x_n^1)\\Cx_n^1+\Delta(\mu)y_n^0\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}(A-\mu I)x_n^1\\Cx_n^1+\Delta(\mu)y_n^0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}(A-\mu I)(x_n^2-x_n^1)\\0\end{pmatrix}\\&=N(\mu)\begin{pmatrix}x_n^1\\y_n^0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}(A-\mu I) & 0\\0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_n^2-x_n^1\\y_n^0\end{pmatrix}。\end{aligned}$$

由于$\overline{R(A-\mu I)}=X$，所以对于某一个固定的 $u\in X$，存在 $u_n^2\in(A-\mu I)(x_n^2-x_n^1)$，满足 $u_n^2\to u(n\to\infty)$。取 $u_n^1=x_n-u_n^2$，则 $u_n^1=x_n-u_n^2\in(A-\mu I)x_n^2-(A-\mu I)(x_n^2-x_n^1)=(A-\mu I)x_n^1$，所以$\begin{pmatrix}u_n^1\\y_n\end{pmatrix}\in N(\mu)\begin{pmatrix}x_n^1\\y_n^0\end{pmatrix}$且$\begin{pmatrix}u_n^1\\y_n\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}u\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-u\\y\end{pmatrix}$。因为$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$具有任意性，所以$\begin{pmatrix}x-u\\y\end{pmatrix}\in X\times Y$ 也具有任意性，因此$\overline{R(N(\mu))}=X\times Y$。

综上所述，$\overline{R(N(\mu))}=X\times Y\Leftrightarrow\overline{R(A-\mu I)}=X$ 且$\overline{R(C(A-\mu I)^{-1})+R(\Delta(\mu))}=Y$，即

$$\overline{R(N(\mu))}\neq X\times Y\Leftrightarrow\overline{R(A-\mu I)}\neq X \text{ 或 } \mu\in\Omega_4 \tag{4}$$

下证，$M(\mu)$是单射$\Leftrightarrow A-\mu I$ 是单射，$\mu\in\Omega_5$ 且 $\mu\in(\Omega_6\cap\Omega_7)\cup\{\mu\in\mathbb{C}:\Delta(\mu)\text{是单射}\}$，其中 $M(\mu)=\begin{pmatrix}A-\mu I & B\\0 & \Delta(\mu)\end{pmatrix}$。设 $M(\mu)$是单射，则对于任意的$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in D(A)\times(D(B)\cap D(D))$，都有

$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\notin\begin{pmatrix}A-\mu I & B\\ 0 & \Delta(\mu)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(A-\mu I)x+By\\ \Delta(\mu)y\end{pmatrix}$。分以下 3 种情形来讨论：

情形 1： 当 $x\neq 0,y=0$ 时，有 $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\notin\begin{pmatrix}(A-\mu I)x+B(0)\\ \Delta(\mu)(0)\end{pmatrix}$。因为 $0\in\Delta(\mu)(0)$，所以 $0\notin(A-\mu I)x+B(0)$ 即 $\mu\in\Omega_5$，又因为 $0\in B(0)$，所以 $0\notin(A-\mu I)x$，由 x 的任意性可知 $A-\mu I$ 是单射。

情形 2： 当 $x=0,y\neq 0$ 时，有 $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\notin\begin{pmatrix}(A-\mu I)(0)+By\\ \Delta(\mu)y\end{pmatrix}$。当 $0\notin(A-\mu I)(0)+By$ 时，易知 $\mu\in\Omega_6$。当 $0\notin\Delta(\mu)y$ 时，由 y 的任意性可知 $\Delta(\mu)$ 是单射。

情形 3： 当 $x\neq 0,y\neq 0$ 时，有 $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\notin\begin{pmatrix}(A-\mu I)x+By\\ \Delta(\mu)y\end{pmatrix}$。当 $0\notin(A-\mu I)x+By$ 时，易知 $\mu\in\Omega_7$。当 $0\notin\Delta(\mu)y$ 时，由 y 的任意性可知 $\Delta(\mu)$ 是单射。

反过来，设 $A-\mu I$ 和 $\Delta(\mu)$ 均为单射且 $\mu\in\Omega_5\cap\Omega_6$。假设 $M(\mu)$ 不是单射，即存在非零的 $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in D(M(\mu))$ 使得 $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\in\begin{pmatrix}(A-\mu I)x+By\\ \Delta(\mu)y\end{pmatrix}$。当 $y\neq 0$ 时，由 $\Delta(\mu)$ 是单射可知 $0\notin\Delta(\mu)y$，这与 $0\in\Delta(\mu)y$ 矛盾；当 $y=0$ 时，由 $A-\mu I$ 是单射且 $\mu\in\Omega_5\cap\Omega_6$ 可知，$0\notin(A-\mu I)x+B(0)$，这与 $0\in(A-\mu I)x+B(0)$ 矛盾。因此 $M(\mu)$ 是单射。

同理，当 $A-\mu I$ 是单射且 $\mu\in\Omega_5\cap\Omega_6\cap\Omega_7$ 时，$M(\mu)$ 是单射。由公式(4)可得 $\sigma_r(L_0)=(\sigma_r(A)\cap\Omega_8)\cup(\sigma_r(\triangle)\cap\Omega_9))\cup\Omega_{10}$。

推论 7　设 $A\in CR(X),B\in L(Y,X),C\in LR(X,Y),D\in BR(Y)$，若 $D(A)\subset D(C),D(B)\subset D(D),R(B)=R(A-\mu I)$ 且对于任意的 $\mu\in\mathbb{C}$，有 $C(A-\mu I)^{-1}B(0)\subset C(0)+D(0)$，则当 $N(\overline{D}-\mu I)=\overline{D(D)},N(\overline{C(A-\mu I)^{-1}B})=\overline{D(B)}$ 且 $\mu\in\rho(A)$ 时，$\sigma_r(L_0)=\sigma_r(\Delta)$。

证明　设 $\mu\in\rho(A)$，则 $\mu\notin\sigma_r(A)$。易知 $\Omega_6\cap\Omega_7=\{\mu\in\mathbb{C}$：对于任意的 $y\neq 0$，满足 $(A-\mu I)x\cap(-By)=\varnothing\}$。取 $0\neq y\in D(B)\cap D(D),x_1\in By$，则 $-x_1\in(-By)$ 且 $-x_1\in X=R(A-\mu I)$，即存在 $x\in D(A)$ 使得 $-x_1\in(A-\mu I)x$，因此 $\Omega_6\cap\Omega_7=\varnothing$。下面证明 $\sigma_r(\Delta)\subset\Omega_4$。因为 $R(C(A-\mu I)^{-1})+R(\Delta(\mu))\subset\overline{R(C(A-\mu I)^{-1})}+\overline{R(\Delta(\mu))}$，所以

$$\overline{R(C(A-\mu I)^{-1})+R(\Delta(\mu))}\subset\overline{\overline{R(C(A-\mu I)^{-1})}+\overline{R(\Delta(\mu))}}\tag{5}$$

由引理 9 可知

$$\begin{aligned}\overline{\overline{R(C(A-\mu I)^{-1})}+\overline{R(\Delta(\mu))}}&=(\overline{R(C(A-\mu I)^{-1})}^{\perp}\cap\overline{R(\Delta(\mu))}^{\perp})^{\perp}\\&=(R(C(A-\mu I)^{-1})^{\perp}\cap R(\Delta(\mu))^{\perp})^{\perp}。\end{aligned}$$

易知 $(R(C(A-\mu I)^{-1})^{\perp}\cap R(\Delta(\mu))^{\perp})^{\perp}\neq Y\Leftrightarrow R(C(A-\mu I)^{-1})^{\perp}\cap R(\Delta(\mu))^{\perp}\neq\{0\}$，注意到 $R(C(A-\mu I)^{-1})^{\perp}=N((C(A-\mu I)^{-1})^{*}),N(\Delta(\mu))^{\perp}=N(\Delta(\mu)^{*})$，所以

$$(R(C(A-\mu I)^{-1})^{\perp}\cap R(\Delta(\mu))^{\perp})^{\perp}\neq Y\Leftrightarrow N((C(A-\mu I)^{-1})^{*})\cap N(\Delta(\mu)^{*})\neq\{0\}\tag{6}$$

要证明 $\sigma_r(\Delta)\subset\Omega_4$，只需证明当 $\overline{R(\Delta(\mu))}\neq Y$ 时，有 $\overline{R(C(A-\mu I)^{-1})+R(\Delta(\mu))}\neq Y$ 成立。根据公式(5)和(6)可知，只需证明当 $\overline{R(\Delta(\mu))}\neq Y$ 时，$N((C(A-\mu I)^{-1})^{*})\cap N(\Delta(\mu)^{*})\neq\{0\}$ 成立即可。因为 $D(B)\subset D(D)$ 且 D 有界，所以根据引理 8 可知，当 $\overline{R(\Delta(\mu))}\neq Y$ 时，

$$\begin{aligned}N(\Delta(\mu)^{*})&=N((D-\mu I-C(A-\mu I)^{-1}B)^{*})\\&=N((D-\mu I)^{*}-(C(A-\mu I)^{-1}B)^{*})\neq\{0\}\end{aligned}\tag{7}$$

对于任意的 $y^* \in N((D-\mu I)^*) \cap N((C(A-\mu I)^{-1}B)^*)$,有

$$\begin{aligned}((D-\mu I)^* - C(A-\mu I)^{-1}B)^*)y^* &= (D-\mu I)^* y^* - C(A-\mu I)^{-1}B)^* y^* \\ &= (D-\mu I)^*(0) - C(A-\mu I)^{-1}B)^*(0) \\ &= ((D-\mu I)^* - C(A-\mu I)^{-1}B)^*)(0),\end{aligned}$$

所以 $y^* \in N((D-\mu I)^* - C(A-\mu I)^{-1}B)^*)$,即

$$N((D-\mu I)^*) \cap N((C(A-\mu I)^{-1}B)^*) \subset N((D-\mu I)^* - C(A-\mu I)^{-1}B)^*) \tag{8}$$

对于任意的 $y^* \in N((D-\mu I)^* - (C(A-\mu I)^{-1}B)^*)$,有

$$(D-\mu I)^* y^* - (C(A-\mu I)^{-1}B)^* y^* = (D-\mu I)^*(0) - C(A-\mu I)^{-1}B)^*(0) \tag{9}$$

因为 $N(\overline{D}-\mu I)=\overline{D(D)}$,所以 $N(\overline{D}-\mu I)^{\perp}=D(D)^{\perp}=D(D-\mu I)^{\perp}$,故

$$R((D-\mu I)^*) = N(\overline{D}-\mu I)^{\perp} = D(D-\mu I)^{\perp} = (D-\mu I)^*(0) \tag{10}$$

将公式(10)代入公式(9)可得,$(C(A-\mu I)^{-1}B)^* y^* = (C(A-\mu I)^{-1}B)^*(0)$,即

$$N((D-\mu I)^* - (C(A-\mu I)^{-1}B)^*) \subset N((C(A-\mu I)^{-1}B)^*)。$$

同理,由 $N(\overline{C(A-\mu I)^{-1}B})=\overline{D(B)}=\overline{D(C(A-\mu I)^{-1}B)}$ 可得 $N((D-\mu I)^* - (C(A-\mu I)^{-1}B)^*) \subset N((D-\mu I)^*)$。因此

$$N((D-\mu I)^* - (C(A-\mu I)^{-1}B)^*) \subset N((C(A-\mu I)^{-1}B)^*) \cap N((D-\mu I)^*) \tag{11}$$

由公式(7)、公式(8)和公式(11)可得 $N(\Delta(\mu)^*)=N((C(A-\mu I)^{-1}B)^*) \cap N((D-\mu I)^*) \neq \{0\}$。

因为 $R(B)=R(A-\mu I)=X$,所以 $R(C(A-\mu I)^{-1})=R(C(A-\mu I)^{-1}B)$,即

$$N((C(A-\mu I)^{-1}B)^*) = R(C(A-\mu I)^{-1}B)^{\perp} = R(C(A-\mu I)^{-1})^{\perp} = N((C(A-\mu I)^{-1})^*),$$

因此

$$N((C(A-\mu I)^{-1})^*) \cap N(\Delta(\mu)^*) = N(\Delta(\mu)^*) \neq \{0\}。$$

故由定理 6 可得,$\sigma_r(L_0)=\sigma_r(\Delta)$。

注 3 特别地,当 $D=\mu I$ 时 $\Delta(\mu)=-C(A-\mu I)^{-1}B$,即 $\overline{R(\Delta(\mu))}=\overline{R(-C(A-\mu I)^{-1}B)}$。所以当 $\overline{R(\Delta(\mu))} \neq Y$ 时,

$$N((C(A-\mu I)^{-1})^*) \cap N(\Delta(\mu)^*) = R(\Delta(\mu))^{\perp} \neq \{0\}。$$

因此,当 $D=\mu I$ 时,不需要条件 $N(\overline{D}-\mu I)=\overline{D(D)}$ 和 $N(\overline{C(A-\mu I)^{-1}B})=\overline{D(B)}$ 成立也能得到推论 7 的结论。

定理 8 设 $A \in LR(X)$,$B \in LR(Y,X)$,$C \in LR(X,Y)$,$D \in LR(Y)$ 满足 $D(A) \subset D(C)$,$R(B) \subset R(A-\mu I)$ 且对于任意的 $\mu \in \mathbb{C}$,有 $C(A-\mu I)^{-1}B(0) \subset C(0)+D(0)$,若 $C(A-\mu I)^{-1}$ 和 $(A-\mu I)^{-1}B$ 都是有界单值的,则 $\sigma_c(L_0)=(\sigma_c(A) \cap \Omega_{11}) \cup (\sigma_c(\Delta)) \cap \Omega_{12})$,其中

$$\Omega_{11} = \{\mu \in \mathbb{C} : \overline{R(\Delta(\mu))} = Y\} \cap \Omega_8,$$

$$\Omega_{12} = \{\mu \in \mathbb{C} : \overline{R(A-\mu I)} = X\} \cap (\Omega_5 \backslash \sigma_p(A)),$$

Ω_i 的定义见定理 6,其中 $i=\{4,5,6,7,8,9,10\}$。

证明 由公式(2)可知,$(L_0-\mu I)^{-1}=(RST)^{-1}=T^{-1}S^{-1}R^{-1}$。所以根据引理 7 有

$$(L_0-\mu I)^{-1} = \begin{pmatrix} I & -(A-\mu I)^{-1}B \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (A-\mu I)^{-1} & 0 \\ 0 & \Delta(\mu)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ -C(A-\mu I)^{-1} & I \end{pmatrix}。$$

由于 $C(A-\mu I)^{-1}$ 和 $(A-\mu I)^{-1}B$ 都是有界单值的,进而 T^{-1} 和 R^{-1} 是有界单值的,此时 $(L_0-\mu I)^{-1}$ 无界当且仅当 S^{-1} 无界,所以 $(L_0-\mu I)^{-1}$ 无界当且仅当 $(A-\mu I)^{-1}$ 无界或 $\Delta(\mu)^{-1}$ 无界。

由定理 6 的证明可知,$R(L_0-\mu I)=R(N(\mu))$,其中

$$N(\mu)=\begin{pmatrix} A-\mu I & 0 \\ C(A-\mu I)^{-1}(A-\mu I) & C(A-\mu I)^{-1}(0)+\Delta(\mu) \end{pmatrix}。$$

接下来证明$\overline{R(N(\mu))}=X\times Y\Leftrightarrow\overline{R(A-\mu I)}=X$ 且$\overline{R(\Delta(\mu))}=Y$。

设$\overline{R(N(\mu))}=X\times Y$,则对于任意的$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\in X\times Y$,存在$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}\in R(N(\mu))$使得

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} x \\ y-y_0 \end{pmatrix}(n\to\infty),$$

其中 $y_0\in Y$。因为$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}\in R(N(\mu))$,所以存在$\begin{pmatrix} x_n^0 \\ y_n^0 \end{pmatrix}\in D(A)\times(D(B)\cap D(D))$满足$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}\in\begin{pmatrix} (A-\mu I)x_n^0 \\ Cx_n^0+\Delta(\mu)y_n^0 \end{pmatrix}$。$x_n\to x(n\to\infty)$蕴含了$\overline{R(A-\mu I)}=X$。由 $x_n\in(A-\mu I)x_n^0$ 可知,$(A-\mu I)x_n^0=x_n+A(0)$,进而有$(A-\mu I)^{-1}(A-\mu I)x_n^0=(A-\mu I)^{-1}(x_n+A(0))$,即 $x_n^0+(A-\mu I)^{-1}(0)=(A-\mu I)^{-1}x_n+(A-\mu I)^{-1}(0)$,因此 $x_n^0\in(A-\mu I)^{-1}x_n$。再由 $y_n\in Cx_n^0+\Delta(\mu)y_n^0$,可得

$$y_n\in C(A-\mu I)^{-1}x_n+\Delta(\mu)y_n^0。$$

设 $y_n=y_{1,n}+y_{2,n}$,其中 $y_{1,n}=C(A-\mu I)^{-1}x_n$,$y_{2,n}\in\Delta(\mu)y_n^0$,且 $y_{1,n}\to y_0$。由 $y_n\to y-y_0(n\to\infty)$可知 $y_{2,n}\to y(n\to\infty)$,由 y 的任意性可知,$\overline{R(\Delta(\mu))}=Y$。因此$\overline{R(N(\mu))}=X\times Y\Rightarrow\overline{R(A-\mu I)}=X$ 且 $\overline{R(\Delta(\mu))}=Y$。

反过来,设$\overline{R(A-\mu I)}=X$ 且$\overline{R(\Delta(\mu))}=Y$,则对于任意的 $x\in X$,存在 $x_n\in(A-\mu I)x_n^0$,使得 $x_n\to x(n\to\infty)$,其中 $x_n^0\in D(A)$。由 $x_n\in(A-\mu I)x_n^0$ 可以推出,$x_n^0\in(A-\mu I)^{-1}x_n$,故

$$Cx_n^0\subset C(A-\mu I)^{-1}x_n。$$

取 $y_n^1\in Cx_n^0\subset C(A-\mu I)^{-1}x_n$,因为 $C(A-\mu I)^{-1}$有界,所以由 $x_n\to x(n\to\infty)$可知,$C(A-\mu I)^{-1}x_n$ 也收敛,设 $y_n^1=C(A-\mu I)^{-1}x_n\to y_1(n\to\infty)$。由于$\overline{R(\Delta(\mu))}=Y$,则对于任意 $y\in Y$,存在 $y_n\in\Delta(\mu)y_n^0$,使得 $y_n\to y-y_1(n\to\infty)$,其中 $y_n^0\in D(B)\cap D(D)$。进而 $y_n^1+y_n\to y(n\to\infty)$,因此对于任意的$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\in X\times Y$,存在

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n^1+y_n \end{pmatrix}\in\begin{pmatrix} (A-\mu I)x_n^0 \\ Cx_n^0+\Delta(\mu)y_n^0 \end{pmatrix}\subset R(N(\mu)),$$

使得$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n^1+y_n \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}(n\to\infty)$,即$\overline{R(N(\mu))}=X\times Y$。综上,$\overline{R(N(\mu))}=X\times Y\Leftrightarrow\overline{R(A-\mu I)}=X$ 且 $\overline{R(\Delta(\mu))}=Y$。结合定理 6 的证明可知,$\sigma_c(L_0)=(\sigma_c(A)\cap\Omega_{11})\cup(\sigma_c(\triangle))\cap\Omega_{12})$。

参考文献:

[1] VON NEUMANN J. Functional operators Ⅱ:The geometry of orthogonal spaces[M]. Princeton:Princeton University Press,1951.

[2] AMMAR A,JERIBI A. Spectral theory of multivalued linear operators[M]. Florida:Apple Academic Press,2021.

[3] FAVINI A,YAGI A. Multivalued linear operators and degenerate evolution equations[J]. Annali di Matematica Pura ed Applicata,1993,163(1):353-384.

[4] KAMENSKII M,OBUKHOVSKII V,ZECCA P. Condensing multivalued maps and semilinear differential inclu-

sions in Banach spaces[M]. Berlin:De Gruyter,2001.

[5] DU Y,HUANG J,HUO R. On the range of upper triangular relation matrices[J]. Linear and Multilinear Algebra,2022,70(20):5750-5769.

[6] ÁLVAREZ T,AMMAR A,JERIBI A. On the essential spectra of some matrix of linear relations[J]. Mathematical Methods in the Applied Sciences,2014,37(5):620-644.

[7] AMMAR A,JERIBI A,SAADAOUI B. Frobenius-Schur factorization for multivalued matrices linear operator [J]. Mediterranean Journal of Mathematics,2017,14(1):1-29.

[8] AMMAR A,EZZADAM A,JERIBI A. A characterization of the essential spectra of 2×2 block matrices of linear relations[J]. Bulletin of the Iranian Mathematical Society,2022,48:2463-2485.

[9] 张存燕,黄俊杰,阿拉坦仓. 一类算子矩阵的谱、点谱和剩余谱[J]. 内蒙古大学学报(自然科学版),2011,42(3):269-272.

[10] 张洋洋,吴德玉,阿拉坦仓. 分块算子矩阵的本质谱[J]. 内蒙古大学学报(自然科学版),2018,49(2):120-125.

[11] 吴德玉,阿拉坦仓. 分块算子矩阵谱理论及其应用[M]. 北京:科学出版社,2013.

[12] CROSS R. Multivalued linear operators[M]. New York:Marcel Dekker,1998.

[13] DU Y,HUANG J. Spectral property of upper trianguar relation matrices [J]. Linear and Multilinear Algebra,2020,70(8):1526-1542.

(责任编委 李 宏)

Point Spectrum,Residual Spectrum,and Continuous Spectrum of Linear Relation Matrices

LÜ Yingxue,HUANG Junjie

(*School of Mathematical Sciences*,*Inner Mongolia University*,*Hohhot* 010021,*China*)

Abstract:Firstly,the condition that the product of two linear relational matrices is equal to their formal product was studied,and then the Frobenius-Schur factorization of the linear relation matrix $L_0-\mu I=\begin{pmatrix} A-\mu I & B \\ C & D-\mu I \end{pmatrix}$ was furtherly obtained. Secondly,we use the Frobenius-Schur factorization to discuss the injectiveness,the density of range and the boundedness of inverses for $L_0-\mu I$ and its Schur complement. Finally,we characterize the point spectrum,residual spectrum and continuous spectrum of L_0.

Key words: linear relation matrix; Frobenius-Schur factorization; point spectrum; residual spectrum; continuous spectrum