文章编号:1000－1638(2025)02-0125-06 DOI:10.13484/j.nmgdxxbzk.20250202

b-距离空间中推广的 Bogin 不动点定理*

安凯锋,林雨繁,贺 飞
(内蒙古大学数学科学学院,呼和浩特 010021)

摘要:强 b-距离空间和 b-距离空间是比距离空间更广泛的空间框架。在强 b-距离空间和 b-距离空间中分别建立了两类 Bogin 不动点定理。这些结果是距离空间中 Bogin 不动点定理的推广。

关键词:强 b-距离空间; b-距离空间; Bogin 不动点定理
中图分类号:O177.91 **文献标志码:**A

距离型空间的概念最初是由 Bakhtin 提出的。1993 年,Czerwik[1]将距离型空间命名为 b-距离空间。b-距离空间是比距离空间更一般的空间框架,在 b-距离空间中建立的结果比距离空间中的结果具有更广泛的应用,见文献[2-7]。

另一方面,1973 年,Goebel 等[8]在一致凸 Banach 空间给出了一个不动点定理,该定理是 Browder-Gonde-Kirk 不动点定理的一个推广,是一个重要的非扩张映射不动点定理。之后,许多学者考虑这一结果的推广形式,见文献[9-12]。特别地,1976 年,Bogin[11]将该不动点定理推广到了距离空间。此后,受 Bogin 的启发,Ćirić 等在各类空间中建立了 Bogin 不动点定理,见文献[13-16]。

本文结合不同空间性质给出了一些引理。由此,在强 b-距离空间及 b-距离空间上建立了两类不同的 Bogin 不动点定理。当空间系数 $s=1$ 时,可以得到距离空间中的 Bogin 不动点定理。

1 预备知识

下面先回顾一些基本概念。

定义 1[1,17-18] 设 X 是非空集合,$s\geqslant 1$。若映射 $d:X\times X\to\mathbf{N}^+$ 满足对于任意的 $x,y,z\in X$,

(1) $d(x,y)=0$ 当且仅当 $x=y$;

(2) $d(x,y)=d(y,x)$;

(3) $d(x,y)\leqslant s[d(x,z)+d(z,y)]$,则称$(X,d)$是系数为 s 的 b-距离空间。

进一步,若用(3′) $d(x,y)\leqslant sd(x,z)+d(z,y)$代替条件(3),则称$(X,d)$是系数为 s 的强 b-距离空间。

注 1[19] 设(X,d)是一个强 b-距离空间,由定义 1 可以得到下面的不等式

$$d(x,y)\leqslant d(x,z)+sd(z,y),\text{对任意的 } x,y,z\in X。$$

事实上,对任意 $x,y,z\in X$,可得

* **收稿日期:**2024-09-14; **修回日期:**2024-10-23
基金项目:国家自然科学基金项目(12061050)
作者简介:安凯锋(2000－),女,山西朔州人,2022 级硕士研究生。E-mail:2645314390@qq.com
通信作者:贺 飞(1979－),男,内蒙古巴彦淖尔人,教授,博士。主要从事泛函分析研究。E-mail:hefei611@163.com

$$d(x,y)=d(y,x)\leqslant sd(y,z)+d(z,x)=d(x,z)+sd(z,y)。$$

注 2　距离空间是特殊的强 b-距离空间,强 b-距离空间是特殊的 b-距离空间,反之都不成立,反例见文献[20]。

定义 2[1,17]　设(X,d)是 b-距离空间,$\{x_n\}\subseteq X$。

(1) 称序列$\{x_n\}$是收敛于 X 中的一点 x,如果$\lim\limits_{n\to\infty}d(x_n,x)=0$;

(2) 称$\{x_n\}$是 Cauchy 列,如果 $\lim\limits_{n,m\to\infty}d(x_n,x_m)\to 0$;

(3) 称(X,d)是完备的,如果 X 中每个 Cauchy 列都是收敛的。

在强 b-距离空间中同样可以定义收敛、Cauchy 列和空间完备的概念,形式与定义 2 相同。

设(X,d)是一个 b-距离空间。称自映射 $F:X\to X$ 是连续的,如果对于任意 X 中的收敛点列$\{x_n\}$且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x^*$,有

$$\lim_{n\to\infty}Fx_n=Fx^*。$$

我们称 X 中的 b-距离 d 是连续的,如果对任意 X 中的收敛点列$\{x_n\}$,$\{y_n\}$且满足$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x^*$以及$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=y^*$,有

$$\lim_{n\to\infty}d(x_n,y_n)=d(x^*,y^*)。$$

定理 1.1[5]　设(X,d)是一个完备的距离空间,$s\geqslant 1$。若 $F:X\to X$ 是一个满足下述条件的映射,对所有的 $x,y\in X$:

$$d(Fx,Fy)\leqslant ad(x,y)+b[d(x,Fx)+d(y,Fy)]+c[d(x,Fy)+d(y,Fx)],$$

其中 $a\geqslant 0,b,c>0$ 且 $a+2b+2c=1$,则 F 在 X 上存在唯一的不动点。

2　强 *b*-距离空间的 Bogin 不动点定理

定理 2.1　设(X,d)是一个完备的强 b-距离空间$(s\geqslant 1)$,$F:X\to X$ 是一个自映射,且对任意的 $x,y\in X$,有

$$d(Fx,Fy)\leqslant ad(x,y)+b[d(x,Fx)+d(y,Fy)]+c[d(x,Fy)+d(y,Fx)]\tag{1}$$

其中 $a\geqslant 0,b,c>0,a+2b+(s+1)c=1$,则 F 在 X 上存在唯一的不动点。

在证明定理 2.1 之前,先证明如下引理。

引理 2.1　若自映射 F 满足公式(1),其中 $a,b,c\geqslant 0,a+2b+(s+1)c=1$,则对于任意的 $x\in X$,有

$$d(Fx,F^2x)\leqslant d(x,Fx)\tag{2}$$

证明　由公式(1)可得,对于任意的 $x\in X$,

$$\begin{aligned}d(Fx,F^2x)&\leqslant ad(x,Fx)+b[d(x,Fx)+d(Fx,F^2x)]+c[d(x,F^2x)+d(Fx,Fx)]\\&\leqslant ad(x,Fx)+b[d(x,Fx)+d(Fx,F^2x)]+c[d(x,Fx)+sd(Fx,F^2x)]\\&\leqslant(a+b+c)d(x,Fx)+(cs+b)d(Fx,F^2x)。\end{aligned}$$

因此

$$d(Fx,F^2x)\leqslant\frac{a+b+c}{1-cs-b}d(x,Fx)=d(x,Fx)。$$

引理 2.2　若自映射 F 满足公式(1),其中 $a,c\geqslant 0,b>0,a+2b+(s+1)c=1$,则存在 $\kappa<s+1$,使得对于任意的 $x\in X$,

$$d(Fx,F^3x)\leqslant\kappa d(x,Fx)\tag{3}$$

证明　由公式(1)和公式(2)可知

$$d(Fx,F^3x)\leqslant ad(x,F^2x)+b[d(x,Fx)+d(F^2x,F^3x)]+c[d(x,F^3x)+d(F^2x,Fx)]$$

$$\begin{aligned}&\leqslant a[sd(x,Fx)+d(Fx,F^2x)]+b[d(x,Fx)+d(F^2x,F^3x)]\\&+c[d(x,Fx)+sd(Fx,F^3x)+d(Fx,F^2x)]\\&=[(s+1)a+2b+2c]d(x,Fx)+csd(Fx,F^3x)。\end{aligned}$$

因此

$$d(x,F^3x)\leqslant\frac{(s+1)a+2b+2c}{1-cs}d(x,Fx),$$

其中 $\kappa=\frac{(s+1)a+2b+2c}{1-cs}=\frac{(s+1)a+2b+2c}{a+2b+c}<s+1$。

引理 2.3　若自映射 F 满足公式(1)，其中 $a\geqslant0,b,c>0,a+2b+(s+1)c=1$，则存在 $m<1$，使得对于任意的 $x\in X$，

$$d(F^2x,F^3x)\leqslant md(x,Fx)。$$

证明　由公式(1)，公式(2)和公式(3)可得

$$\begin{aligned}d(F^2x,F^3x)&\leqslant ad(Fx,F^2x)+b[d(Fx,F^2x)+d(F^2x,F^3x)]\\&+c[d(Fx,F^3x)+d(F^2x。F^2x)]\\&\leqslant(a+2b+\kappa c)d(x,Fx),\end{aligned}$$

其中 $m=a+2b+\kappa c<a+2b+(s+1)c=1$。

定理 2.1 证明　由引理 2.3 可得，对于任意的正整数 $n\geqslant2$，存在 $m<1$，对于任意 $x\in X$，

$$d(F^nx,F^{n+1}x)\leqslant md(F^{n-2}x,F^{n-1}x)。$$

因此，若 n 是偶数，则 $d(F^nx,F^{n+1}x)\leqslant m^{\frac{n}{2}}d(x,Fx)$；若 n 是奇数，则 $d(F^nx,F^{n+1}x)\leqslant m^{\frac{n-1}{2}}d(Fx,F^2x)\leqslant m^{\frac{n-1}{2}}d(x,Fx)$。由此可知对任意的 $n\geqslant2$，对于 $x\in X$，

$$d(F^nx,F^{n+1}x)\leqslant(\sqrt{m})^{n-1}d(x,Fx)。$$

任取 $n',n\in\mathbf{N}^*$，不妨设 $n'>n$，

$$\begin{aligned}d(F^nx,F^{n'}x)&\leqslant sd(F^nx,F^{n+1}x)+d(F^{n+1}x,F^{n'}x)\\&\leqslant sd(F^nx,F^{n+1}x)+sd(F^{n+1}x,F^{n+2}x)+d(F^{n+2}x,F^{n'}x)\\&\leqslant\cdots\\&\leqslant sd(F^nx,F^{n+1}x)+d(F^{n+1}x,F^{n+2}x)+\cdots+sd(F^{n'-2}x,F^{n'-1}x)+d(F^{n'-1}x,F^{n'}x)\\&\leqslant(n'-n)sm^{\frac{n-1}{2}}d(x,Fx)。\end{aligned}$$

当 $n\to\infty$ 时，$d(F^nx,F^{n'}x)\to0$。因此，$\{F^nx\}$ 是一个 Cauchy 列。又由空间的完备性，存在 $z\in X$，使得 $F^nx\to z$。

下证 z 是 F 的不动点。由公式(1)可知

$$\begin{aligned}d(F^nx,Fz)&\leqslant ad(F^{n-1}x,z)+b[d(F^{n-1}x,F^nx)+d(z,Fz)]\\&+c[d(F^{n-1}x,Fz)+d(z,F^nx)]。\end{aligned}$$

当 $n\to\infty$ 时，对上式取极限可得

$$d(z,Fz)\leqslant(b+c)d(z,Fz)。$$

由于 $b+c<1$，故 $Fz=z$。

下证不动点 z 是唯一的。假设存在 $z'\in X,z'\neq z$ 使 $Fz'=z'$，则 $d(z',z)>0$ 且

$$\begin{aligned}d(Fz',Fz)&\leqslant ad(z',z)+b[d(z',Fz')+d(z,Fz)]+c[d(z',Fz)+d(z,Fz')]\\&\leqslant ad(z',z)+c[d(z',z)+d(z,z')]。\end{aligned}$$

因此

$$[2b+(s-1)c]d(z',z)\leqslant0。$$

由于 $b,c>0,s\geqslant1$，故 $[2b+(s-1)c]d(z',z)>0$，矛盾。

3 b-距离空间的 Bogin 不动点定理

定理 3.1 设(X,d)是一个完备的b-距离空间$(s\geqslant 1)$,$F:X\to X$是一个自映射,且对任意的$x,y\in X$,有

$$d(Fx,Fy)\leqslant ad(x,y)+b[d(x,Fx)+d(y,Fy)]+c[d(x,Fy)+d(y,Fx)] \tag{4}$$

其中$a\geqslant 0,b,c>0,a+2sb+2sc=1$,则$F$在$X$上存在唯一的不动点。

在证明定理 3.1 之前,先证明如下引理。

引理 3.1 若自映射F满足公式(4),其中$a,b,c\geqslant 0,a+2sb+2sc=1$,则对于任意的$x\in X$,有

$$d(Fx,F^2x)\leqslant d(x,Fx) \tag{5}$$

证明 由公式(4)可得

$$\begin{aligned}d(Fx,F^2x)&\leqslant ad(x,Fx)+b[d(x,Fx)+d(Fx,F^2x)]+c[d(x,F^2x)+d(Fx,Fx)]\\&\leqslant (a+b+cs)d(x,Fx)+(cs+b)d(Fx,F^2x)。\end{aligned}$$

因此

$$d(Fx,F^2x)\leqslant \frac{a+b+cs}{1-cs-b}d(x,Fx)\leqslant d(x,Fx)。$$

引理 3.2 若自映射F满足公式(4),其中$a,c\geqslant 0,b>0,a+2sb+2sc=1$,则存在$\kappa<2s$,使得对于任意的$x\in X$,

$$d(Fx,F^3x)\leqslant \kappa d(x,Fx) \tag{6}$$

证明 由公式(4)和公式(5)可得

$$\begin{aligned}d(Fx,F^3x)&\leqslant ad(x,F^2x)+b[d(x,Fx)+d(F^2x,F^3x)]+c[d(x,F^3x)+d(F^2x,Fx)]\\&\leqslant a[sd(x,Fx)+sd(Fx,F^2x)]+b[d(x,Fx)+d(F^2x,F^3x)]\\&\quad+c[sd(x,Fx)+sd(Fx,F^3x)+d(Fx,F^2x)]\\&=(2as+2b+cs+c)d(x,Fx)+csd(Fx,F^3x)。\end{aligned}$$

因此

$$d(x,F^3x)\leqslant \frac{2as+2b+cs+c}{1-cs}d(x,Fx)。$$

取$\kappa=\dfrac{2as+2b+cs+c}{1-cs}$,由于$b>0,c\geqslant 0,s\geqslant 1$,故

$$\begin{gathered}(4s^2-2)b+c(2s^2-s-1)>0,\\2b+cs+c<4bs^2+2cs^2。\end{gathered}$$

上式两边同加$2as$,可得

$$\begin{gathered}2as+2b+cs+c<2as+4bs^2+2cs^2,\\2as+2b+cs+c<2s(1-cs)。\end{gathered}$$

即

$$\frac{2as+2b+cs+c}{1-cs}<2s。$$

引理 3.3 若自映射F满足公式(4),其中$a\geqslant 0,b,c>0,a+2sb+2sc=1$,则存在$m<1$,使得对于任意的$x\in X$,

$$d(F^2x,F^3x)\leqslant md(x,Fx)。$$

证明 由公式(4),公式(5)和公式(6)可得

$$\begin{aligned}d(F^2x,F^3x)&\leqslant ad(Fx,F^2x)+b[d(Fx,F^2x)+d(F^2x,F^3x)]\\&\quad+c[d(Fx,F^3x)+d(F^2x,F^2x)]\end{aligned}$$

$$\leqslant (a+2b+\kappa c)d(x,Fx),$$

其中 $m=a+2b+\kappa c<a+2sb+2sc=1$。

引理 3.4[21]　设 (X,d,s) 是一个 b-距离空间，$\{x_n\}$ 是 X 中的一个序列。若存在 $P\geqslant 0,0\leqslant Q<1$，使得对于任意的 $n\in \mathbf{N}^*$，有 $d(x_n,x_{n+1})\leqslant PQ^{n+1}$，则 $\{x_n\}$ 是一个 Cauchy 列。

定理 3.1 证明　由引理 3.3 可得，对任意的正整数 $n\geqslant 2$，存在 $m<1$，对于任意 $x\in X$，

$$d(F^n x,F^{n+1}x)\leqslant md(F^{n-2}x,F^{n-1}x)。$$

因此，若 n 是偶数，则 $d(F^n x,F^{n+1}x)\leqslant m^{\frac{n}{2}}d(x,Fx)$；若 n 是奇数，则 $d(F^n x,F^{n+1}x)\leqslant m^{\frac{n-1}{2}}d(Fx,F^2x)\leqslant m^{\frac{n-1}{2}}d(x,Fx)$。由此可知，对任意的 $n\geqslant 2$，对于 $x\in X$，

$$d(F^n x,F^{n+1}x)\leqslant \left(\sqrt{m}\right)^{n-1}d(x,Fx)=\frac{d(x,Fx)}{m}\left(\sqrt{m}\right)^{n+1}。$$

由引理 3.4 可得 $\{F^n x\}$ 是一个 Cauchy 列。又由空间的完备性可知，存在 $z\in X$，使得 $F^n x\rightarrow z$。

下证 z 是 F 的不动点。由公式(4)可知

$$\begin{aligned}d(F^n x,Fz)\leqslant{}& ad(F^{n-1}x,z)+b[d(F^{n-1}x,F^n x)+d(z,Fz)]\\&+c[d(F^{n-1}x,Fz)+d(z,F^n x)]。\end{aligned}$$

当 $n\rightarrow\infty$ 时，对上式取极限可得

$$d(z,Fz)\leqslant (b+c)d(z,Fz)。$$

由于 $b+c<1$，故 $Fz=z$。

下证不动点 z 是唯一的。假设存在 $z'\in X,z'\neq z$ 使 $Fz'=z'$，则 $d(z',z)>0$ 且

$$\begin{aligned}d(Fz',Fz)&\leqslant ad(z',z)+b[d(z',Fz')+d(z,Fz)]+c[d(z',Fz)+d(z,Fz')]\\&\leqslant ad(z',z)+c[d(z',z)+d(z,z')]。\end{aligned}$$

因此

$$[2bs+(2s-2)c]d(z',z)\leqslant 0。$$

由于 $b,c>0,s\geqslant 1$，故 $[2bs+(2s-2)c]d(z',z)>0$，矛盾。

注 3　当 $s=1$ 时，定理 2.1，定理 3.1 为 Bogin 在文献[5]中建立的不动点定理。因此我们的结果是距离空间 Bogin 不动点定理的推广。

注 4　强 b-距离空间是一类特殊的 b-距离空间，但定理 2.1 中的压缩系数范围明显比定理 3.1 中的压缩系数范围更大。因此，两类空间中建立的 Bogin 不动点定理不可互推。

参考文献：

[1] CZERWIK S. Contraction mappings in b-metric spaces[J]. Acta Mathematica et Informatica Universitatis Ostraviensis, 1993, 1(1): 5-11.

[2] DAS A, BAG T. Some fixed point theorems in extended cone b-metric spaces[J]. Communications in Mathematics and Applications, 2022, 13(2): 647-659.

[3] BOTA M, GURAN L, PETRUSEL G. Fixed points and coupled fixed points in b-metric spaces via graphical contractions[J]. Carpathian Journal of Mathematics, 2023, 39(1): 85-94.

[4] SWAPNA P, PHANEENDRA T, RAJASHEKHAR M N. Fixed point theorems in b-metric and extended b-metric spaces[J]. Nonlinear Functional Analysis and Applications, 2023, 28(4): 877-886.

[5] ROMAGUERA S. On the correlation between Banach contraction principle and Caristi's fixed point theorem in b-metric spaces[J]. Mathematics, 2022, 10(1): 136.

[6] DOAN H. A new type of Kannan's fixed point theorem in strong b-metric spaces[J]. AIMS Mathematics, 2021, 6(7): 7895-7908.

[7] 宝倩雯，贺飞. b-距离空间中 Kirk 型渐近压缩不动点定理[J]. 内蒙古大学学报(自然科学版)，2023，54(4)：337-341.

[8] GOEBEL K,KIRK W A,SHIMI T N. A fixed point theorem in uniformly convex spaces[J]. Bollettino Unione Matematica Italiana,1973,7(4):67-75.
[9] WONG C S. Approximation to fixed points of generalized nonexpansive mappings[J]. Proceedings of the American Mathematical Society,1976,54:93-97.
[10] SHIMI T N. Approximation of fixed points of certain nonlinear mappings[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications,1978,65(3):565-571.
[11] BOGIN J. A generalization of a fixed point theorem of Goebel,Kirk and Shimi[J]. Canadian Mathematical Bulletin,1976,19(1):7-12.
[12] BOSE R K,MUKHERJEE R N. Approximating fixed points of some mappings[J]. Proceedings of the American Mathematical Society,1981,82:603-606.
[13] ĆIRIĆ L B. On some discontinuous fixed point mappings in convex metric spaces[J]. Czechoslovak Mathematical Journal,1993,43(118):319-326.
[14] LI B Y. Fixed point theorems of nonexpansive mappings in convex metric spaces[J]. Applied Mathematics and Mechanics,1989,10(2):183-188.
[15] POPESCU O. Two generalizations of some fixed point theorems[J]. Computers & Mathematics with Applications,2011,62(10):3912-3919.
[16] ĆIRIĆ L B. A new class of nonexpansive type mappings and fixed points[J]. Czechoslovak Mathematical Journal,1999,49(4):891-899.
[17] AYDI H,BOTA M F,KARAPINAR E,et al. A fixed point theorem for set valued quasi-contractions in b-metric spaces[J]. Fixed Point Theory and Applications,2012,2021(1):88.
[18] KUMAN P,DUNG N V,HANG V T L. Some equivalences between cone b-metric spaces and b-metric spaces [J]. Abstract and Applied Analysis,2013,2013(1):8.
[19] COBZAS S. B-metric spaces,fixed points and Lipschitz functions[DB/OL]. ArXiv,2013(2018-04-17) [2024-08-02]. https://arxiv. org/pdf/1802. 02722v2.
[20] 刘萱,贺飞. 强 b-距离空间中的 Ekeland 变分原理[J]. 应用数学,2023,36(4):877-883.
[21] LU N,HE F,HUANG H P. Answers to questions on the generalized Banach contraction conjecture in b-metric spaces[J]. Journal of Fixed Point Theory and Applications,2019,21(2):43.

(责任编委 李 宏)

Generalized Bogin Fixed Point Theorems in b-Metric Spaces

AN Kaifeng,LIN Yufan,HE Fei
(*School of Mathematical Sciences*,*Inner Mongolia University*,*Hohhot* 010021,*China*)

Abstract:Strong b-metric spaces and b-metric spaces are more extensive space frames than metric spaces. Two types of Bogin fixed point theorems are established in strong b-metric spaces and b-metric spaces,respectively. These results are generalizations of Bogin fixed point theorem in metric spaces.

Key words:strong b-metric space; b-metric space; Bogin fixed point theorem