文章编号:1000－1638(2025)02-0131-06　　DOI:10.13484/j.nmgdxxbzk.20250203

矩阵{2}-逆的扰动刻画*

刘　江,海国君

(内蒙古大学数学科学学院,呼和浩特 010021)

摘要:通过奇异值分解的方法研究了{2}-逆在酉不变范数下的扰动界,并改进了已有的{2}-逆的扰动界。利用{2}-逆与 Moore-Penrose 逆的关系进一步推广了 Moore-Penrose 逆的已知扰动界。

关键词:奇异值分解;Moore-Penrose 逆;酉不变范数;扰动界

中图分类号:O151.21　　**文献标志码**:A

众所周知,广义逆最初是 Moore 在1920年用投影给出的,之后在1955年 Penrose 用四个矩阵方程重新定义了广义逆,并用于解决线性代数中的逆问题。此后,广义逆的理论及其各种应用和计算方法得到了迅速的发展。

广义逆的理论可以用于求解线性方程组中一般解与最小二乘解[1],也可以解决微分方程,最优化与回归分析等问题,尤其在数据拟合,信号处理等领域有着重要的应用。

广义逆矩阵在方程的求解及解的稳定性分析等问题上有着广泛应用,其中常见的广义逆有:Moore-Penrose 逆,加权 Moore-Penrose 逆,Drazin 逆,群逆,Bott-Duffin 逆和广义 Bott-Duffin 逆,它们都是矩阵的某种{2}-逆(或外逆)。{2}-逆在求解非线性方程组与统计学中有着重要的作用,特别是在不适定问题的稳定逼近以及有秩亏广义逆的线性和非线性问题中起着重要的作用,参见文献[2-8]。

近几年一些学者对于{2}-逆的扰动与扰动界进行了许多研究,文献[9]给出了{2}-逆在 Frobenius 范数下的扰动界;文献[10]给出了子空间 T,S 有扰动时{2}-逆在谱范数下的扰动界;文献[11]研究了在子空间 T,S 无扰动时{2}-逆在酉不变范数下的扰动界;文献[12]研究了在酉不变范数下子空间 T,S 有扰动与无扰动时{2}-逆的扰动界。受文献[12]的启发,本文通过奇异值分解与特征值旋转的方法给出了在酉不变范数下{2}-逆的扰动界,进一步优化文献[12]中已有的扰动界。

1　预备知识

在本文中,$\mathbb{C}^{m\times n}$ 表示 $m\times n$ 阶复数矩阵,若 $m=n$,则 n 阶恒等矩阵与零矩阵分别表示为 I_n 与 O。对于 $A\in\mathbb{C}^{m\times n}$,$A^*$ 为 A 的共轭转置矩阵,$\|\cdot\|$ 为酉不变范数,$\|\cdot\|_2$ 为谱范数,$R(A)$,$N(A)$ 分别为 A 的值域与零空间,$\mathrm{rank}(A)$ 表示矩阵 A 的秩,$S^\perp$ 表示子空间 S 的正交补,P_M 表示沿子空间 M 上的正交投影算子。Moore-Penrose 逆 $A^\dagger\in\mathbb{C}^{n\times m}$ 为满足下列四个等式的唯一解:

* **收稿日期**:2024-07-01;**修回日期**:2024-12-07

基金项目:国家自然科学基金项目(11761052);内蒙古自然科学基金项目(2020ZD01)

作者简介:刘　江(1999－),女,内蒙古乌兰察布人,2022级硕士研究生。E-mail:3598227376@qq.com

通信作者:海国君(1983－),男(蒙古族),内蒙古通辽人,教授,博士。主要从事算子理论研究。E-mail:haigj@imu.edu.cn

$$AA^{\dagger}A=A,A^{\dagger}AA^{\dagger}=A^{\dagger},(AA^{\dagger})^{*}=AA^{\dagger},(A^{\dagger}A)^{*}=A^{\dagger}A。$$

奇异值分解:设 $A\in\mathbb{C}^{m\times n}$,$\mathrm{rank}(A)=r$。则矩阵 A 的奇异值分解如下

$$A=U\begin{pmatrix}\Sigma_r & O\\ O & O\end{pmatrix}V^{*},$$

其中 $U=(U_1,U_2)$,$V=(V_1,V_2)$ 为酉矩阵,$\Sigma_r=\mathrm{diag}(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,\cdots,\sigma_r)$ 为非奇异矩阵,$\sigma_1\geqslant\sigma_2\geqslant\sigma_3\geqslant\cdots\geqslant\sigma_r>0$ 是矩阵 A 的非零奇异值。矩阵 A 在此分解形式下,其 Moore-Penrose 逆 $A^{\dagger}$ 有如下形式

$$A^{\dagger}=V\begin{pmatrix}\Sigma_r^{-1} & O\\ O & O\end{pmatrix}U^{*}。$$

下面给出本文用到的定义与引理。

定义 1[13] 设 $A\in\mathbb{C}^{m\times n}$,$\mathrm{rank}(A)=r$,$T$ 为 $\mathbb{C}^{n}$ 的 s 维子空间($s\leqslant r$),S 为 $\mathbb{C}^{m}$ 的 $m-s$ 维子空间。如果 $X\in\mathbb{C}^{n\times m}$,$\mathrm{rank}(X)=r$ 满足 $XAX=X$,则称矩阵 X 为 A 的{2}-逆。当{2}-逆 X 满足 $R(X)=T$,$N(X)=S$ 时,记 $X=A_{T,S}^{(2)}$。

引理 1[14] 设 $A,B,E\in\mathbb{C}^{m\times n}$ 且 $B=A+E$,T 为 $\mathbb{C}^{n}$ 的子空间,S 为 $\mathbb{C}^{m}$ 的子空间。若 $A_{T,S}^{(2)}$ 存在,则 $B_{T,S}^{(2)}$ 存在且 $I_n+A_{T,S}^{(2)}E$ 与 $I_m+EA_{T,S}^{(2)}$ 均可逆。此时,

$$B_{T,S}^{(2)}=(I_n+A_{T,S}^{(2)}E)^{-1}A_{T,S}^{(2)}=A_{T,S}^{(2)}(I_m+EA_{T,S}^{(2)})^{-1}。$$

引理 2[15] 设 $A\in\mathbb{C}^{m\times n}$,$\mathrm{rank}(A)=r$,$T$ 为 $\mathbb{C}^{n}$ 的子空间,S 为 $\mathbb{C}^{m}$ 的子空间且 $\dim T=s(s\leqslant r)$,$\dim S=m-s$。则矩阵 A 存在{2}-逆 X,使得 $R(X)=T$,$N(X)=S$ 成立当且仅当 $AT\oplus S=\mathbb{C}^{m}$。此时 X 是唯一的且 $X=A_{T,S}^{(2)}=(P_{S^{\perp}}AP_T)^{\dagger}$。

引理 3[16] 设 $U\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 为酉矩阵且有如下分块形式

$$U=\begin{pmatrix}U_{11} & U_{12}\\ U_{21} & U_{22}\end{pmatrix},$$

其中 $U_{11}\in\mathbb{C}^{r\times r}$,$U_{22}\in\mathbb{C}^{(n-r)\times(n-r)}$,$1\leqslant r<n$。对于任意酉不变范数均有 $\|U_{12}\|=\|U_{21}\|$。

引理 4[17] 设 $A\in\mathbb{C}^{m\times n}$ 有如下分块形式

$$A=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix},$$

则 $\|A\|\geqslant\left\|\begin{pmatrix}O & A_{12}\\ A_{21} & O\end{pmatrix}\right\|$对于任意的酉不变范数均成立。

引理 5[18] 设 $D_1\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 和 $D_2\in\mathbb{C}^{m\times m}$ 为 Hermitian 矩阵,$P\in\mathbb{C}^{n\times m}$ 且 $m,n\in\mathbb{N}$。令

$$\Delta=[\alpha,\beta]\subset\mathbb{R},\Delta'\subset\mathbb{R}\backslash[\alpha-\eta,\beta+\eta],\eta>0。$$

如果 $\lambda(D_1)\subset\Delta$,$\lambda(D_2)\subset\Delta'$,则方程 $D_1X-XD_2=P$ 有唯一解 X,其中 $\lambda(D_1)$,$\lambda(D_2)$ 分别为 D_1,D_2 的特征值。此外,$\|X\|\leqslant\dfrac{\|P\|}{\eta}$ 对于任意酉不变范数成立。

2 主要结论及其证明

本文主要讨论在酉不变范数下广义逆 $A_{T,S}^{(2)}$ 的扰动界。

定理 1 设 $A,E\in\mathbb{C}^{m\times n}$,$T$ 为 $\mathbb{C}^{n}$ 的子空间,S 为 $\mathbb{C}^{m}$ 的子空间。令 $B=A+E\in\mathbb{C}^{m\times n}$。如果 $A_{T,S}^{(2)}$ 与 $B_{T,S}^{(2)}$ 均存在,那么

$$\|B_{T,S}^{(2)}-A_{T,S}^{(2)}\|\leqslant\left[\|A_{T,S}^{(2)}\|_2\|B_{T,S}^{(2)}\|_2+\frac{\tilde{\sigma}_r\sigma_r\max\{\tilde{\sigma}_r,\sigma_r\}+\sigma_r^3+\tilde{\sigma}_r^3}{(\sigma_r^2+\tilde{\sigma}_r^2)\tilde{\sigma}_r\sigma_r\max\{\tilde{\sigma}_r,\sigma_r\}}\right]\|P_{S^{\perp}}EP_T\|。$$

证明 由引理 1 知

$$B_{T,S}^{(2)}=(I_n+A_{T,S}^{(2)}E)^{-1}A_{T,S}^{(2)}=A_{T,S}^{(2)}(I_m+EA_{T,S}^{(2)})^{-1},$$

则 $\mathrm{rank}(B_{T,S}^{(2)})=\mathrm{rank}(A_{T,S}^{(2)})$。设 $\mathrm{rank}(B_{T,S}^{(2)})=\mathrm{rank}(A_{T,S}^{(2)})=r$ 。再由引理 2 知

$$A_{T,S}^{(2)}=(P_{S^{\perp}}AP_T)^{\dagger}:=A_1^{\dagger},B_{T,S}^{(2)}=(P_{S^{\perp}}BP_T)^{\dagger}:=B_1^{\dagger}。$$

设 $A_1,B_1,A_1^{\dagger},B_1^{\dagger}$ 的奇异值分解形式如下

$$\begin{cases} A_1=U\begin{pmatrix}\Sigma_r & O\\ O & O\end{pmatrix}V^*=U_1\Sigma_rV_1^* \\ B_1=\widetilde{U}\begin{pmatrix}\widetilde{\Sigma}_r & O\\ O & O\end{pmatrix}\widetilde{V}^*=\widetilde{U}_1\widetilde{\Sigma}_r\widetilde{V}_1^* \\ A_1^{\dagger}=V\begin{pmatrix}\Sigma_r^{-1} & O\\ O & O\end{pmatrix}U^*=V_1\Sigma_r^{-1}U_1^* \\ B_1^{\dagger}=\widetilde{V}\begin{pmatrix}\widetilde{\Sigma}_r^{-1} & O\\ O & O\end{pmatrix}\widetilde{U}^*=\widetilde{V}_1\widetilde{\Sigma}_r^{-1}\widetilde{U}_1^* \end{cases} \tag{1}$$

其中 $\Sigma_r=\mathrm{diag}(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_r)\in\mathbb{C}^{r\times r}$ 为非奇异矩阵，$\sigma_1\geqslant\sigma_2\geqslant\cdots\geqslant\sigma_r>0$ 为 A_1 的非零奇异值，$\widetilde{\Sigma}_r=\mathrm{diag}(\tilde{\sigma}_1,\tilde{\sigma}_2,\cdots,\tilde{\sigma}_r)\in\mathbb{C}^{r\times r}$ 为非奇异矩阵，$\tilde{\sigma}_1\geqslant\tilde{\sigma}_2\geqslant\cdots\geqslant\tilde{\sigma}_r>0$ 为 B_1 的非零奇异值，$U=(U_1,U_2)$，$\widetilde{U}=(\widetilde{U}_1,\widetilde{U}_2)\in\mathbb{C}^{m\times m}$，$V=(V_1,V_2)$，$\widetilde{V}=(\widetilde{V}_1,\widetilde{V}_2)\in\mathbb{C}^{n\times n}$，满足 $U^*U=I_m$，$\widetilde{U}^*\widetilde{U}=I_m$，$V^*V=I_n$，$\widetilde{V}^*\widetilde{V}=I_n$。令

$$\omega=B_1-A_1=\widetilde{U}_1\widetilde{\Sigma}_r\widetilde{V}_1^*-U_1\Sigma_rV_1^* \tag{2}$$

则

$$\widetilde{U}_1^*\omega V_1=\widetilde{\Sigma}_r\widetilde{V}_1^*V_1-\widetilde{U}_1^*U_1\Sigma_r \tag{3}$$

公式(3)左乘 $\widetilde{\Sigma}_r^{-1}$，右乘 Σ_r^{-1} 得

$$\widetilde{\Sigma}_r^{-1}\widetilde{U}_1^*\omega V_1\Sigma_r^{-1}=\widetilde{V}_1^*V_1\Sigma_r^{-1}-\widetilde{\Sigma}_r^{-1}\widetilde{U}_1^*U_1,$$

从而

$$\|\widetilde{\Sigma}_r^{-1}\widetilde{U}_1^*U_1-\widetilde{V}_1^*V_1\Sigma_r^{-1}\|=\|-\widetilde{\Sigma}_r^{-1}\widetilde{U}_1^*\omega V_1\Sigma_r^{-1}\|\leqslant\frac{\|\omega\|}{\tilde{\sigma}_r\sigma_r} \tag{4}$$

由公式(2)与公式(3)得

$$U_2^*\widetilde{U}_1\widetilde{\Sigma}_r=U_2^*\omega\widetilde{V}_1 \tag{5}$$

$$\Sigma_rU_1^*\widetilde{U}_2=(-\widetilde{U}_2^*\omega V_1)^*,$$

$$\Sigma_rV_1^*\widetilde{V}_2=-U_1^*\omega\widetilde{V}_2 \tag{6}$$

$$V_2^*\widetilde{V}_1\widetilde{\Sigma}_r=(\widetilde{U}_1^*\omega V_2)^*,$$

从而

$$\|\widetilde{U}_1^*U_2\|\leqslant\frac{1}{\tilde{\sigma}_r}\|\omega\|,\|\widetilde{U}_2^*U_1\|\leqslant\frac{1}{\sigma_r}\|\omega\|,\|\widetilde{V}_1^*V_2\|\leqslant\frac{1}{\tilde{\sigma}_r}\|\omega\|,\|\widetilde{V}_2^*V_1\|\leqslant\frac{1}{\sigma_r}\|\omega\|。$$

通过引理 3 得

$$\|\widetilde{U}_1^*U_2\|=\|\widetilde{U}_2^*U_1\|\leqslant\frac{1}{\max\{\tilde{\sigma}_r,\sigma_r\}}\|\omega\|,\|\widetilde{V}_2^*V_1\|=\|\widetilde{V}_1^*V_2\|\leqslant\frac{1}{\max\{\tilde{\sigma}_r,\sigma_r\}}\|\omega\| \tag{7}$$

记

$$D_1=\begin{pmatrix}\widetilde{\Sigma}_r^2 & O\\ O & \tilde{\sigma}_r^2I_{n-r}\end{pmatrix},\quad D_2=\begin{pmatrix}\Sigma_r^2 & O\\ O & \sigma_r^2I_{m-r}\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix}O & \widetilde{\Sigma}_r^{-1}\widetilde{U}_1^*U_2\\ -\widetilde{V}_2^*V_1\Sigma_r^{-1} & O\end{pmatrix}$$

则

$$P=D_1X+XD_2=\begin{pmatrix}O & \widetilde{\Sigma}_r\widetilde{U}_1^*U_2\\ -\tilde{\sigma}_r^2\widetilde{V}_2^*V_1\Sigma_r^{-1} & O\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}O & \widetilde{\Sigma}_r^{-1}\widetilde{U}_1^*U_2\sigma_r^2\\ -\widetilde{V}_2^*V_1\Sigma_r & O\end{pmatrix}。$$

由引理 4，公式(5)，公式(6)和公式(7)知

$$\left\|\begin{pmatrix} O & \widetilde{\Sigma}_r\widetilde{U}_1^*U_2 \\ -\widetilde{V}_2^*V_1\Sigma_r & O \end{pmatrix}\right\| = \left\|\begin{pmatrix} O & (U_2^*\omega\widetilde{V}_1)^* \\ (U_1^*\omega\widetilde{V}_2)^* & O \end{pmatrix}\right\| \leqslant \left\|\begin{pmatrix} \widetilde{V}_1^* \\ \widetilde{V}_2^* \end{pmatrix}\omega^*(U_1 \quad U_2)\right\| = \|\omega\|,$$

$$\|-\tilde{\sigma}_r^2\widetilde{V}_2^*V_1\Sigma_r^{-1}\| \leqslant \frac{\tilde{\sigma}_r^2}{\sigma_r\max\{\tilde{\sigma}_r,\sigma_r\}}\|\omega\|, \|\widetilde{\Sigma}_r^{-1}\widetilde{U}_1^*U_2\sigma_r^2\| \leqslant \frac{\sigma_r^2}{\tilde{\sigma}_r\max\{\tilde{\sigma}_r,\sigma_r\}}\|\omega\|,$$

从而

$$\begin{aligned} \|P\| &= \|D_1X + XD_2\| \\ &= \left\|\begin{pmatrix} O & \widetilde{\Sigma}_r\widetilde{U}_1^*U_2 \\ -\tilde{\sigma}_r^2\widetilde{V}_2^*V_1\Sigma_r^{-1} & O \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} O & \widetilde{\Sigma}_r^{-1}\widetilde{U}_1^*U_2\sigma_r^2 \\ -\widetilde{V}_2^*V_1\Sigma_r & O \end{pmatrix}\right\| \\ &\leqslant \left\|\begin{pmatrix} O & \widetilde{\Sigma}_r^{-1}\widetilde{U}_1^*U_2\sigma_r^2 \\ -\tilde{\sigma}_r^2\widetilde{V}_2^*V_1\Sigma_r^{-1} & O \end{pmatrix}\right\| + \left\|\begin{pmatrix} O & \widetilde{\Sigma}_r\widetilde{U}_1^*U_2 \\ -\widetilde{V}_2^*V_1\Sigma_r & O \end{pmatrix}\right\| \\ &\leqslant \|-\tilde{\sigma}_r^2\widetilde{V}_2^*V_1\Sigma_r^{-1}\| + \|\widetilde{\Sigma}_r^{-1}\widetilde{U}_1^*U_2\sigma_r^2\| + \left\|\begin{pmatrix} O & \widetilde{\Sigma}_r\widetilde{U}_1^*U_2 \\ -\widetilde{V}_2^*V_1\Sigma_r & O \end{pmatrix}\right\| \\ &\leqslant \frac{\tilde{\sigma}_r^2}{\sigma_r\max\{\tilde{\sigma}_r,\sigma_r\}}\|\omega\| + \frac{\sigma_r^2}{\tilde{\sigma}_r\max\{\tilde{\sigma}_r,\sigma_r\}}\|\omega\| + \|\omega\| \\ &= \left(\frac{\tilde{\sigma}_r^2}{\sigma_r\max\{\tilde{\sigma}_r,\sigma_r\}} + \frac{\sigma_r^2}{\tilde{\sigma}_r\max\{\tilde{\sigma}_r,\sigma_r\}} + 1\right)\|\omega\|。\end{aligned}$$

由引理 5 知方程 $P = D_1X + XD_2$ 的唯一解 X 满足 $\|X\| \leqslant \frac{\|P\|}{\eta}$,其中 $\eta > \tilde{\sigma}_r^2 + \sigma_r^2$ 。所以

$$\|X\| \leqslant \frac{\|P\|}{\eta} \leqslant \frac{1}{\tilde{\sigma}_r^2 + \sigma_r^2}\left(\frac{\tilde{\sigma}_r^2}{\sigma_r\max\{\tilde{\sigma}_r,\sigma_r\}} + \frac{\sigma_r^2}{\tilde{\sigma}_r\max\{\tilde{\sigma}_r,\sigma_r\}} + 1\right)\|\omega\| \tag{8}$$

通过公式(1),公式(4)和公式(8)得

$$\begin{aligned} \|B_{T,S}^{(2)} - A_{T,S}^{(2)}\| &= \|B_1^\dagger - A_1^\dagger\| = \|\widetilde{V}_1\widetilde{\Sigma}_r^{-1}\widetilde{U}_1^* - V_1\Sigma_r^{-1}U_1^*\| \\ &= \left\|\begin{pmatrix} \widetilde{V}_1^* \\ \widetilde{V}_2^* \end{pmatrix}(\widetilde{V}_1\widetilde{\Sigma}_r^{-1}\widetilde{U}_1^* - V_1\Sigma_r^{-1}U_1^*)(U_1 \quad U_2)\right\| \\ &= \left\|\begin{pmatrix} \widetilde{\Sigma}_r^{-1}\widetilde{U}_1^*U_1 - \widetilde{V}_1^*V_1\Sigma_r^{-1} & \widetilde{\Sigma}_r^{-1}\widetilde{U}_1^*U_2 \\ -\widetilde{V}_2^*V_1\Sigma_r^{-1} & O \end{pmatrix}\right\| \\ &= \left\|\begin{pmatrix} \widetilde{\Sigma}_r^{-1}\widetilde{U}_1^*U_1 - \widetilde{V}_1^*V_1\Sigma_r^{-1} & O \\ O & O \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} O & \widetilde{\Sigma}_r^{-1}\widetilde{U}_1^*U_2 \\ -\widetilde{V}_2^*V_1\Sigma_r^{-1} & O \end{pmatrix}\right\| \\ &\leqslant \|\widetilde{\Sigma}_r^{-1}\widetilde{U}_1^*U_1 - \widetilde{V}_1^*V_1\Sigma_r^{-1}\| + \|X\| \\ &\leqslant \left[\frac{1}{\tilde{\sigma}_r\sigma_r} + \frac{1}{\tilde{\sigma}_r^2 + \sigma_r^2}\left(\frac{\tilde{\sigma}_r^2}{\sigma_r\max\{\tilde{\sigma}_r,\sigma_r\}} + \frac{\sigma_r^2}{\tilde{\sigma}_r\max\{\tilde{\sigma}_r,\sigma_r\}} + 1\right)\right]\|\omega\|,\end{aligned}$$

其中

$$\|A_{T,S}^{(2)}\|_2 = \|A_1^\dagger\|_2 = \frac{1}{\sigma_r}, \|B_{T,S}^{(2)}\|_2 = \|B_1^\dagger\|_2 = \frac{1}{\tilde{\sigma}_r},$$

$$\omega = B_1 - A_1 = P_{S^\perp}BP_T - P_{S^\perp}AP_T = P_{S^\perp}EP_T。$$

故

$$\|B_{T,S}^{(2)} - A_{T,S}^{(2)}\| \leqslant \left[\|A_{T,S}^{(2)}\|_2\|B_{T,S}^{(2)}\|_2 + \frac{\tilde{\sigma}_r\sigma_r\max\{\tilde{\sigma}_r,\sigma_r\} + \sigma_r^3 + \tilde{\sigma}_r^3}{(\sigma_r^2 + \tilde{\sigma}_r^2)\tilde{\sigma}_r\sigma_r\max\{\tilde{\sigma}_r,\sigma_r\}}\right]\|P_{S^\perp}EP_T\|。$$

结论证毕。

推论 1[19] 设 $A,E \in \mathbb{C}^{m\times n}$,$T = R(A^*)$,$S = N(A^*)$。令 $B = A + E \in \mathbb{C}^{m\times n}$。则

$$\|B^\dagger - A^\dagger\| \leqslant \left[\|A^\dagger\|_2\|B^\dagger\|_2 + \frac{\tilde{\sigma}_r\sigma_r\max\{\tilde{\sigma}_r,\sigma_r\} + \sigma_r^3 + \tilde{\sigma}_r^3}{(\sigma_r^2 + \tilde{\sigma}_r^2)\tilde{\sigma}_r\sigma_r\max\{\tilde{\sigma}_r,\sigma_r\}}\right]\|E\|。$$

证明 当 $T = R(A^*)$ 与 $S = N(A^*)$ 时,由引理 2 知 $A_{T,S}^{(2)} = A^\dagger$ 与 $B_{T,S}^{(2)} = B^\dagger$ 均存在。再结合引理

1 知

$$B^{\dagger}=(I_n+A^{\dagger}E)^{-1}A^{\dagger}=A^{\dagger}(I_m+EA^{\dagger})^{-1},$$

则 $BB^{\dagger}=AA^{\dagger}, B^{\dagger}B=A^{\dagger}A$。故

$$P_{S^{\perp}}EP_T=P_{S^{\perp}}BP_T-P_{S^{\perp}}AP_T=BB^{\dagger}BB^{\dagger}B-AA^{\dagger}AA^{\dagger}A=B-A=E。$$

利用定理 1 知

$$\|B^{\dagger}-A^{\dagger}\|\leqslant\left[\|A^{\dagger}\|_2\|B^{\dagger}\|_2+\frac{\tilde{\sigma}_r\sigma_r\max\{\tilde{\sigma}_r,\sigma_r\}+\sigma_r^3+\tilde{\sigma}_r^3}{(\sigma_r^2+\tilde{\sigma}_r^2)\tilde{\sigma}_r\sigma_r\max\{\tilde{\sigma}_r,\sigma_r\}}\right]\|E\|。$$

结论证毕。

注　定理 1 的界小于文献[12]中定理 2 的界，下面给出原因与具体例子。

文献[12]中定理 2 指出

$$\|B_{T,S}^{(2)}-A_{T,S}^{(2)}\|\leqslant\left[\|A_{T,S}^{(2)}\|_2\|B_{T,S}^{(2)}\|_2+\left(\frac{1}{\sigma_r}+\frac{1}{\tilde{\sigma}_r}\right)\frac{1}{\max\{\tilde{\sigma}_r,\sigma_r\}}\right]\|P_{S^{\perp}}EP_T\|。$$

因为

$$\frac{\tilde{\sigma}_r\sigma_r\max\{\tilde{\sigma}_r,\sigma_r\}+\sigma_r^3+\tilde{\sigma}_r^3}{(\sigma_r^2+\tilde{\sigma}_r^2)\tilde{\sigma}_r\sigma_r\max\{\tilde{\sigma}_r,\sigma_r\}}-\left(\frac{1}{\sigma_r}+\frac{1}{\tilde{\sigma}_r}\right)\frac{1}{\max\{\tilde{\sigma}_r,\sigma_r\}}=\frac{\tilde{\sigma}_r\sigma_r[\max\{\tilde{\sigma}_r,\sigma_r\}-(\sigma_r+\tilde{\sigma}_r)]}{(\sigma_r^2+\tilde{\sigma}_r^2)\tilde{\sigma}_r\sigma_r\max\{\tilde{\sigma}_r,\sigma_r\}}<0,$$

所以

$$\begin{aligned}&\left[\|A_{T,S}^{(2)}\|_2\|B_{T,S}^{(2)}\|_2+\frac{\tilde{\sigma}_r\sigma_r\max\{\tilde{\sigma}_r,\sigma_r\}+\sigma_r^3+\tilde{\sigma}_r^3}{(\sigma_r^2+\tilde{\sigma}_r^2)\tilde{\sigma}_r\sigma_r\max\{\tilde{\sigma}_r,\sigma_r\}}\right]\|P_{S^{\perp}}EP_T\|\\&<\left[\|A_{T,S}^{(2)}\|_2\|B_{T,S}^{(2)}\|_2+\left(\frac{1}{\sigma_r}+\frac{1}{\tilde{\sigma}_r}\right)\frac{1}{\max\{\tilde{\sigma}_r,\sigma_r\}}\right]\|P_{S^{\perp}}EP_T\|。\end{aligned}$$

这表明本文定理 1 的扰动界小于文献[12]中定理 2 的扰动界。

例　设 $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\\1&1\end{pmatrix}, E=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\\0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}, S=R\left[\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right], T=R\left[\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\right]$。通过计算可以得到

$$P_T=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}, P_{S^{\perp}}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}, A_{T,S}^{(2)}=(P_{S^{\perp}}AP_T)^{\dagger}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&0&1\end{pmatrix},$$

$$B_{T,S}^{(2)}=(P_{S^{\perp}}BP_T)^{\dagger}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-\frac{2}{3}&0&\frac{2}{3}\end{pmatrix}, P_{S^{\perp}}EP_T=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\\0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}。$$

则

$$\|A_{T,S}^{(2)}\|_2=\frac{1}{\sigma_r}=\frac{1}{\sqrt{3}}, \|B_{T,S}^{(2)}\|_2=\frac{1}{\tilde{\sigma}_r}=\frac{\sqrt{17}}{3}, \|P_{S^{\perp}}EP_T\|=\frac{1}{2}。$$

由定理 1 知

$$\|B_{T,S}^{(2)}-A_{T,S}^{(2)}\|\leqslant\left[\frac{1}{\tilde{\sigma}_r\sigma_r}+\frac{\tilde{\sigma}_r\sigma_r\max\{\tilde{\sigma}_r,\sigma_r\}+\sigma_r^3+\tilde{\sigma}_r^3}{(\sigma_r^2+\tilde{\sigma}_r^2)\tilde{\sigma}_r\sigma_r\max\{\tilde{\sigma}_r,\sigma_r\}}\right]\|P_{S^{\perp}}EP_T\|\approx 0.900637。$$

但是文献[12]中定理 2 推出

$$\|B_{T,S}^{(2)}-A_{T,S}^{(2)}\|\leqslant\left[\frac{1}{\tilde{\sigma}_r\sigma_r}+\left(\frac{1}{\sigma_r}+\frac{1}{\tilde{\sigma}_r}\right)\frac{1}{\max\{\tilde{\sigma}_r,\sigma_r\}}\right]\|P_{S^{\perp}}EP_T\|\approx 0.960135。$$

参考文献：

[1]　赵光前.第一类 Fredholm 积分方程的最佳逼近解[J].内蒙古大学学报(自然科学版),1981,12(1):1-8.

[2] BEN I A,GREVILLE T N E. Generalized inverses:Theory and applications[M]. New York:Wiley,1974.
[3] NASHED M Z,CHEN X. Convergence of newton-like methods for singular operator equations using outer inverses[J]. Numerische Mathematik,1993,66(1):235-257.
[4] GETSON A J,HSUAN F C. {2}-Inverses and their statistical applications[M]. New York:Springer,2012.
[5] HUSEN F,LANGENBERG P,GETSON A T. The {2}-inverse with applications in satistics[J]. Linear Algebra and Its Applications,1985,70:241-248.
[6] MITRA S K,HARTWIG R E. Partial orders based on outer inverse[J]. Linear Algebra and Its Applications,1992,176:3-20.
[7] NASHED M Z. Generalized inverses and applications[M]. New York:Academic Press,1976.
[8] WEDIN P Å. Perturbation results and condition numbers for outer inverses and especially for projections[Z]. Umea,Sweden:Institute of Information Processing,University of Umea,1985.
[9] LIU X J,QIN Y H,YU Y M. Perturbation bounds for the generalized inverse $A_{T,S}^{(2)}$ with respect to the Frobenius norm[J]. Applied Mathematics and Computation,2011,218(8):4595-4604.
[10] ZHANG N M,WEI Y M. Perturbation bounds for the generalized inverses $A_{T,S}^{(2)}$ with application to constrained linear system[J]. Applied Mathematics and Computation,2003,142(1):63-78.
[11] WEI Y M,WU H B. On the perturbation and subproper splittings for the generalized inverse $A_{T,S}^{(2)}$ of rectangular matrix $\boldsymbol{A}$[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics,2001,137(2):317-329.
[12] 杨晓英,朱清溢,刘新. 广义逆 $A_{T,S}^{(2)}$的扰动界[J]. 北华大学学报(自然科学版),2013,14(2):146-149.
[13] LIU G,LU S Q,CHEN J P,et al. A note on condition numbers for generalized inverse $A_{T,S}^{(2)}$ and constrained linear systems[J]. Applied Mathematics and Computation,2010,217(7):3199-3206.
[14] WEI Y M,WANG G R. Perturbation theory for the generalized inverse $A_{T,S}^{(2)}$[J]. Journal of Fudan University (Natural Science),2000,39(5):482-488.
[15] WANG G R,WEI Y M,QIAO S Z,et al. Generalized inverses:Theory and computations[M]. Singapore:Springer,2018:31-185.
[16] MENG L S,ZHENG B. The optimal perturbation bounds of the Moore-Penrose inverse under the Frobenius norm[J]. Linear Algebra and Its Applications,2010,432(4):956-963.
[17] SUN J G. Backward perturbation analysis of certain characteristic subspaces[J]. Numerische Mathematik,1993,65(1):357-382.
[18] DAVIS C,KAHAN W M. The rotation of eigenvectors by a perturbation[J]. SIAM Journal on Numerical Analysis,1970,7(1):1-46.
[19] MENG L S. New additive perturbation bounds of the Moore-Penrose inverse[J]. Linear and Multilinear Algebra,2022,70(6):1096-1101.

(责任编委 李 宏)

Characterization for Perturbations of the {2}-Inverse of Matrix

LIU Jiang,HAI Guojun

(*School of Mathematical Sciences*,*Inner Mongolia University*,*Hohhot* 010021,*China*)

Abstract:The perturbation bound of {2}-inverse under the unitary invariant norm is studied by the method of singular value decomposition,and the known perturbation bound of {2}-inverse is improved. Using the relationship between {2}-inverse and the Moore-Penrose inverse,the known perturbation bounds of the Moore-Penrose inverse are further generalized.

Key words: singular value decomposition; Moore-Penrose inverse; unitary invariant norm; perturbation bound