文章编号:1000-1638(2025)03-0225-09 DOI:10.13484/j.nmgdxxbzk.20250301

线性关系矩阵的 S-本质谱*

霍 冉[1,2],杜燕燕[3],黄俊杰[1],王晓丽[4]

(1.内蒙古大学数学科学学院,呼和浩特 010021;2.内蒙古农业大学理学院,呼和浩特 010018;
3.山东理工大学数学与统计学院,山东 淄博 255091;4.内蒙古财经大学统计与数学学院,呼和浩特 010070)

摘要:研究了单个线性关系是可闭线性关系的充分必要条件;并对 $\mathscr{L}_0=\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}$,其中 A,B,C,D 是相应 Hilbert 空间上的线性关系,利用 C 相对 A 的有界性与 B 相对 D 的有界性及 A,D 的可闭性,推出了 $\mathscr{L}_0$ 也是可闭线性关系;同时,对于有界线性算子 $S=\begin{pmatrix}S_1 & S_2\\ S_3 & S_4\end{pmatrix}$,得到当满足一定条件时 $\mathscr{L}_0-\mu S$ 的 Frobenius-Schur 分解公式,并得到了当 $\mathscr{L}_0$ 可闭时 $\overline{\mathscr{L}_0}$ 的表达式,最后研究了 $\overline{\mathscr{L}_0}$ 的 S-本质谱。

关键词:线性关系矩阵;Frobenius-Schur 分解;S-本质谱;扰动

中图分类号:O177.7 **文献标志码**:A

算子理论自建立以来就引起众多学者的关注,其中一个重要课题是对算子谱理论的研究。通过研究算子的谱,不但可以掌握算子本身的结构,而且可以了解系统的稳定性和能量变化等问题。正因如此,算子谱理论广泛应用于矩阵论、计算数学等数学学科以及量子力学、物理学、工程学等学科,例如,求微分方程特征值以及物理学和工程学中研究振动的频率、判断系统的稳定性等问题均涉及到谱的分布。随着对算子理论研究的深入,当研究线性算子的伴随算子时,往往要求算子是稠定的,否则其伴随算子就会是多值的,属于线性关系理论范畴。事实上,在不满足确定性的条件下,连续线性 Hamilton 系统生成的算子和一般的离散线性 Hamilton 系统生成的算子在相应的 Hilbert 空间中都可能是多值的或者是非稠定的。我们知道,算子矩阵是以 Banach 空间或 Hilbert 空间上的线性算子为内部元素构成的矩阵,它广泛地出现在数学及其应用的很多领域,例如,Hamilton 系统、偏微分方程、非线性分析、控制论等,以及数学物理问题中的流体力学、量子力学等。在理论研究上,算子矩阵也具有一定的研究价值,例如,若 Hilbert 空间 H 可分解为 $H=H_1\oplus H_2$,则算子 T 就可以被分解为 2×2分块算子矩阵

$$\begin{pmatrix}T_{11} & T_{12}\\ T_{21} & T_{22}\end{pmatrix},$$

* **收稿日期**:2024-01-14;**修回日期**:2024-05-17

基金项目:国家自然科学基金项目(11961052);内蒙古高等学校创新团队发展计划项目(NMGIRT2317);内蒙古自然科学基金项目(2021MS01006,2024LHMS01004);内蒙古直属高校基本科研业务费项目(NCYWT23022)

作者简介:霍 冉(1981-),男,内蒙古呼和浩特人,博士。主要从事线性算子理论研究。E-mail:huoran124@163.com

通信作者:黄俊杰(1977-),男,内蒙古呼和浩特人,教授,博士。主要从事线性算子理论研究。E-mail:huangjunjie@imu.edu.com

其中 T_{ij} 是 H_j 到 H_i 的算子,如果 H_1 是 T 的不变子空间,则 $T_{21}=0$,此时 T 被分解为一个上三角算子矩阵

$$\begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ 0 & T_{22} \end{pmatrix},$$

此时,研究 T 的性质就转化为研究较为简单的分块算子矩阵的性质。因此,算子矩阵不但在实际问题中具有广泛的应用,而且还在理论研究上具有重要的意义。而将线性算子矩阵的相应结果推广到线性关系矩阵上并不是简单的移植,一方面,在形式上要依据线性关系的多值部分作出改变;另一方面,对于处理多值部分而引出的复杂问题,需采用不同于算子的方法。本文主要研究 2×2 线性关系矩阵 $\mathscr{L}_0=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ 的可闭性,进而得到 $\overline{\mathscr{L}_0}$ 的 S-本质谱。

1 预备知识

本节将介绍所需的定义及相关引理。设 H,K 表示可分 Hilbert 空间,若 M 是 H 的一个子空间,其闭包和正交补分别记为 $\overline{M}$ 和 $M^{\perp}$。

定义 1[1] 若映射 $T:H\to K$ 将子集 $\mathscr{D}(T)=\{x\in H:Tx\neq\varnothing\}$ 映射到 K 的一个非空子集,且对任意非零常数 α_1,α_2 与 $x_1,x_2\in\mathscr{D}(T)$,满足 $T(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)=\alpha_1Tx_1+\alpha_2Tx_2$,则称 T 为从 H 到 K 的线性关系,$LR(H,K)$ 表示所有从 H 到 K 且定义域为全空间 H 的线性关系,并记 $LR(H)=LR(H,H)$。

注 1 设 $T\in LR(H,K)$,则对于任意 $x\in\mathscr{D}(T)$,都有 $y\in Tx\Leftrightarrow Tx=y+T(0)$。

定义 2[1] 线性关系 T 的图 $G(T)$ 定义为 $G(T)=\{(x,y)\in H\oplus K:u\in\mathscr{D}(T),y\in Tx\}$。若 $G(T)$ 是闭的,则称 T 为从 H 到 K 的闭线性关系,并记 $T\in CLR(H,K)$。线性关系 T 的闭包 $\overline{T}$ 定义为 $G(\overline{T})=\overline{G(T)}$。若 $\overline{T}$ 是线性关系 T 的扩张,即 $\mathscr{D}(T)\subset\mathscr{D}(\overline{T})$,且对任意 $x\in\mathscr{D}(T)$,有 $Tx=\overline{T}x$,则称 T 为可闭的线性关系,事实上,T 为可闭的线性关系 $\Leftrightarrow T(0)=\overline{T}(0)$。

定义 3[2] 设 E 为 H 的闭子集,记 Q_E^H 为 H 到 H/E 的自然商映射,对于 $T\in LR(H,K)$,用 Q_T 表示 $Q_{\overline{T(0)}}^K$,对任意 $x\in\mathscr{D}(T)$,定义 $\|Tx\|=\|Q_TTx\|$,T 的范数定义为 $\|T\|=\|Q_TT\|$。

注 2 (ⅰ) 上述线性关系的范数实际上是一个半范数,因为 $\|T\|=0$ 无法推出 $T=0$;

(ⅱ) 对 $y\in Tx$,有 $\frac{1}{2}\|y\|\leqslant\|Tx\|\leqslant\|y\|$。这是因为 $\|Tx\|=\mathrm{dist}(y,T(0))$ 对任意 $y\in Tx$ 都成立,所以 $\|Tx\|=\inf\limits_{z\in T(0)}\|y-z\|=\inf\limits_{y\in Tx}\|y\|\leqslant\|y\|$,因此,对任意 $\varepsilon>0$ 必有 $y\in Tx$ 使得 $\|y\|<\|Tx\|+\frac{\varepsilon}{2}$,即 $\|y\|\leqslant2\|Tx\|$。

定义 4[2] $S\in LR(H,Y)$ 称为 T-有界,若 $\mathscr{D}(S)\supset\mathscr{D}(T)$ 且存在 α,β 使得不等式 $\|Sx\|\leqslant\alpha\|x\|+\beta\|Tx\|$ 对所有 $x\in\mathscr{D}(T)$ 都成立,满足不等式的最小 β 称为 S 的 T-界。

记 $n(T)=\dim N(T)$,$d(T)=\mathrm{codim\,ran}(T)$,若 $n(T)$ 与 $d(T)$ 至少一个是有限时,记 $ind(T)=n(T)-d(T)$。

定义 5[1] 设 $T\in CLR(H,K)$,上半 Fedholm 关系与下半 Fedholm 关系分别定义为 $R\Phi_+(H,K)=\{T\in CLR(H,K):\mathrm{ran}(T)$ 闭,$n(T)<+\infty\}$,$R\Phi_-(H,K)=\{T\in CLR(H,K):\mathrm{ran}(T)$ 闭,$d(T)<+\infty\}$,若 $T\in R\Phi(H,K)=R\Phi_+(H,K)\cap R\Phi_-(H,K)$,则称 T 为 Fredholm 关系。

定义 6[3] 设 $T\in CLR(H,K)$,S 为 H 到 K 的有界线性算子,T 的 S-预解集定义为 $\rho_S(T)=$

$\{\lambda\in\mathbb{C}:(T-\lambda S)^{-1}$ 在全空间有界且是单值的$\}$，T 的 S-谱 $\sigma_S(T)$ 定义为 $\sigma_S(T)=\mathbb{C}\setminus\rho_S(T)$。

定义 7[3]　设 $T\in CLR(H,K)$，S 为从 H 到 K 的有界线性算子，T 的 S-本质预解集 $\rho_{S,e_i}(T)$ $(i=1,2,3,4,5)$ 分别定义为

$$\rho_{S,e_1}(T)=\{\lambda\in\mathbb{C}:T-\lambda S\in R\Phi_+(H,K)\},$$

$$\rho_{S,e_2}(T)=\{\lambda\in\mathbb{C}:T-\lambda S\in R\Phi_-(H,K)\},$$

$$\rho_{S,e_3}(T)=\{\lambda\in\mathbb{C}:T-\lambda S\in R\Phi_-(H,K)\cup R\Phi_+(H,K)\},$$

$$\rho_{S,e_4}(T)=\{\lambda\in\mathbb{C}:T-\lambda S\in R\Phi(H,K)\},$$

$$\rho_{S,e_5}(T)=\{\lambda\in\mathbb{C}:T-\lambda S\in R\Phi(H,K)\text{ 使得 } ind(T-\lambda S)=0\}。$$

T 的 S-本质谱 $\sigma_{S,e_i}(T)(i=1,2,3,4,5)$ 定义为 $\sigma_{S,e_i}(T)=\mathbb{C}\setminus\rho_{S,e_i}(T)$。

引理 1[3]　设 $T,S\in LR(H,K)$，有如下结论：

(ⅰ) 若 $\mathscr{D}(T)=\mathscr{D}(S)$ 且 $T(0)=S(0)$，则 $T=S$；

(ⅱ) $T^{-1}\in CLR(K,H)\Leftrightarrow T\in CLR(H,K)\Leftrightarrow Q_TT$ 是闭单值算子且 $T(0)$ 闭；

(ⅲ) 若 T 连续，且 $D(T)$ 与 $T(0)$ 都是闭的，则 $T\in CLR(H,K)$；

(ⅳ) T 可闭 $\Leftrightarrow T(0)=\overline{T}(0)\Leftrightarrow Q_TT$ 可闭且 $T(0)$ 闭，特别地，若 T 连续且 $T(0)$ 闭，则 $T\in CLR(H,K)$。

引理 2[3]　对于线性关系，有如下结论：

(ⅰ) 若 $T,S\in LR(H,K)$，$S(0)\subset T(0)$ 且 $\mathscr{D}(T)\subset\mathscr{D}(S)$，则 $Q_{T+S}=Q_T$，$T-S+S=T$ 且 $S\subset T-A$；

(ⅱ) 设 $T\in LR(H,K)$，$S\in CLR(K,H)$，若 $n(S)<\infty$ 且 $\operatorname{ran}(S)$ 闭，则 $ST\in CLR(H)$。

引理 3[3]　若 $T,S\in LR(H,K)$ 满足 $S(0)\subset T(0)$，$\overline{\mathscr{D}(T)}\subset\mathscr{D}(S)$，有如下结论：

(ⅰ) 若 $T\in CLR(H,K)$ 且 S 连续，则 $T+S\in CLR(H,K)$；

(ⅱ) 若 T 可闭，且 S 连续，则 $S+T$ 可闭，且 $\overline{S+T}=S+\overline{T}$。

引理 4[4]　设 X,Y,Z,W 为线性空间，$T\in BLR(X,Y)$ 为单值双射，$S\in LR(Y,Z)$，$R\in BLR(Z,W)$ 为双射且 $R(0)$ 闭，有如下结论：

(ⅰ) 若 S 可闭，则 RST 可闭且 $\overline{RST}=R\overline{S}T$；

(ⅱ) 若 R 是有界单值双射，则 S 可闭当且仅当 RST 可闭且 $\overline{RST}=R\overline{S}T$。

2　线性关系的可闭性

引理 5　设 X,Y 为线性空间，$T\in LR(X,Y)$ 是一个可闭的线性关系 $\Leftrightarrow$ 对任意 $\{x_n\}\subset\mathscr{D}(T)$ 满足 $x_n\to0,n\to\infty$，都有 $y_n\in Tx_n$ 满足 $y_n\to y_0,n\to\infty$，可推出 $y_0\in T(0)$。

证明　充分性。任取 $y_0\in\overline{T}(0)$，即 $(0,y_0)\in\overline{G(T)}$，则存在 $x_n\in\mathscr{D}(T)$，$y_n\in Tx_n$ 使得 $(x_n,y_n)\to(0,y_0)$，$n\to\infty$。这意味着当 $n\to\infty$ 时，$x_n\to0$ 且 $y_n\to y_0$，已知 $y_0\in T(0)$，因此 $T(0)=\overline{T}(0)$，即 T 可闭。

反之，假设对任意 $x_n\in\mathscr{D}(T)$ 及 $y_n\in Tx_n$，满足当 $n\to\infty$ 时，有 $x_n\to0$ 且 $y_n\to y_0$，即 $(x_n,y_n)\to(0,y_0)$，这说明 $(0,y_0)\in\overline{G(T)}=G(\overline{T})$，由 T 可闭，$y_0\in\overline{T}(0)=T(0)$。

引理 6　设 X,Y 为线性空间，$T,A\in LR(X,Y)$。若 $\|Ax\|\leqslant\alpha\|x\|+\beta\|Tx\|$ 且 $\beta<1$，对任意 $x\in\mathscr{D}(T)\subset\mathscr{D}(A)$ 都成立，则 $T+A$ 可闭 $\Leftrightarrow T$ 可闭。

证明　由 $S=T+A$ 可推得

$$-\frac{\alpha}{1+\beta}\|x\|+\frac{1}{1+\beta}\|Sx\|\leqslant\|Tx\|\leqslant\frac{\alpha}{1-\beta}\|x\|+\frac{1}{1-\beta}\|Sx\| \tag{1}$$

与

$$-\alpha\|x\|+(1-\beta)\|Tx\|\leqslant\|Sx\|\leqslant\alpha\|x\|+(1+\beta)\|Tx\| \tag{2}$$

首先,假设 T 可闭,下证 S 可闭。任取 $x_n\in\mathscr{D}(S)=\mathscr{D}(T)$ 及 $y_n\in Sx_n$,满足当 $n\to\infty$ 时,有 $x_n\to 0$ 且 $y_n\to y_0$,取 $u_n\in Tx_n$, 由(1)式及注 2(ⅱ),可得

$$\begin{aligned}\|u_n-u_m\|&\leqslant 2\|T(x_n-x_m)\|\leqslant 2\left(\frac{\alpha}{1-\beta}\|x_n-x_m\|+\frac{1}{1-\beta}\|S(x_n-x_m)\|\right)\\&\leqslant 2\left(\frac{\alpha}{1-\beta}\|x_n-x_m\|+\frac{1}{1-\beta}\|x_n-x_m\|\right)。\end{aligned}$$

这说明 $\{u_n\}$ 是一个 Cauchy 列,设 $n\to\infty$ 时,$u_n\to u_0$,由引理 5,$u_0\in T(0)$, 再由(2)式,可得

$$-\alpha\|x_n\|+(1-\beta)\|Tx_n\|\leqslant\|Sx_n\|\leqslant\alpha\|x_n\|+(1+\beta)\|Tx_n\|。$$

注意到 $\|Tx_n\|=\operatorname{dist}(u_n,T(0))$ 与 $\|Sx_n\|=\operatorname{dist}(y_n,S(0))$,则有 $y_0\in S(0)$,S 可闭。

反之,假设 S 可闭,类似上面的证明方法,同理可得 T 可闭。

定理 1 设 $A\in LR(H)$,$B\in LR(K,H)$,$C\in LR(H,K)$,$D\in LR(K)$, 满足

$$\|Cx\|\leqslant\alpha_1\|x\|+\beta_1\|Ax\|,\beta_1<1,\forall x\in\mathscr{D}(A)\subset\mathscr{D}(C)$$

与

$$\|By\|\leqslant\alpha_2\|y\|+\beta_2\|Dy\|,\beta_2<1,\forall y\in\mathscr{D}(D)\subset\mathscr{D}(B),$$

则线性关系矩阵 $A_0=\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}$ 可闭 $\Leftrightarrow A$ 与 D 是可闭的。

证明 令 $S=\begin{pmatrix}0 & B\\ C & 0\end{pmatrix}$,$T=\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & D\end{pmatrix}$,由引理 6,只需证明 S 相对于 T 的相对界 <1 即可。由 Cauchy 不等式,对任意 $r>0$, 有

$$\|Cx\|^2\leqslant\left(1+\frac{1}{r}\right)\alpha_1^2\|x\|^2+(1+r)\beta_1^2\|Ax\|^2,\forall x\in\mathscr{D}(A),$$

且

$$\|By\|\leqslant\left(1+\frac{1}{r}\right)\alpha_2^2\|y\|+(1+r)\beta_2^2\|Dy\|,\forall y\in\mathscr{D}(D),$$

则有

$$\left\|S\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\right\|^2\leqslant\left(1+\frac{1}{r}\right)\max(\alpha_1,\alpha_2)^2\left\|\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\right\|^2+(1+r)\max(\beta_1,\beta_2)^2\left\|T\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\right\|^2,$$

因此

$$\left\|S\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\right\|\leqslant\max(\alpha_1,\alpha_2)\sqrt{1+\frac{1}{r}}\left\|\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\right\|+\max(\beta_1,\beta_2)\sqrt{(1+r)}\left\|T\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\right\|。$$

注意到 $\max(\beta_1,\beta_2)<1$, 故存在 $\varepsilon>0$ 使得 $\max(\beta_1,\beta_2)<1-\varepsilon$, 由 r 的任意性, 取 $r=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(1-\varepsilon)^2}-1\right)$,则 $\max(\beta_1,\beta_2)\sqrt{(1+r)}<1$, 命题得证。

3 线性关系矩阵的 S-本质谱

设 H,K 为 Hilbert 空间,$H\oplus K$ 上的线性关系矩阵 $\mathscr{L}_0=\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}$,当 $\mathscr{L}_0$ 可闭时,主要考虑形如

$$\overline{\mathscr{L}_0}-\lambda S=\overline{\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}}-\lambda\begin{pmatrix}S_1 & S_2\\ S_3 & S_4\end{pmatrix}$$

的线性关系矩阵，研究 $\mathscr{L}_0$ 闭包算子的伪谱性质，其中 S 为定义在 $H\oplus K$ 上的有界线性算子。

类似文献[4]，给出如下设定：

(H_1) 线性关系 D 连续，$\mathscr{D}(D)$闭且 $\dim(D(0))<\infty$；

(H_2) 线性关系 B 可闭，对于 $\mu\in\rho_{S_4}(D)$，线性关系 $E(\mu)=(B-\mu S_2)(D-\mu S_4)^{-1}$有界；

(H_3) $\overline{\mathscr{D}(C)}=H$ 且对于 $\mu\in\rho_{S_4}(D)$，线性关系 $F(\mu)=(D-\mu S_4)^{-1}(C-\mu S_3)$可闭；

(H_4) A 为 H 上处处有定义的有界线性关系，对于 $\mu\in\rho_{S_4}(D)$，线性关系 $M(\mu)=A-(B-\mu S_2)(D-\mu S_4)^{-1}(C-\mu S_3)$，且 $A(0)\subset(B-\mu S_2)(D-\mu S_4)^{-1}(C-\mu S_3)(0)\subset B(0)$。

对于 $\mu\in\rho_{S_4}(D)$，有如下结论：

(ⅰ) 由假设(H_1)，引理 1(ⅲ)及引理 3(ⅰ)，可得 $D-\mu S_4$ 闭；

(ⅱ) 由闭图像定理$\overline{F(\mu)}$有界，从而定义域可连续地扩张到全空间上。

设 $F\in LR(H,K)$，给出如下记号：

(ⅰ) 对任意 $T\in R\Phi(H,K)$，若 $T+F\in R\Phi(H,K)$，则记 $F\in\mathscr{F}(H,K)$；

(ⅱ) 对任意 $T\in R\Phi_+(H,K)$(或 $T\in R\Phi_-(H,K)$)，若 $T+F\in R\Phi_+(H,K)$(或 $T+F\in R\Phi_-(H,K)$)，则记 $F\in\mathscr{F}_+(H,K)$(或 $\mathscr{F}_-(H,K)$)。

本节研究线性关系矩阵 S-本质谱，首先给出关于线性关系矩阵的 Frobenius-Schur 分解。

定理 2　设 $\mu\in\rho_{S_4}(D)$ 且(H_1)－(H_4)都成立，则 $\mathscr{L}_0-\mu S=UWV$，其中

$$U=\begin{pmatrix}I & E(\mu)\\ 0 & I\end{pmatrix},W=\begin{pmatrix}M(\mu)-\mu S_1 & 0\\ 0 & D-\mu S_4\end{pmatrix},V=\begin{pmatrix}I & 0\\ \overline{F(\mu)} & I\end{pmatrix},$$

$E(\mu)=(B-\mu S_2)(D-\mu S_4)^{-1}$，$F(\mu)=(D-\mu S_4)^{-1}(C-\mu S_3)$，$M(\mu)=A-(B-\mu S_2)(D-\mu S_4)^{-1}(C-\mu S_3)$。

证明　对任意

$$\left(\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}\right)\in G(UWV),$$

可得

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}\in(UWV)\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}I & E(\mu)\\ 0 & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}M(\mu)-\mu S_1 & 0\\ 0 & D-\mu S_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ \overline{F(\mu)}x_1+x_2\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}I & E(\mu)\\ 0 & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(M(\mu)-\mu S_1)x_1\\ (D-\mu S_4)\overline{F(\mu)}x_1+(D-\mu S_4)x_2\end{pmatrix},\end{aligned}$$

而$\overline{F(\mu)}x_1=\overline{(D-\mu S_4)^{-1}(C-\mu S_3)}x_1$，由 $x_1\in\mathscr{D}(C)$，可得$(D-\mu S_4)\overline{F(\mu)}x_1=(C-\mu S_3)x_1+(D-\mu S_4)(0)$，则有

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}&\in\begin{pmatrix}I & E(\mu)\\ 0 & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}M(\mu)-\mu S_1 & 0\\ 0 & D-\mu S_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I & 0\\ \overline{F(\mu)} & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}I & E(\mu)\\ 0 & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(M(\mu)-\mu S_1)x_1\\ (D-\mu S_4)x_2+(C-\mu S_3)x_1+(D-\mu S_4)(0)\end{pmatrix}\\ &\subset\begin{pmatrix}(M(\mu)-\mu S_1)x_1+E(\mu)((D-\mu S_4)x_2+(C-\mu S_3)x_1+(D-\mu S_4)(0))\\ (D-\mu S_4)x_2+(C-\mu S_3)x_1+(D-\mu S_4)(0)\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

因为 $D-\mu S_4$ 可逆,则有 $E(\mu)(D-\mu S_4)x_2=(B-\mu S_2)x_2$。又因为 $\mathscr{D}(M(\mu))\subset\mathscr{D}(A)=H$ 且 $A(0)\subset(B-\mu S_2)(D-\mu S_4)^{-1}(C-\mu S_3)(0)\subset M(\mu)(0)$,因此,由引理 2(ⅰ)可得 $M(\mu)=M(\mu)-A+A$,则有

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}&\in\begin{pmatrix}I&E(\mu)\\0&I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}M(\mu)-\mu S_1&0\\0&D-\mu S_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I&0\\\overline{F(\mu)}&I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}M(\mu)x_1-M(\mu)x_1+(A-\mu S_1)x_1+(B-\mu S_2)x_2\\(C-\mu S_3)x_1+Dx_2-\mu S_4x_2\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}(A-\mu S_1)x_1+M(\mu)(0)+(B-\mu S_2)x_2\\(C-\mu S_3)x_1+(D-\mu S_4)x_2\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}(A-\mu S_1)x_1+(B-\mu S_2)x_2\\(C-\mu S_3)x_1+(D-\mu S_4)x_2\end{pmatrix}=\left[\begin{pmatrix}A&B\\C&D\end{pmatrix}-\mu\begin{pmatrix}S_1&S_2\\S_3&S_4\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}。\end{aligned}$$

因此 $\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}\right)\in G(\mathscr{L}_0-\mu S)$,即 $UWV\subset(\mathscr{L}_0-\mu S)$。

另一方面,对任意 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\in\mathscr{D}(\mathscr{L}_0-\mu S)=(\mathscr{D}(A)\cap\mathscr{D}(C))\oplus(\mathscr{D}(D)\cap\mathscr{D}(B))$,则 $x_1\in\mathscr{D}(\overline{F(\mu)})$,进而 $x_2+\overline{F(\mu)}x_1\in\mathscr{D}(D)\cap\mathscr{D}(B)$,并且有 $x_1\in\mathscr{D}(M(\mu))$,因此 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2+\overline{F(\mu)}x_1\end{pmatrix}\in\mathscr{D}\left(\begin{pmatrix}M(\mu)-\mu S_1&0\\0&D-\mu S_4\end{pmatrix}\right)$。此时,$(D-\mu S_4)(x_2+\overline{F(\mu)}x_1)\in\mathscr{D}(E(\mu))$,则有 $\begin{pmatrix}(M(\mu)-\mu S_1)x_1\\(D-\mu S_4)(x_2+\overline{F(\mu)}x_1)\end{pmatrix}\in\mathscr{D}\begin{pmatrix}I&E(\mu)\\0&I\end{pmatrix}$。

由此可得,$\mathscr{D}(\mathscr{L}_0-\mu S)=\mathscr{D}(UWV)$,综上有 $\mathscr{L}_0-\mu S=UWV$。

在此基础上,给出关于 $\mathscr{L}_0$ 闭与可闭性研究。

定理 3 设 $\mu\in\rho_{S_4}(D)$ 且$(\mathrm{H}_1)-(\mathrm{H}_4)$都成立,$E(\mu)$,$F(\mu)$ 为单值算子,则有如下结论:

(ⅰ)$\mathscr{L}_0$ 闭 $\Leftrightarrow M(\mu)$ 闭;

(ⅱ)$\mathscr{L}_0$ 可闭 $\Leftrightarrow M(\mu)$ 可闭且有

$$\mathscr{L}=\overline{\mathscr{L}_0}=\mu S+\begin{pmatrix}I&E(\mu)\\0&I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\overline{M(\mu)}-\mu S_1&0\\0&D-\mu S_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I&0\\\overline{F(\mu)}&I\end{pmatrix}。$$

其中 $M(\mu)$,$E(\mu)$ 和 $F(\mu)$ 的定义见定理 2。

证明 (ⅰ)对任意 $\mu\in\rho_{S_4}(D)$,有

$$\mathscr{L}_0-\mu S=\begin{pmatrix}I&E(\mu)\\0&I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}M(\mu)-\mu S_1&0\\0&D-\mu S_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I&0\\\overline{F(\mu)}&I\end{pmatrix}。$$

由于 $\mathscr{L}_0$ 闭 $\Leftrightarrow\mathscr{L}_0-\mu S$ 闭,由引理 3,$\mathscr{L}_0-\mu S$ 闭 $\Leftrightarrow\begin{pmatrix}M(\mu)-\mu S_1&0\\0&D-\mu S_4\end{pmatrix}$ 闭,因为 $D-\mu S_4$ 闭,所以 $\begin{pmatrix}M(\mu)-\mu S_1&0\\0&D-\mu S_4\end{pmatrix}$ 闭 $\Leftrightarrow M(\mu)-\mu S_1$ 闭 $\Leftrightarrow M(\mu)$ 闭。

(ⅱ)注意到 $U=\begin{pmatrix}I&E(\mu)\\0&I\end{pmatrix}$,$V=\begin{pmatrix}I&0\\\overline{F(\mu)}&I\end{pmatrix}$,则 U,V 为可逆单值算子,由引理 3,$\mathscr{L}_0$ 可闭

$\Leftrightarrow M(\mu)$ 可闭，当 $M(\mu)$ 可闭时，由引理 2 可得 $M(\mu)-\mu S_1$ 可闭，因此 $W=\begin{pmatrix} M(\mu)-\mu S_1 & 0 \\ 0 & D-\mu S_4 \end{pmatrix}$可闭，进而 UWV 可闭且$\overline{UWV}=U\,\overline{W}V$，应用引理 2 与引理 3，$\overline{\mathscr{L}_0-\mu S}=\overline{\mathscr{L}_0}-\mu S=U\,\overline{W}V$，且有

$$\mathscr{L}=\overline{\mathscr{L}_0}=\mu S+\begin{pmatrix} I & E(\mu) \\ 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \overline{M(\mu)}-\mu S_1 & 0 \\ 0 & D-\mu S_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & 0 \\ \overline{F(\mu)} & I \end{pmatrix}。$$

定理 4　设 $\mu\in\rho_{S_4}(D)$ 且$(\mathrm{H}_1)-(\mathrm{H}_4)$都成立，$E(\mu)$，$F(\mu)$ 为单值算子，则对任意 $\lambda\in\mathbb{C}$，有

$$\mathscr{L}-\lambda S=UW_*V+(\lambda-\mu)I(\mu),$$

这里 $U=\begin{pmatrix} I & E(\mu) \\ 0 & I \end{pmatrix}$，$V=\begin{pmatrix} I & 0 \\ \overline{F(\mu)} & I \end{pmatrix}$，$W_*=\begin{pmatrix} \overline{M(\mu)}-\lambda S_1 & 0 \\ 0 & D-\lambda S_4 \end{pmatrix}$，

$I(\mu)=\begin{pmatrix} E(\mu)S_4\,\overline{F(\mu)} & E(\mu)S_4-S_2 \\ S_4\,\overline{F(\mu)}-S_3 & 0 \end{pmatrix}$，其中 $M(\mu)$，$E(\mu)$ 和 $F(\mu)$ 的定义见定理 2。

证明　因为 $\mathscr{L}-\lambda S=\mathscr{L}-\mu S+(\mu-\lambda)S$，则有

$$\mathscr{L}-\lambda S=\begin{pmatrix} I & E(\mu) \\ 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \overline{M(\mu)}-\mu S_1 & 0 \\ 0 & D-\mu S_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & 0 \\ \overline{F(\mu)} & I \end{pmatrix}+(\mu-\lambda)S$$

$$=\begin{pmatrix} I & E(\mu) \\ 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \overline{M(\mu)}-\mu S_1-\lambda S_1+\lambda S_1 & 0 \\ 0 & D-\mu S_4-\lambda S_4+\lambda S_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & 0 \\ \overline{F(\mu)} & I \end{pmatrix}+(\mu-\lambda)S$$

$$=\begin{pmatrix} I & E(\mu) \\ 0 & I \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} \overline{M(\mu)}-\lambda S_1 & 0 \\ 0 & D-\lambda S_4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} (\lambda-\mu)S_1 & 0 \\ 0 & (\lambda-\mu)S_4 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} I & 0 \\ \overline{F(\mu)} & I \end{pmatrix}+(\mu-\lambda)S。$$

注意到 $\mathscr{D}(U)=H\oplus K$ 且 V 为单值算子，由引理 1，可得

$$\mathscr{L}-\lambda S=UW_*V+\begin{pmatrix} I & E(\mu) \\ 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (\lambda-\mu)S_1 & 0 \\ 0 & (\lambda-\mu)S_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & 0 \\ \overline{F(\mu)} & I \end{pmatrix}+(\mu-\lambda)S,$$

这意味着

$$\mathscr{L}-\lambda S=UW_*V+(\lambda-\mu)\begin{pmatrix} I & E(\mu) \\ 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & 0 \\ \overline{F(\mu)} & I \end{pmatrix}+(\mu-\lambda)S$$

$$=UW_*V+(\lambda-\mu)\begin{pmatrix} S_1+E(\mu)S_4\,\overline{F(\mu)} & E(\mu)S_4 \\ S_4\,\overline{F(\mu)} & S_4 \end{pmatrix}+(\mu-\lambda)S。$$

因此

$$\mathscr{L}-\lambda S=UW_*V+(\lambda-\mu)\begin{pmatrix} E(\mu)S_4\,\overline{F(\mu)} & E(\mu)S_4-S_2 \\ S_4\,\overline{F(\mu)}-S_3 & 0 \end{pmatrix},$$

即 $\mathscr{L}-\lambda S=UW_*V-(\mu-\lambda)I(\mu)$。

定理 5　(ⅰ) 设 $S_3\in\mathscr{F}(H,K)$，若存在 $\mu\in\rho_{S_4}(D)$使得 $F(\mu)\in\mathscr{F}(H,K)$，则对任意 $\lambda\in\rho_{S_4}(D)$，有 $F(\lambda)\in\mathscr{F}(H,K)$，其中 $F(\mu)$的定义见定理 2。

(ⅱ) 设 $S_2\in\mathscr{F}(K,H)$，若存在 $\mu\in\rho_{S_4}(D)$使得 $E(\mu)\in\mathscr{F}(H,K)$，则对任意 $\lambda\in\rho_{S_4}(D)$，有$E(\lambda)\in\mathscr{F}(H,K)$，其中 $E(\mu)$的定义见定理 2。

证明　(ⅰ) 取 $\mu\in\rho_{S_4}(D)$ 使得 $F(\mu)\in\mathscr{F}(H,K)$，则对任意 $\lambda\in\rho_{S_4}(D)$，有 $F(\lambda)=F(\mu)+$

$(\lambda-\mu)(D-\lambda S_4)^{-1}[S_4F(\mu)-S_3]$,由此可得,对任意 $\lambda\in\rho_{S_4}(D)$,有 $F(\lambda)\in\mathscr{F}(H,K)$。

(ⅱ)与(ⅰ)类似,由 $E(\lambda)=E(\mu)+(\mu-\lambda)[E(\mu)S_4-S_2](D-\lambda S_4)^{-1}$ 可得,对任意 $\lambda\in\rho_{S_4}(D)$,有 $E(\lambda)\in\mathscr{F}(H,K)$。

定理 6 设 $S_3\in\mathscr{F}(X,Y)$,若存在 $\mu\in\rho_{S_4}(D)$ 使得 $F(\mu)$ 为单值算子,且 $F(\mu)\in\mathscr{F}(H,K)$,则 $\sigma_{e_i,S_1}(\overline{M(\mu)})(i=4,5)$ 与 μ 的选择无关,其中 $M(\mu)$ 和 $F(\mu)$ 的定义见定理 2。

证明 注意到 $S_3,F(\mu)\in\mathscr{F}(H,K)$,则有

$$(\lambda-\mu)S_2F(\mu)+(\lambda-\mu)(S_4F(\mu)-S_3)E(\mu)\in\mathscr{F}(K),$$

其中 $E(\mu)$的定义见定理 2,因此

$$\overline{M(\mu)}=\overline{M(\lambda)}+(\lambda-\mu)S_2F(\mu)+(\lambda-\mu)(S_4F(\mu)-S_3)E(\mu),$$

因此,$\sigma_{e_i,S_1}(\overline{M(\mu)})=\sigma_{e_i,S_1}(\overline{M(\lambda)})$,$i=4,5$,即 $\sigma_{e_i,S_1}(\overline{M(\mu)})$ 与 μ 的选择无关。

定理 7 设存在 $\mu\in\rho_{S_4}(D)$ 使得 $F(\mu)$ 为单值算子,则有如下结论:

(ⅰ) $S_3\in\mathscr{F}_+(H,K)$(或 $\mathscr{F}_-(H,K)$)且 $F(\mu)\in\mathscr{F}_+(H,K)$(或 $\mathscr{F}_-(H,K)$),则 $\sigma_{e_1,S_1}(\overline{M(\mu)})$ 与 μ 的选择无关,其中 $M(\mu)$ 和 $F(\mu)$ 的定义见定理 2。

(ⅱ) $S_3\in\mathscr{F}_+(H,K)$(或 $\mathscr{F}_-(H,K)$)且 $F(\mu)\in\mathscr{F}_+(H,K)$(或 $\mathscr{F}_-(H,K)$),则 $\sigma_{e_3,S_1}(\overline{M(\mu)})$ 与 μ 的选择无关,其中 $M(\mu)$ 和 $F(\mu)$ 的定义见定理 2。

定理 8 设 $\mu\in\rho_{S_4}(D)$ 且(H_1)-(H_4)都成立,$E(\mu)$,$F(\mu)$ 为单值算子且 $E(\mu)\in\mathscr{F}(H,K)$,$F(\mu)\in\mathscr{F}(K,H)$,若 $S_2\in\mathscr{F}(K,H)$,$S_3\in\mathscr{F}(H,K)$,则

$$\sigma_{e_4,S}(\mathscr{L})=\sigma_{e_4,S_1}(\overline{M(\mu)})\cup\sigma_{e_4,S_4}(D),$$

$$\sigma_{e_5,S}(\mathscr{L})\subset\sigma_{e_5,S_1}(\overline{M(\mu)})\cup\sigma_{e_5,S_4}(D),$$

其中 $M(\mu)$,$E(\mu)$ 和 $F(\mu)$ 的定义见定理 2。

证明 由定理 4,对于 $\mu\in\rho_{S_4}(D)$ 及任意 $\lambda\in\mathbb{C}$,有 $\mathscr{L}-\lambda S=UW_*V-(\lambda-\mu)I(\mu)$。其中 U,W_*,V,$I(\mu)$ 的定义见定理 4,注意到 $S_2\in\mathscr{F}(K,H)$,$S_3\in\mathscr{F}(H,K)$ 且 $E(\mu)\in\mathscr{F}(K,H)$,$F(\mu)\in\mathscr{F}(H,K)$,则 $I(\mu)\in\mathscr{F}(H\oplus K)$,因此 $\mathscr{L}-\lambda S$ 为 Fredholm 线性关系 $\Leftrightarrow UW_*V$ 为 Fredholm 线性关系。

显然,U,V 为有界线性算子且可逆,因此,UW_*V 为 Fredholm 线性关系 $\Leftrightarrow W_*$ 为 Fredholm 线性关系且对于 $\lambda\in\Phi_{\mathscr{L},S}$,有

$$ind(\mathscr{L}-\lambda S)=ind(\overline{M(\mu)}-\lambda S_1)+ind(D-\lambda S_4),$$

则有 $\sigma_{e_4,S}(\mathscr{L})=\sigma_{e_4,S_1}(\overline{M(\mu)})\cup\sigma_{e_4,S_4}(D)$,且 $\sigma_{e_5,S}(\mathscr{L})\subset\sigma_{e_5,S_1}(\overline{M(\mu)})\cup\sigma_{e_5,S_4}(D)$。

定理 9 设 $\mu\in\rho_{S_4}(D)$ 且(H_1)-(H_4)都成立,$E(\mu)$,$F(\mu)$ 为单值算子,则有如下结论:

(ⅰ)若 $I(\mu)\in\mathscr{F}_+(H\oplus K)$,则 $\sigma_{e_1,S}(\mathscr{L})=\sigma_{e_1,S_1}(\overline{M(\mu)})\cup\sigma_{e_1,S_4}(D)$;

(ⅱ)若 $I(\mu)\in\mathscr{F}_-(H\oplus K)$,则 $\sigma_{e_2,S}(\mathscr{L})=\sigma_{e_2,S_1}(\overline{M(\mu)})\cup\sigma_{e_2,S_4}(D)$。

参考文献:

[1] ARENS R. Operational calculus of linear relations[J]. Pacific Journal of Mathematics,1961,11(2):9-23.

[2] CROSS R. Multivalued linear operators[M]. New York:Marcel Dekker,1998.

[3] ÁLVAREZ T,AMMAR A,JERIBI A. A characterization of some subsets of S-essential spectra of a multivalued linear operator[J]. Colloquium Mathematicum,2014,135(2):171-186.

[4] AMMAR A,JERIBI A,SAADAOUI B. Frobenius-Schur factorization for multivalued matrices linear operator [J]. Mediterranean Journal of Mathematics,2017,14(29):1-29.

[5] ELLEUCH S, MNIF M. Essential approximate point spectra for upper triangular matrix of linear relations[J]. Acta Mathematica Scientia, 2013, 33(4): 1187-1201.

[6] DU Y Y, HUANG J J, HUO R. On the range of upper triangular relation matrices[J]. Linear and Multilinear Algebra, 2022, 70(20): 5750-5769.

[7] DU Y Y, HUANG J J. Spectral properties of upper triangular relation matrices[J]. Linear and Multilinear Algebra, 2022, 70(8): 1526-1542.

[8] DU Y Y, HUANG J J. Essential spectra of upper triangular relation matrices[J]. Monatshefte fur Mathematik, 2022, 200(1): 43-61.

[9] ÁLVAREZ T, AMMAR A, JERIBI A. On the essential spectra of some matrix of linear relations[J]. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 2014, 37(5): 620-644.

[10] ÁLVAREZ T, CROSS R W, WILCOX D. Multivalued Fredholm type operators with abstract generalized inverses[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2001, 261(1): 403-417.

S-Essential Spectra of Linear Relation Matrices

HUO Ran[1,2], DU Yanyan[3], HUANG Junjie[1], WANG Xiaoli[4]

(1. *School of Mathematical Sciences, Inner Mongolia University, Hohhot* 010021, *China*;

2. *College of Science, Inner Mongolia Agricultural University, Hohhot* 010018, *China*;

3. *School of Mathematics and Statistics, Shandong University of Technology, Zibo* 255091, *China*;

4. *College of Statistics and Mathematics, Inner Mongolia University of Finance and Economics, Hohhot* 010070, *China*)

Abstract: The necessary and sufficient conditions are firstly investigated for an individual linear relationship to be a closable linear relationship. Secondly, for $\mathscr{L}_0=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ with A, B, C, D being linear relations on the corresponding Hilbert spaces, we show $\mathscr{L}_0$ is closable if A, D are closable, C is A-bounded and B is D-bounded. Thirdly, we obtain the Frobenius-Schur factorization for $\mathscr{L}_0-\mu S$ under certain conditions, where $S=\begin{pmatrix} S_1 & S_2 \\ S_3 & S_4 \end{pmatrix}$ is a bounded linear operator, and further provide the expression of the closure of $\mathscr{L}_0$. Moreover, we study the S-essential spectrum of the closure of $\mathscr{L}_0$.

Key words: matrix of linear relation; Frobenius-Schur factorization; S-essential spectrum; perturbation