

文章编号:1000-1638(2025)03-0234-09

DOI:10.13484/j.nmgdxzbk.20250302

Lévy 噪声引起基底 神经节-丘脑-皮层模型的相变分析*

乔雪杰¹,刘全生¹,毕远宏²

(1. 内蒙古大学数学科学学院,呼和浩特 010021; 2. 内蒙古财经大学统计与数学学院,呼和浩特 010070)

摘要:帕金森病的发病机理与大脑皮层神经元的异常 beta 频带放电速率密切相关。基于基底神经节-丘脑-皮层模型,增加纹状体微回路。首先,针对确定模型分析具有 D_2 受体和 D_1 受体的中棘神经元间连接权重对皮层神经元放电速率的影响,分岔结果显示,减小的连接权重使得皮层神经元平均放电速率出现振荡。其次,在确定模型中加入 Lévy 噪声,分析 Lévy 噪声的噪声强度 D 、稳定性指标 α 和偏斜参数 β 对振荡放电速率的影响,结果显示, D 、 α 的增大和 β 的减小均会引起皮层神经元稳定稳态到振荡的相变,使得确定模型的 Hopf 分岔点右移,扩大振荡区域,而这些临界转迁点可以用滞后一阶自相关、峰度、偏度和方差进行预测。这些结果对理解皮层神经元平均放电速率提供帮助。

关键词:基底神经节-丘脑-皮层模型; Lévy 噪声; 相变

中图分类号:O193;O29 **文献标志码:**A

帕金森病人具有震颤和运动迟缓等运动症状以及认知功能减退和睡眠障碍等非运动症状,这些症状严重影响病人正常生活并给其家庭带来沉重的负担。研究表明,帕金森病人大脑中黑质致密部(Substantia nigra pars compacta, SNpc)中多巴胺能神经元死亡,使投射到纹状体的多巴胺神经递质减少,进而引起大脑中神经元 beta 频带(13~30 Hz)振荡放电速率的产生^[1]。因此,许多研究通过建立数学模型探究帕金森病人大脑神经元 beta 频带振荡放电速率产生的机理。

许多研究建立基底神经节(Basal ganglia, BG)-丘脑(Thalamus, Th)-皮层(Cortex, CTX)的平均场模型(BGTC)探究 beta 频带振荡放电速率产生的条件^[2]。最初研究集中在基底神经节中丘脑底核(Subthalamic nucleus, STN)和苍白球外侧(Globus pallidus external segment, GPe)神经元兴奋和抑制回路产生 beta 频带振荡的理论条件^[3]。然而,STN-GPe 模型中神经元既要接收基底神经节输入部分纹状体(Striatum, STR)神经元的抑制作用,也要通过它的输出部分即苍白球内侧(Globus pallidus interior, GPi)将抑制作用传递给 Th^[1],而 Th 的神经元直接或间接通过皮层将兴奋信号作用到纹状体的神经元上^[4-5]。纹状体主要包含具有多巴胺 D_1 受体和 D_2 受体的中棘神经元(Medium spiny neurons, MSNs)^[6-7],最近研究表明,这两个神经元构成的微回路对皮层和基底神经节神经元 beta 频带振荡放电速率有重要影响^[2,8]。因此,将纹状体微回路加入 BGTC 模型,分析它对振荡放电

* 收稿日期:2024-04-18; 修回日期:2024-06-21

基金项目:国家自然科学基金项目(12062017,12262025); 内蒙古自然科学基金项目(2021ZD01); 内蒙古高等学校创新研究团队计划项目(NMGIRT2208)

作者简介:乔雪杰(1998-),女,山东日照人,2021级硕士研究生。E-mail:1471853439@qq.com

通信作者:刘全生(1979-),男,内蒙古赤峰人,教授,博士。主要从事非线性动力学和流体力学研究。
E-mail:smslqs@imu.edu.cn

速率的影响是有意义的。

大脑中神经元会受到不同噪声的影响^[9],因此,考虑随机扰动对 BGTC 模型的影响是重要的。基于神经元具有簇放电的特性^[10],利用具有重尾和大脉冲的 Lévy 噪声来模拟随机波动更有意义^[11-12]。噪声可引起双稳态系统中两个稳态的转迁,也可以引起双节律振荡和稳态的转迁^[13-14],还会引起皮层神经元稳定稳态到振荡的转迁。因此,分析 Lévy 噪声参数对 BGTC 模型的稳态到振荡的相变,有助于了解随机扰动对模型 beta 频带振荡放电速率的影响。

本文在文献[15]的模型中增加纹状体微回路^[15],从而确定其模型的动力学,分析具有 D_2 受体和 D_1 受体的 MSNs 间连接权重对 beta 频带振荡放电速率的影响。在随机动力学方面,在确定模型中加入 Lévy 噪声,分析其参数对皮层神经元稳定稳态到振荡放电速率转迁的影响,并利用 4 个统计指标对转迁的临界值进行预测,进一步分析 Lévy 噪声参数对确定模型分岔点的影响。

1 确定模型的动力学

1.1 模型

图 1 为基底神经节-丘脑-皮层模型,包括皮层 (CTX)、苍白球外侧 (GPe) 和苍白球内侧 (GPi)、丘脑底核 (STN) 和丘脑 (Th) 内的神经元以及纹状体 (STR) 中具有 D_1 受体和 D_2 受体的 MSNs^[16]。图中带箭头的线表示投射具有激活作用的谷氨酸神经递质,带圆点的线表示投射具有抑制作用的氨基丁酸神经递质。基底神经节的输入部分 STR 接收来自 CTX 和 Th 的兴奋性信号,将抑制性信号传给 GPi 和 GPe, GPe 传递抑制性信号给 GPi 和 STN, STN 对 GPe 和 GPi 有激活作用。STR 的输出部分 GPi 将兴奋性信号传给 Th。STR 中包含 D_1 和 D_2 的自抑制回路以及它们之间的相互抑制回路。

图 1 中 7 个神经元核团放电速率的平均场模型如下,模型对应的参数如表 1 所示,除非特殊说明,本文的数值模拟将采用表 1 中的值^[17]。

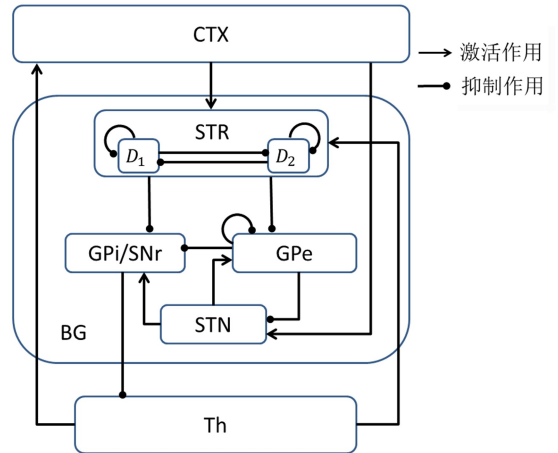


图 1 基底神经节-丘脑-皮层模型

Fig. 1 Basal ganglia-thalamus-cortex model

$$\tau_1 \frac{dx_1(t)}{dt} = F_1(\omega_{16}x_6(t-T)) - x_1(t) \tag{1}$$

$$\tau_2 \frac{dx_2(t)}{dt} = F_2(\omega_{26}x_6(t-T) + \omega_{21}x_1(t-T) - \omega_{22}x_2(t-T) - \omega_{23}x_3(t-T)) - x_2(t) \tag{2}$$

$$\tau_3 \frac{dx_3(t)}{dt} = F_3(\omega_{36}x_6(t-T) + \omega_{31}x_1(t-T) - \omega_{33}x_3(t-T) - \omega_{32}x_2(t-T)) - x_3(t) \tag{3}$$

$$\tau_4 \frac{dx_4(t)}{dt} = F_4(\omega_{47}x_7(t-T) - \omega_{42}x_2(t-T) - \omega_{45}x_5(t-T)) - x_4(t) \tag{4}$$

$$\tau_5 \frac{dx_5(t)}{dt} = F_5(\omega_{57}x_7(t-T) - \omega_{53}x_3(t-T) - \omega_{55}x_5(t-T)) - x_5(t) \tag{5}$$

$$\tau_6 \frac{dx_6(t)}{dt} = F_6(-\omega_{64}x_4(t-T)) - x_6(t) \tag{6}$$

$$\tau_7 \frac{dx_7(t)}{dt} = F_7(\omega_{71}x_1(t-T) - \omega_{75}x_5(t-T)) - x_7(t) \tag{7}$$

其中 $x_i(t)$ ($i=1,2,\dots,7$) 分别表示 CTX、STR 中 D_1 受体、STR 中 D_2 受体、GPe、GPi、Th 和 STN 中神经元的平均放电速率, w_{ij} 表示神经元核团 j 到 i 的连接权重, T 表示神经元信号传输的时滞, τ_i 表示各神经元核团的时间常数, $F_i(x)$ 表示每个神经元核团的激活函数, 其形式为

$$F_i(x) = \frac{M_i}{1 + \left(\frac{M_i - B_i}{B_i}\right) \exp\left(\frac{-4x}{M_i}\right)} \quad (i=1,2,\dots,7) \quad (8)$$

其中 M_i 表示第 i 个神经元核团的最大放电速率, B_i 表示第 i 个神经元核团的基础放电速率^[1]。

表 1 参数值

Table 1 Parameters in model

参数	值	参数	值	参数	值	参数	值
M_1	180 spk/s	B_5	75 spk/s	w_{16}	19.53	w_{47}	15.74
M_2	25 spk/s	B_6	19 spk/s	w_{21}	0.6	w_{53}	14.1
M_3	33 spk/s	B_7	17 spk/s	w_{22}	3.2	w_{55}	4.6
M_4	300 spk/s	τ_1	12 ms	w_{23}	3.1	w_{57}	0.8
M_5	400 spk/s	τ_2	6 ms	w_{26}	1.1	w_{64}	13.1
M_6	300 spk/s	τ_3	4 ms	w_{31}	2.42	w_{71}	2.02
M_7	300 spk/s	τ_4	6 ms	w_{32}	1.9	w_{75}	13.12
B_1	10 spk/s	τ_5	14 ms	w_{33}	4.1	D	0.06
B_2	4 spk/s	τ_6	6 ms	w_{36}	30.4	α	0.996
B_3	6 spk/s	τ_7	6 ms	w_{42}	20.58	β	-1
B_4	20 spk/s	T	4 ms	w_{45}	2.03		

1.2 分岔分析

分析纹状体微回路中具有 D_2 受体的 MSNs 对具有 D_1 受体的 MSNs 抑制作用的连接权重 w_{23} 对皮层神经元平均放电速率 $x_1(t)$ 的影响。在 Matlab 软件中利用 Runge-Kutta 算法获得方程(1)–(7)的时间序列, 确定其最大值和最小值, 得到 $x_1(t)$ 关于 w_{23} 的分岔图, 如图 2(a) 所示。

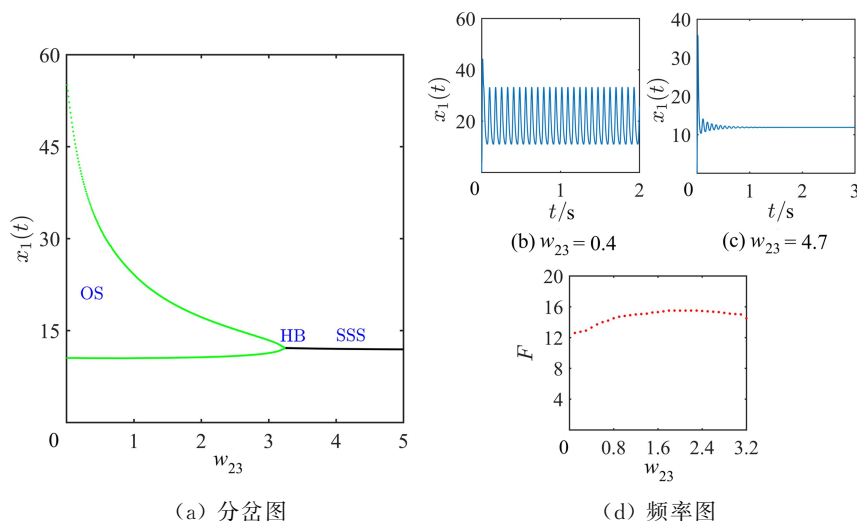
图 2 $x_1(t)$ 关于 w_{23} 的分岔图(a)、时间历程图(b)–(c)以及频率图(d)Fig. 2 Bifurcation (a), time series (b)–(c) and frequency diagram (d) of $x_1(t)$ with respect to w_{23}

图 2(a) 中黑色实线表示稳定的稳态(Stable steady state, SSS), 绿色实心点表示振荡状态(Oscil-

lating state, OS) 的最大值和最小值。在 $\omega_{23} = 3.32$ 处发生超临界 Hopf 分岔 (HB), 在 HB 左侧, $x_1(t)$ 出现振荡状态; 在 HB 右侧, $x_1(t)$ 出现稳定的稳态。对于 $\omega_{23} = 0.4$ 和 $\omega_{23} = 4.7$, 图 2(b) 和 (c) 给出 $x_1(t)$ 关于 ω_{23} 的时间序列, 验证了上述结果。通过分析可知, 具有 D_2 受体的 MSNs 对具有 D_1 受体的 MSNs 的抑制作用减少, GPi 活性增加, 进而增加对丘脑神经元的抑制, 增大了皮层神经元的活性, 使其出现振荡。反之, 会降低皮层神经元的活性, 出现较低稳态的放电速率。图 2(d) 是 $x_1(t)$ 随 ω_{23} 变化的频率关系图, 可以看到, $x_1(t)$ 的振荡频率在 beta 频段。

1.3 确定模型的临界转迁点预测

ω_{23} 变化会引起 $x_1(t)$ 从稳态到振荡的转迁, 本文利用滞后一阶自相关 (Autocorrelation at lag-1, A)、峰度 (Kurtosis, K)、偏度 (Skewness, S) 和方差 (Variance, V) 4 个指标对临界转迁点进行预测, 公式分别为

$$A = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N-1} (x_i - \bar{X})(x_{i+1} - \bar{X}) \tag{9}$$

$$K = \frac{1}{N} \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{X})^4}{\sigma^4} \tag{10}$$

$$S = \frac{1}{N} \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{X})^3}{\sigma^3} \tag{11}$$

$$V = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{X})^2 \tag{12}$$

其中, $x_i (i = 1, \dots, N)$ 是数据样本, N 表示数据样本容量, \bar{X} 是数据样本的均值, σ 表示数据样本的标准偏差。

图 3 给出不同指标关于 ω_{23} 变化的图像。其中, ω_{23} 从 0 变化到 5, 步长为 0.01, 针对每一个 ω_{23} 运行一次时间历程图, 以 0.001 s 为时间步长运行 40 s, 获得 40000 个 $x_1(t)$ 样本, 然后基于样本利用公式 (9) — (12) 获得不同指标的值得。4 个指标的临界转迁点用 H 点标记, 可以看出, 随着 ω_{23} 从小到大变化, 滞后一阶自相关和方差在确定分岔点 $\omega_{23} = 3.32$ 附近没有出现突然的变化, 偏度在 $\omega_{23} = 3.26$ (H 点) 出现缓慢的变化, 而峰度在 $\omega_{23} = 3.26$ (H 点) 出现突然的变化。因此, 针对本文模型, 峰度比较适合预测 ω_{23} 的临界转迁点。

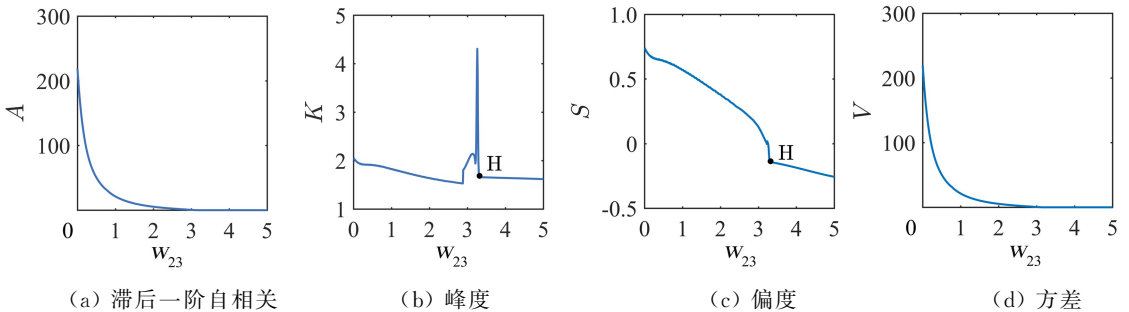


图 3 针对确定模型的 $x_1(t)$ 样本, 滞后一阶自相关、峰度、偏度和方差关于 ω_{23} 的变化情况

Fig. 3 Autocorrelation at lag-1, kurtosis, skewness, variance with respect to ω_{23} for $x_1(t)$ samples in deterministic model

分析确定模型中 ω_{23} 对皮层神经元振荡放电速率的影响, 从分岔图可以看出, 随着 ω_{23} 的减小, 皮层神经元出现振荡的放电速率, 针对确定模型的样本, 峰度能较好地预测临界转迁点。

2 随机模型的动力学

2.1 随机模型

考虑随机扰动对模型 (1) — (7) 振荡动力学的影响, 模型 (1) — (7) 的随机动力学模型为

$$\tau_i \frac{dx_i(t)}{dt} = F_i(x) - x_i(t) + \xi(t) \quad (i=1,2,\dots,7) \quad (13)$$

其中 $\xi(t)$ 表示服从 Lévy 分布 $L_{\alpha,\beta}(\xi; \gamma, \delta)$ 的维纳过程, $L_{\alpha,\beta}(\xi; \gamma, \delta)$ 的概率密度函数为

$$\varphi(t, \alpha, \beta, \gamma, \delta) = \exp[it\delta - |\gamma t|^\alpha (1 - i\beta \operatorname{sgn}(t) \tan \frac{\pi\alpha}{2})], \alpha \neq 1,$$

$$\varphi(t, \alpha, \beta, \gamma, \delta) = \exp[it\delta - \gamma |t| (1 + i\beta \frac{2}{\pi} \operatorname{sgn}(t) \ln |t|)], \alpha = 1.$$

因此,有 4 个参数可以刻画 $\xi(t)$ 的变化,即在 $(0, 2]$ 内变化且描述 Lévy 分布非对称性尾部的稳定性指标 α , 在 $[-1, 1]$ 内变化且描述 Lévy 分布非对称性的偏斜参数 β , 在 $(-\infty, +\infty)$ 内变化表示 Lévy 分布均值的参数 δ , 刻画噪声强度的参数 $D = \gamma^\alpha$, γ 在 $(0, +\infty)$ 内变化。关于 $\xi(t)$ 的更多细节见文献 [11, 18]。

在数值模拟中,利用随机 Runge-Kutta 算法模拟模型(13)的离散数值解^[18-20]。简单起见,在数值模拟中设 $\delta=0$,分析参数 D 、 α 和 β 对模型(13)动力学的影响。

2.2 Lévy 噪声引起的相变

重点分析 Lévy 噪声的参数,即噪声强度 D 、稳定性指标 α 、偏斜参数 β 对模型(13)从稳定稳态到振荡相变的变化。选取 HB 点($\omega_{23}=3.32$)右侧的参数 $\omega_{23}=3.56$,在确定模型下, $x_1(t)$ 的放电速率是稳定的稳态。

图 4 给出不同噪声强度 D 下皮层神经元平均放电速率 $x_1(t)$ 的时间历程图,其中 $\alpha=0.996$, $\beta=-1$ 。可以看出,在噪声强度较小时($D=0.002$), $x_1(t)$ 达到稳定的稳态,随着噪声强度的增大($D=0.06$), $x_1(t)$ 出现小幅振荡,而对于较大的噪声强度($D=0.31$), $x_1(t)$ 持续高幅振荡。因此,噪声强度增大可以引起 $x_1(t)$ 从稳定稳态转迁到振荡。

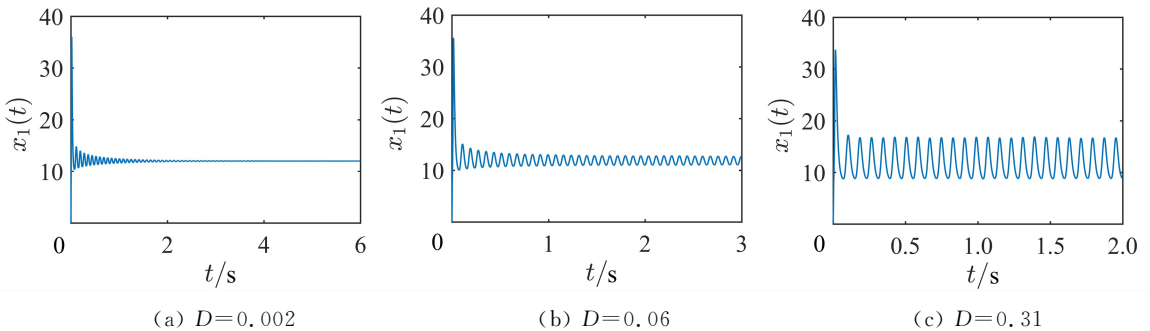


图 4 不同噪声强度 D 下 $x_1(t)$ 的时间历程图

Fig. 4 Time series of $x_1(t)$ for different D

图 5 显示在不同稳定性指标 α 下皮层神经元平均放电速率 $x_1(t)$ 的时间历程图,其中 $D=0.06$ 和 $\beta=-1$ 。可以看出,当 $\alpha=0.97$ 时, $x_1(t)$ 处于稳态,随着稳定性指标 α 的增加($\alpha=0.996$), $x_1(t)$ 出现小幅振荡。当 $\alpha=0.998$ 时, $x_1(t)$ 的振幅增加,但是振幅小于图 4(c) 的振幅,说明稳定性指标 α 的增加会引起 $x_1(t)$ 从稳定稳态到振荡的转迁,但是振幅较小。

图 6 显示在不同偏斜参数 β 下皮层神经元平均放电速率 $x_1(t)$ 的时间历程图,其中 $D=0.06$ 和 $\alpha=0.996$ 。可以看出,当 $\beta=-1$ 时, $x_1(t)$ 出现小幅振荡,但随着 β 的增加, $x_1(t)$ 由阻尼振荡变为稳定的稳态,如图 6(b) 和 (c) 所示,说明减小的偏斜参数 β 会引起 $x_1(t)$ 稳定稳态到振荡的相变,但振幅较小。

基于以上分析发现,噪声强度 D 、稳定性指标 α 的增大和偏斜参数 β 的减小会引起模型(13)从稳定稳态到振荡相变。因此,这 3 个参数会引起确定模型 HB 点的变化,下面分析其对确定模型 HB 点

的影响。

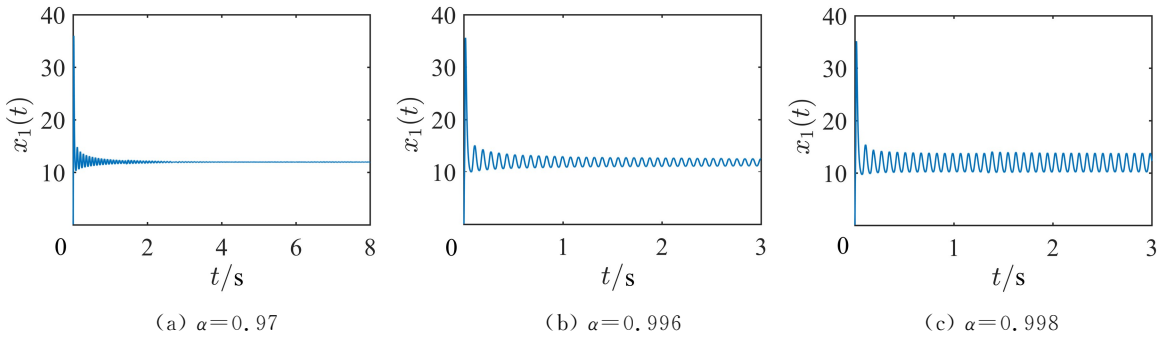


图 5 不同稳定性指标 α 下 $x_1(t)$ 的时间历程图

Fig. 5 Time series of $x_1(t)$ for different α

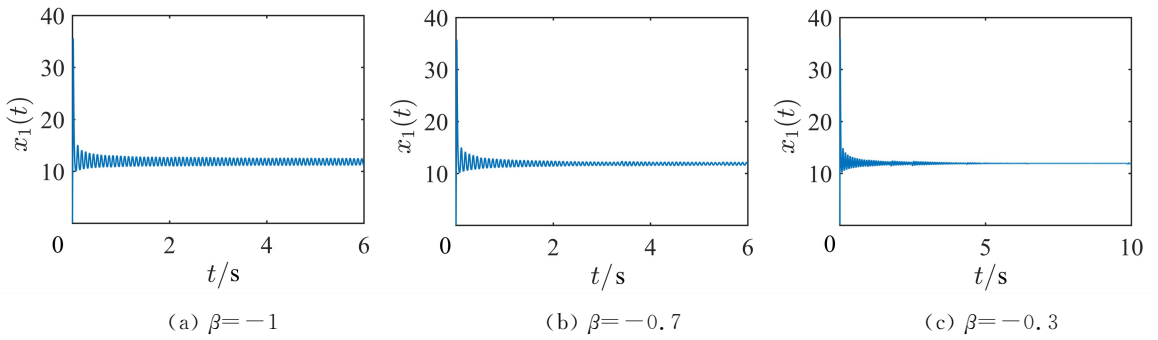


图 6 不同偏斜参数 β 下 $x_1(t)$ 的时间历程图

Fig. 6 Time series of $x_1(t)$ for different β

2.3 Lévy 噪声参数对确定模型 HB 分岔点的影响

分析噪声强度 D 、稳定性指标 α 和偏斜参数 β 对确定性模型 Hopf 分岔点 HB 的影响,结果如图 7 所示,图中黑色虚线表示确定模型的 Hopf 分岔点 HB,绿色实心点表示随机模型的 Hopf 分岔点 hb,它的左侧是振荡状态(OS),右侧是稳定的稳态(SSS)。

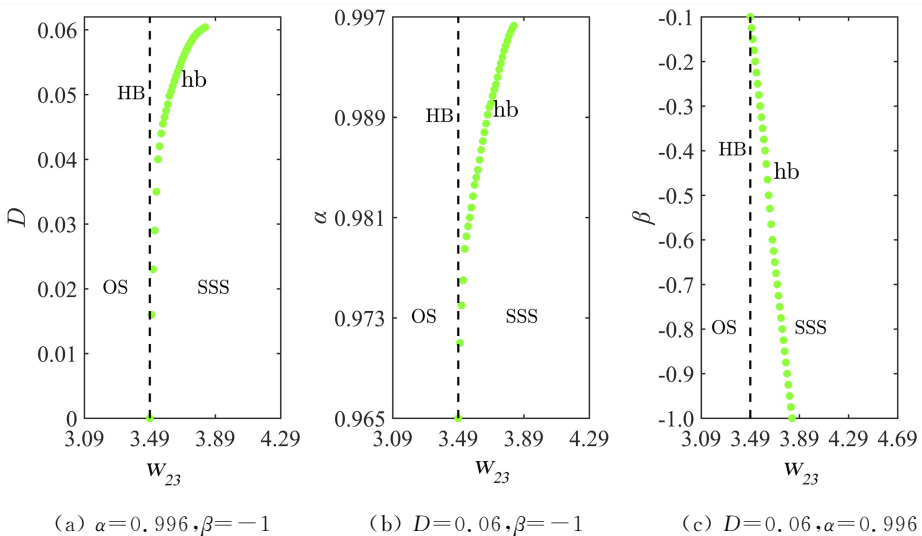


图 7 D 、 α 和 β 对确定模型 HB 分岔点的影响

Fig. 7 Effects of D , α , β on HB of the deterministic model

图 7(a)给出不同噪声强度 D 对确定模型 HB 的影响,可以看出,当 $D < 0.04$ 时,HB 和 hb 重合,但当 $D > 0.04$ 时,且随着噪声强度的不断增加,hb 右移,当 ω_{23} 在 HB 和 hb 之间时,噪声强度 D 会引起皮层神经元从稳定稳态到振荡的转迁,使得 $x_1(t)$ 振荡的范围扩大。图 7(b)给出不同稳定性指标 α 对确定模型 HB 的影响,可以看出,随着 α 不断增大,hb 点逐渐移到 HB 点右侧,使得介于 HB 和 hb 点之间的参数 ω_{23} 和稳定性指标 α 引起 $x_1(t)$ 从稳定稳态到振荡的转迁。图 7(c)给出偏斜参数 β 对确定模型 HB 的影响,可以看出,随着 β 的减小,hb 向右偏移,振荡区域扩大。与另外两个噪声参数不同的是, β 的减小更易促进皮层神经元的振荡放电速率的出现。

2.4 随机模型的临界转迁点预测

与 1.3 节类似,针对随机模型,选取 $D=0.06, \alpha=0.996, \beta=-1$ 和区间 $[0, 4]$ 中每一个 ω_{23} 得到 $x_1(t)$ 的时间序列为样本,求出滞后一阶自相关、峰度、偏度和方差值,结果如图 8 所示。可以看出,在确定模型 HB 点 ($\omega_{23}=3.32$) 左侧的 $\omega_{23}=3.25$ 处,这 4 个指标都出现了突然的变化,指标的临界转迁点用 H 点标记。因此,它们都适合用来预测随机模型 ω_{23} 引起的相变。

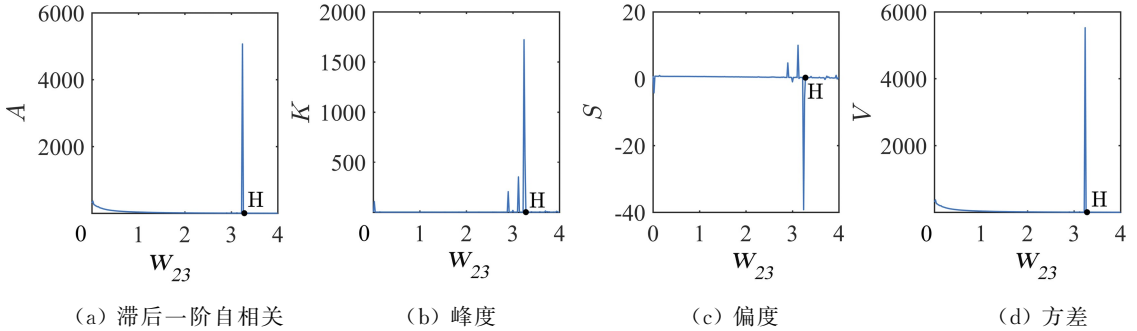


图 8 针对随机模型的 $x_1(t)$ 样本,滞后一阶自相关、峰度、偏度和方差关于 ω_{23} 的变化情况

Fig. 8 Autocorrelation at lag-1, kurtosis, skewness, variance with respect to ω_{23} for $x_1(t)$ samples in stochastic model

通过分析 Lévy 噪声参数引起的相变,结果显示增大的噪声强度 D 、稳定性指标 α 和减小的偏斜参数 β 均会引起皮层神经元平均放电速率从稳定稳态到振荡的转迁,使得确定模型的 Hopf 分岔点 HB 右移,扩大振荡区域,而滞后一阶自相关、峰度、偏度和方差能很好地预测随机模型的 Hopf 分岔转迁点。

3 结论

帕金森病与大脑皮层神经元的异常放电密切相关^[3]。因此,分析影响皮层神经元振荡放电速率产生的因素,对了解帕金森病的机理起到重要的作用^[21-22]。本文针对一个具有 7 个神经元核团的基底神经节-丘脑-皮层模型,增加了纹状体微回路,首先分析确定模型中具有 D_2 受体的中棘神经元对具有 D_1 受体的中棘神经元抑制作用的连接权重 ω_{23} 对皮层神经元平均放电速率的影响。其次,在确定模型中加入 Lévy 噪声,分别考虑其噪声强度 D 、稳定性指标 α 和偏斜参数 β 引起皮层神经元稳定稳态到振荡放电速率的转迁,并分析了它们对确定模型 Hopf 分岔点的影响,结果显示, D, α 的增大以及 β 的减小均会引起皮层神经元从稳定稳态到振荡相变,使得确定模型的 Hopf 分岔点右移,扩大振荡区域,并且滞后一阶自相关、峰度、偏度和方差 4 个指标适用于随机模型转迁点的预测。

本文重点研究了 Lévy 噪声引起的相变,在模型中结合高斯白噪声和时滞^[23],分析它们引起的相变是以后研究的工作。

参考文献:

- [1] HU B, XU M B, ZHU L Y, et al. A bidirectional Hopf bifurcation analysis of Parkinson's oscillation in a simplified basal ganglia model[J]. *Journal of Theoretical Biology*, 2022, 536: 110979.
- [2] VAN ALBADA S J, GRAY R T, DRYSDALE P M, et al. Mean-field modeling of the basal ganglia-thalamocortical system. II. Dynamics of parkinsonian oscillations[J]. *Journal of Theoretical Biology*, 2009, 257(4): 664-688.
- [3] HOLGADO A J N, TERRY J R, BOGACZ R. Conditions for the generation of beta oscillations in the subthalamic nucleus-globus pallidus network[J]. *Journal of Neuroscience*, 2010, 30(37): 12340-12352.
- [4] KWAK Y, PELTIER S, BOHNEN N I, et al. Altered resting state cortico-striatal connectivity in mild to moderate stage Parkinson's disease[J]. *Frontiers in Systems Neuroscience*, 2010, 4: 143.
- [5] SHAROTT A, VINCIATI F, NAKAMURA K C, et al. A population of indirect pathway striatal projection neurons is selectively entrained to parkinsonian beta oscillations[J]. *Journal of Neuroscience*, 2017, 37(41): 9977-9998.
- [6] 闫晨日, 刘全生, 毕远宏. 皮质-基底神经节-丘脑回路中皮质活动的动力学分析[J]. *内蒙古大学学报(自然科学版)*, 2021, 52(2): 123-128.
- [7] YU Y, WANG Q Y. Oscillation dynamics in an extended model of thalamic-basal ganglia[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2019, 98(2): 1065-1080.
- [8] VAN ALBADA S J, ROBINSON P A. Mean-field modeling of the basal ganglia-thalamocortical system. I. Firing rates in healthy and parkinsonian states[J]. *Journal of Theoretical Biology*, 2009, 257(4): 642-663.
- [9] SHEN Z, ZHANG H H, DU L, et al. Initiation and termination of epilepsy induced by Lévy noise; A view from the cortical neural mass model[J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2023, 167: 113038.
- [10] MEIDAHL A C, MOLL C K E, VAN WIJK B C M, et al. Synchronised spiking activity underlies phase amplitude coupling in the subthalamic nucleus of Parkinson's disease patients[J]. *Neurobiology of Disease*, 2019, 127: 101-113.
- [11] KEN I S. Lévy processes and infinitely divisible distributions[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1999: 16-21.
- [12] BERTOIN J. Lévy processes[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1996: 12-17.
- [13] CAI R, LIU Y C, DUAN J Q, et al. State transitions in the Morris-Lecar model under stable Lévy noise[J]. *The European Physical Journal B*, 2020, 93: 38.
- [14] MARTIN S, ITURRATE I, CHAVARRUAGA R, et al. Differential contributions of subthalamic beta rhythms and 1/f broadband activity to motor symptoms in Parkinson's disease[J]. *NPJ Parkinson's Disease*, 2018, 4: 32.
- [15] MICHAEL C, MARK H H. Model and analysis for the onset of parkinsonian firing patterns in a simplified basal ganglia[J]. *International Journal of Neural Systems*, 2019, 29(1): 1850021.
- [16] YAN H, WANG J. Quantification of motor network dynamics in Parkinson's disease by means of landscape and flux theory[J]. *PLoS One*, 2017, 12(3): e0174364.
- [17] HU B, SHI Q Q, GUO Y, et al. The oscillatory boundary conditions of different frequency bands in Parkinson's disease[J]. *Journal of Theoretical Biology*, 2018, 451: 67-79.
- [18] YU H Y, LIU Q S, BI Y H. Lévy noise-induced phase transition in p53 gene regulatory network near bifurcation points[J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2023, 166: 112885.
- [19] HONEYCUTT R L. Stochastic Runge-Kutta algorithms. I. White noise[J]. *Physical Review A*, 1992, 45(2): 600-603.
- [20] HONEYCUTT R L. Stochastic Runge-Kutta algorithms. II. Colored noise[J]. *Physical Review A*, 1992, 45(2): 604.
- [21] YU H, STERNAD D, CORCOS D M, et al. Role of hyperactive cerebellum and motor cortex in Parkinson's dis-

ease[J]. *NeuroImage*, 2007, 35(1): 222-233.

- [22] POLLOK B, KRAUSE V, MARTSCH W, et al. Motor-cortical oscillations in early stages of Parkinson's disease [J]. *The Journal of Physiology*, 2012, 590(13): 3203-3212.
- [23] CHEN X Z, LI D, TIAN B D, et al. Ergodic stationary distribution and extinction of stochastic delay chemostat system with Monod-Haldane functional response and higher-order Lévy jumps[J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2023, 126: 107416.

(责任编辑 李 宏)

Phase Transition Analysis of Basal Ganglia-Thalamus-Cortex Model Induced by Lévy Noise

QIAO Xuejie¹, LIU Quansheng¹, BI Yuanhong²

(1. *School of Mathematical Sciences, Inner Mongolia University, Hohhot 010021, China;*

2. *School of Statistics and Mathematics, Inner Mongolia University of*

Finance and Economics, Hohhot 010070, China)

Abstract: The pathogenesis of Parkinson's disease is closely related to the abnormal beta band firing rate of cortical neurons in the brain. Based on a basal ganglia-thalamus-cortex model, the microcircuit in the striatum is considered into the model. In the deterministic model, the effect of connection weight between medium spine neurons with D_2 receptor and D_1 receptor on firing rate of neurons in the cortex is analyzed. The bifurcation results show that the decrease of connection weight caused oscillating firing rate of neurons in the cortex. Then, Lévy noise is added to the deterministic model, and the effect of the noise intensity D , stability index α , and skewness parameter β of Lévy noise on oscillating firing rate are analyzed. The results show that the increase of D , α and the decrease of β cause a phase transition from stable steady state to oscillation state, and Hopf bifurcation point of the deterministic model shift to the right so as to expand the oscillation region. These critical transition points can be predicted through autocorrelation at lag-1, kurtosis, skewness, and variance. These results provide insight into the influence of stochastic noise on the firing rate of neuron in the cortex.

Key words: basal ganglia-thalamus-cortex model; Lévy noise; phase transition