文章编号:1000-1638(2025)04-0347-10　　DOI:10.13484/j.nmgdxxbzk.20250402

复J-辛空间中完全J-Lagrangian子空间的刻画*

石晶敏,姚斯琴,苏文汇
(内蒙古大学数学科学学院,呼和浩特 010021)

摘要:从低阶到高阶刻画了复J-辛空间中完全J-Lagrangian子空间。研究复J-辛空间中子空间是完全J-Lagrangian子空间的充要条件,并给出复J-辛空间中完全J-Lagrangian子空间的几个具体例子。

关键词:复J-辛空间; 完全J-Lagrangian子空间; J-自伴算子

中图分类号:O175　　**文献标志码:**A

微分算子是解决量子力学和微分方程等众多问题的有力工具,而辛几何是研究对称微分算子各类扩张的有效方法[1-7]。1999年,Everitt等[8-9]首次运用辛几何研究了对称微分算子的自共轭扩张的描述。2002年,王万义[10]用辛几何刻画了J-对称微分算子的J-自共轭扩张。2022年刘婷[11]、2023年苏雅其其格等[12]进一步研究了复辛空间中完全Lagrangian子空间的构造与分类。由于J-对称算子的所有J-自共轭扩张构成的集合与由算子定义域构造的复J-辛空间中的所有完全J-Lagrangian子空间的集合之间存在一一对应关系,因此,研究复J-辛空间中完全J-Lagrangian子空间的刻画具有重要意义。

本文由低阶到高阶研究复J-辛空间中完全J-Lagrangian子空间的刻画,给出了子空间是完全J-Lagrangian子空间的充要条件,并发现复J-辛空间中的基本完全J-Lagrangian子空间对应反对称矩阵中元素全为零的n阶子式。

1 预备知识

定义1[10]　设S是一个复的线性空间,在乘积空间$S\times S$上赋予一个复值函数

$$u,\ v\to[u:v],\ S\times S\to\mathbb{C},$$

若复值函数$[:]$满足

(1) 双线性型

$$[c_1u+c_2v:w]=c_1[u:w]+c_2[v:w],\ [u:c_3v+c_4w]=c_3[u:v]+c_4[u:w],$$

任意的$u,\ v,\ w\in S$,$c_j\in\mathbb{C}$,$j=1,\ 2,\ 3,\ 4$;

(2) 反对称型

$$[u:v]=-[v:u],\ \forall u,\ v\in S;$$

(3) 非退化的

$$[u:S]=0\Rightarrow u=0,$$

* **收稿日期:**2024-11-06; **修回日期:**2025-01-15
基金项目:国家自然科学基金项目(11801286);内蒙古自然科学基金项目(2018MS01021)
作者简介:石晶敏(1999—),女,内蒙古乌兰察布人,2022级硕士研究生。E-mail:1977612906@qq.com
通信作者:姚斯琴(1982—),女(蒙古族),内蒙古兴安盟人,副教授,博士。主要从事微分算子谱理论的研究。E-mail:siqinyao_math@126.com

则称S是一个复J-辛空间。

复J-辛空间上所定义的J-辛形式[:]也称J-辛内积。特别地,若$[u:v]=0$,则称u与v是J-辛正交的。设S是一个复J-辛空间,由定义1中条件(2)可得,$[u:u]=0,\forall u\in S$。

定义2[10] 若复J-辛空间S中的线性子空间L满足$[L:L]=0$,则称L为J-Lagrangian的,即

$$[u:v]=0,\ \forall u,\ v\in L。$$

若一个J-Lagrangian子空间$L\subset S$满足

$$[u:L]=0\Rightarrow u\in L,\forall u\in S,$$

则称L为完全J-Lagrangian的。

注1 复J-辛空间S的任意一个J-Lagrangian子空间不一定是完全的。例如,考虑复J-辛空间$S=\mathbb{C}^4$,设$\{e^1,e^2,e^3,e^4\}$为S的一组基且满足

$$[e^1:e^3]=1,[e^3:e^1]=-1,[e^2:e^4]=1,[e^4:e^2]=-1,$$

其余J-辛积全为零。

令$L=\mathrm{span}\{e^1\}$,由$[e^1:e^1]=0$可知,L是S的一个J-Lagrangian子空间。又因为$[e^2:L]=0$,而$e^2\notin L$,所以L不是S的一个完全J-Lagrangian子空间。

定义3[10] 设S_1和S_2是复J-辛空间,J-辛形式分别为$[:]_1$与$[:]_2$,若存在S_1到S_2的一个双射F,对于$\forall u,v\in S_1$,有

$$[u:v]_1=[Fu:Fv]_2,$$

则称S_1和S_2同构。

注2 任意一个$D(>0)$维复J-辛空间S都同构于复J-辛空间$\mathbb{C}^D$。

引理1[10] 设S是复J-辛空间,$\dim S=2n>0$,其J-辛形式为[:],则存在S的一组基$\{e^1,e^2,\cdots,e^n,e^{n+1},e^{n+2},\cdots,e^{2n}\}$,使得相应的反对称矩阵为

$$\boldsymbol{H}=\begin{pmatrix}0 & \boldsymbol{I}_n\\ -\boldsymbol{I}_n & 0\end{pmatrix},$$

对应的J-辛积为

$$[e^j:e^k]=0,[e^{n+j}:e^{n+k}]=0,[e^j:e^{n+k}]=\delta_{jk}(\text{Kronecker }\delta),1\leqslant j,k\leqslant n。$$

注3 复J-辛空间S必须是偶数维的,即$\dim S=2n>0$,因为复J-辛空间S总存在一组基对应于$2n$阶反对称矩阵。

引理2[10] 设S是复J-辛空间,$\dim S=2n$,若L是S的一个J-Lagrangian子空间,$\dim L=m$,则存在S的一组基

$$\{e^1,e^2,\cdots,e^m,e^{m+1},\cdots,e^n,e^{n+1},\cdots,e^{2n}\},$$

使得$L=\mathrm{span}\{e^1,e^2,\cdots,e^m\}$。

引理3[10] 设S是复J-辛空间,$\dim S=2n$,则

(1) S一定有J-Lagrangian子空间和完全J-Lagrangian子空间;

(2) S的一个J-Lagrangian子空间L是完全的$\Leftrightarrow\dim L=n$。

定义4[13] 在一个n行m列的矩阵$\boldsymbol{A}$中任取k行k列($k\leqslant\min\{m,n\}$),位于这些行列相交处的k^2个元素按所处位置次序所排成的k阶行列式称为矩阵$\boldsymbol{A}$的k阶子式。将分别取$\boldsymbol{A}$的$n_1,\cdots,n_k$行与$m_1,\cdots,m_k$列所得到的子式记为

$$\boldsymbol{K}(r_{n_1},\cdots,r_{n_k};\ l_{m_1},\cdots,l_{m_k})。$$

特别地,当矩阵$\boldsymbol{A}$取k行与k列时,矩阵$\boldsymbol{A}$中的k阶子式记为$\boldsymbol{K}(n_1,\cdots,n_k)$。

后面我们发现,复J-辛空间中的完全J-Lagrangian子空间对应其反对称矩阵中元素全为零的n阶子式。

2　复 J-辛空间中完全 J-Lagrangian 子空间的刻画

2.1　复 J-辛空间 $S=\mathbb{C}^2$ 中完全 J-Lagrangian 子空间的刻画

定理 1　考虑复 J-辛空间 $S=\mathbb{C}^2$，设 $\{e^1, e^2\}$ 为 S 的一组基且满足

$$[e^1 : e^1]=0, [e^1 : e^2]=1, [e^2 : e^1]=-1, [e^2 : e^2]=0,$$

对应反对称矩阵

$$H=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

则有

（1）$L_1=\operatorname{span}\{e^1\}, L_2=\operatorname{span}\{e^2\}$ 是 $S=\mathbb{C}^2$ 中的完全 J-Lagrangian 子空间，分别对应反对称矩阵 $\boldsymbol{H}$ 中的 1 阶零子式 $\boldsymbol{K}(1), \boldsymbol{K}(2)$，称 $L_1=\operatorname{span}\{e^1\}, L_2=\operatorname{span}\{e^2\}$ 为 $S=\mathbb{C}^2$ 中的基本完全 J-Lagrangian 子空间。

（2）令

$$w_1=ae^1+be^2, \forall a, b\in\mathbb{C},$$

则 $L=\operatorname{span}\{w_1\}$ 是 $S=\mathbb{C}^2$ 中的完全 J-Lagrangian 子空间。

证明　（1）对于任意的 $k_1, k_2\in\mathbb{C}$，

$$[L_1 : L_1]=[k_1e^1 : k_2e^1]=k_1k_2[e^1 : e^1]=0,$$

由定义 2 得，L_1 是 $S=\mathbb{C}^2$ 中的 J-Lagrangian 子空间。又因为 $\dim L_1=n=1$，由引理 3(2) 可得，L_1 是 $S=\mathbb{C}^2$ 中的完全 J-Lagrangian 子空间，L_2 同理可证。

又因为

$$H=\begin{pmatrix} \boxed{0} & 1 \\ -1 & \boxed{0} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} [e^1 : e^1] & [e^1 : e^2] \\ [e^2 : e^1] & [e^2 : e^2] \end{pmatrix},$$

则 $L_1=\operatorname{span}\{e^1\}, L_2=\operatorname{span}\{e^2\}$ 分别对应反对称矩阵 $\boldsymbol{H}$ 中的 1 阶零子式 $\boldsymbol{K}(1), \boldsymbol{K}(2)$。

（2）由

$$[w_1 : w_1]=[ae^1+be^2 : ae^1+be^2]=ab[e^1 : e^2]+ba[e^2 : e^1]=ab-ba=0,$$

故 w_1 为 J-Lagrangian 元素。又由引理 3(2) 可得，$L=\operatorname{span}\{w_1\}$ 是 $S=\mathbb{C}^2$ 中的完全 J-Lagrangian 子空间。

注 4　在复 J-辛空间 $S=\mathbb{C}^2$ 中，将基本完全 J-Lagrangian 元素任意线性组合后仍是完全 J-Lagrangian 元素。

2.2　复 J-辛空间 $S=\mathbb{C}^4$ 中完全 J-Lagrangian 子空间的刻画

定理 2　考虑复 J-辛空间 $S=\mathbb{C}^4$，设 $\{e^1, e^2, e^3, e^4\}$ 为 S 的一组基且满足

$$[e^1 : e^3]=1, [e^3 : e^1]=-1, [e^2 : e^4]=1, [e^4 : e^2]=-1,$$

其余 J-辛积全为零，对应反对称矩阵

$$H=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

则有

（1）$L_1=\operatorname{span}\{e^1, e^2\}, L_2=\operatorname{span}\{e^2, e^3\}, L_3=\operatorname{span}\{e^3, e^4\}, L_4=\operatorname{span}\{e^1, e^4\}$ 是 $S=\mathbb{C}^4$ 中的完全 J-Lagrangian 子空间。

（2）L_1、L_2、L_3、L_4 分别对应反对称矩阵 $\boldsymbol{H}$ 中元素全为零的 2 阶子式

$$\boldsymbol{K}(1,2), \boldsymbol{K}(2,3), \boldsymbol{K}(3,4), \boldsymbol{K}(1,4),$$

称 L_1、L_2、L_3、L_4 为 $S=\mathbb{C}^4$ 中的基本完全 J-Lagrangian 子空间。

证明 (1) 对于任意的 $k_1,k_2,k_3,k_4\in\mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}[L_1:L_1]&=[k_1e^1+k_2e^2:k_3e^1+k_4e^2]\\&=k_1k_3[e^1:e^1]+k_1k_4[e^1:e^2]+k_2k_3[e^2:e^1]+k_2k_4[e^2:e^2]\\&=0,\end{aligned}$$

由定义 2 得,L_1 是 $S=\mathbb{C}^4$ 中的 J-Lagrangian 子空间。又因为 $\dim L_1=n=2$,由引理 3(2)可得,L_1 是 $S=\mathbb{C}^4$ 中的完全 J-Lagrangian 子空间,L_2、L_3、L_4 同理可证。

(2) 因为

$$\boldsymbol{H}=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\-1&0&0&0\\0&-1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}[e^1:e^1]&[e^1:e^2]&[e^1:e^3]&[e^1:e^4]\\ [e^2:e^1]&[e^2:e^2]&[e^2:e^3]&[e^2:e^4]\\ [e^3:e^1]&[e^3:e^2]&[e^3:e^3]&[e^3:e^4]\\ [e^4:e^1]&[e^4:e^2]&[e^4:e^3]&[e^4:e^4]\end{pmatrix},$$

L_1、L_2、L_3 分别对应反对称矩阵 $\boldsymbol{H}$ 中元素全为零的 2 阶子式 $\boldsymbol{K}(1,2)$,$\boldsymbol{K}(2,3)$,$\boldsymbol{K}(3,4)$,L_4 对应取反对称矩阵 $\boldsymbol{H}$ 中 1、4 行与 1、4 列所构成的元素全为零的 2 阶子式 $\boldsymbol{K}(1,4)$。

定理 3 设定理 2 中的符号与假定成立,令

$$w_1=a_{11}e^1+a_{12}e^2+b_{11}e^3+b_{12}e^4,$$

则 w_1 是 S 的一个 J-Lagrangian 元素。

证明 由

$$\begin{aligned}[w_1:w_1]&=[a_{11}e^1+a_{12}e^2+b_{11}e^3+b_{12}e^4:a_{11}e^1+a_{12}e^2+b_{11}e^3+b_{12}e^4]\\&=a_{11}b_{11}+a_{12}b_{12}-b_{11}a_{11}-b_{12}a_{12}\\&=0,\end{aligned}$$

则 w_1 是 S 的一个 J-Lagrangian 元素。

定理 4 设定理 2 中的符号与假定成立,令

$$w_1=a_{11}e^1+a_{12}e^2+b_{11}e^3+b_{12}e^4,w_2=a_{21}e^1+a_{22}e^2+b_{21}e^3+b_{22}e^4,$$

则 $L=\operatorname{span}\{w_1,w_2\}$ 是 S 的一个完全 J-Lagrangian 子空间的充分必要条件是

$$a_{11}b_{21}+a_{12}b_{22}=b_{11}a_{21}+b_{12}a_{22}。$$

证明 由定理 3 可得,w_1 与 w_2 是 S 的 J-Lagrangian 元素,又由

$$[w_1:w_2]=[a_{11}e^1+a_{12}e^2+b_{11}e^3+b_{12}e^4:a_{21}e^1+a_{22}e^2+b_{21}e^3+b_{22}e^4]=a_{11}b_{21}+a_{12}b_{22}-b_{11}a_{21}-b_{12}a_{22},$$

则

$$[w_1:w_2]=0\Leftrightarrow a_{11}b_{21}+a_{12}b_{22}=b_{11}a_{21}+b_{12}a_{22}。$$

例 1 考虑复 J-辛空间 $S=\mathbb{C}^4$,设 $\{e^1,e^2,e^3,e^4\}$ 为 $S=\mathbb{C}^4$ 中的一组基,其 J-辛内积为

$$[e^1:e^3]=1,[e^3:e^1]=-1,[e^2:e^4]=1,[e^4:e^2]=-1,$$

其余 J-辛积全为零,对应反对称矩阵

$$\boldsymbol{H}=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\-1&0&0&0\\0&-1&0&0\end{pmatrix}。$$

令 $L=\operatorname{span}\{w_1,w_2\}$,其中

$$w_1=e^1+2e^2+3e^3+4e^4,w_2=2e^1+e^2+4e^3+3e^4,$$

由于 w_1, w_2 的组合系数满足

$$1\times 4+2\times 3=3\times 2+4\times 1,$$

因此根据定理4可得，$L=\mathrm{span}\{w_1, w_2\}$为$S$的一个完全J-Lagrangian子空间。

2.3　复J-辛空间$S=\mathbb{C}^6$中完全J-Lagrangian子空间的刻画

定理5　考虑复J-辛空间$S=\mathbb{C}^6$，设$\{e^1, e^2, e^3, e^4, e^5, e^6\}$为$S$的一组基且满足

$$[e^1 : e^4]=1, [e^4 : e^1]=-1, [e^2 : e^5]=1, [e^5 : e^2]=-1, [e^3 : e^6]=1, [e^6 : e^3]=-1,$$

其余J-辛积全为零，对应反对称矩阵

$$\boldsymbol{H}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

则有

（1）$L_1=\mathrm{span}\{e^1, e^2, e^3\}, L_2=\mathrm{span}\{e^2, e^3, e^4\}, L_3=\mathrm{span}\{e^3, e^4, e^5\},$

$L_4=\mathrm{span}\{e^4, e^5, e^6\}, L_5=\mathrm{span}\{e^1, e^2, e^6\}, L_6=\mathrm{span}\{e^1, e^5, e^6\},$

$L_7=\mathrm{span}\{e^1, e^3, e^5\}, L_8=\mathrm{span}\{e^2, e^4, e^6\},$

是$S=\mathbb{C}^6$中的完全J-Lagrangian子空间。

（2）L_1、L_2、L_3、L_4、L_5、L_6、L_7、L_8分别对应反对称矩阵$\boldsymbol{H}$中元素全为零的3阶子式

$$\boldsymbol{K}(1,2,3), \boldsymbol{K}(2,3,4), \boldsymbol{K}(3,4,5), \boldsymbol{K}(4,5,6),$$
$$\boldsymbol{K}(1,2,6), \boldsymbol{K}(1,5,6), \boldsymbol{K}(1,3,5), \boldsymbol{K}(2,4,6),$$

称L_1、L_2、L_3、L_4、L_5、L_6、L_7、L_8为$S=\mathbb{C}^6$中的基本完全J-Lagrangian子空间。

证明　（1）对于任意的$k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6\in\mathbb{C}$，

$$\begin{aligned}[L_1 : L_1] &= [k_1e^1+k_2e^2+k_3e^3 : k_4e^1+k_5e^2+k_6e^3] \\ &= k_1k_4[e^1 : e^1]+k_1k_5[e^1 : e^2]+k_1k_6[e^1 : e^3]+k_2k_4[e^2 : e^1]+k_2k_5[e^2 : e^2] \\ &\quad +k_2k_6[e^2 : e^3]+k_3k_4[e^3 : e^1]+k_3k_5[e^3 : e^2]+k_3k_6[e^3 : e^3] \\ &= 0,\end{aligned}$$

由定义2得，L_1是$S=\mathbb{C}^6$中的J-Lagrangian子空间。又因为$\dim L_1=n=3$，由引理3(2)可得，L_1是$S=\mathbb{C}^6$中的完全J-Lagrangian子空间，L_2、L_3、L_4、L_5、L_6、L_7、L_8同理可证。

（2）因为

$$\boldsymbol{H}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} [e^1 : e^1] & [e^1 : e^2] & [e^1 : e^3] & [e^1 : e^4] & [e^1 : e^5] & [e^1 : e^6] \\ [e^2 : e^1] & [e^2 : e^2] & [e^2 : e^3] & [e^2 : e^4] & [e^2 : e^5] & [e^2 : e^6] \\ [e^3 : e^1] & [e^3 : e^2] & [e^3 : e^3] & [e^3 : e^4] & [e^3 : e^5] & [e^3 : e^6] \\ [e^4 : e^1] & [e^4 : e^2] & [e^4 : e^3] & [e^4 : e^4] & [e^4 : e^5] & [e^4 : e^6] \\ [e^5 : e^1] & [e^5 : e^2] & [e^5 : e^3] & [e^5 : e^4] & [e^5 : e^5] & [e^5 : e^6] \\ [e^6 : e^1] & [e^6 : e^2] & [e^6 : e^3] & [e^6 : e^4] & [e^6 : e^5] & [e^6 : e^6] \end{pmatrix},$$

L_1、L_2、L_3、L_4分别对应反对称矩阵$\boldsymbol{H}$中元素全为零的3阶子式

$$\boldsymbol{K}(1,\ 2,\ 3),\ \boldsymbol{K}(2,\ 3,\ 4),\ \boldsymbol{K}(3,\ 4,\ 5),\ \boldsymbol{K}(4,\ 5,\ 6),$$

L_5对应取反对称矩阵$\boldsymbol{H}$中1、2、6行与1、2、6列的元素全为零的3阶子式$\boldsymbol{K}(1,2,6)$,同理L_6、L_7、L_8分别对应取反对称矩阵$\boldsymbol{H}$中的元素全为零的3阶子式$\boldsymbol{K}(1,5,6)$,$\boldsymbol{K}(1,3,5)$,$\boldsymbol{K}(2,4,6)$。

下面讨论一般情形。

定理6 设定理5中的符号与假定成立,令

$$w_1=a_{11}e^1+a_{12}e^2+a_{13}e^3+b_{11}e^4+b_{12}e^5+b_{13}e^6,$$

则w_1是S的一个J-Lagrangian元素。

证明 由

$$\begin{aligned}[w_1:w_1]&=[a_{11}e^1+a_{12}e^2+a_{13}e^3+b_{11}e^4+b_{12}e^5+b_{13}e^6:a_{11}e^1+a_{12}e^2+a_{13}e^3+b_{11}e^4+b_{12}e^5+b_{13}e^6]\\&=a_{11}b_{11}+a_{12}b_{12}+a_{13}b_{13}-b_{11}a_{11}-b_{12}a_{12}-b_{13}a_{13}\\&=0,\end{aligned}$$

则w_1是S的一个J-Lagrangian元素。

定理7 设定理5中的符号与假定成立,令

$$\begin{pmatrix}w_1\\w_2\\w_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^1\\e^2\\e^3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\\b_{31}&b_{32}&b_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^4\\e^5\\e^6\end{pmatrix},$$

且w_1,w_2,w_3是线性无关的J-Lagrangian元素,则$L=\mathrm{span}\{w_1,w_2,w_3\}$是$S$的一个完全J-Lagrangian子空间的充分必要条件是$\boldsymbol{AB}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{BA}^{\mathrm{T}}$,其中$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{3\times3}$,$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{3\times3}$。

证明 因为w_1,w_2,w_3是线性无关的J-Lagrangian元素,即$\dim L=3$,所以L是S的一个完全J-Lagrangian子空间的充分必要条件是

$$\begin{pmatrix}[w_1:w_1]&[w_1:w_2]&[w_1:w_3]\\[w_2:w_1]&[w_2:w_2]&[w_2:w_3]\\[w_3:w_1]&[w_3:w_2]&[w_3:w_3]\end{pmatrix}=\boldsymbol{O}\text{(其中}\boldsymbol{O}\text{为零矩阵)},$$

而

$$\begin{aligned}&\begin{pmatrix}[w_1:w_1]&[w_1:w_2]&[w_1:w_3]\\[w_2:w_1]&[w_2:w_2]&[w_2:w_3]\\[w_3:w_1]&[w_3:w_2]&[w_3:w_3]\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}\boldsymbol{H}\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\\b_{31}&b_{32}&b_{33}\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}\\&=\begin{pmatrix}0&\sum\limits_{k=1}^{3}a_{1k}b_{2k}-\sum\limits_{k=1}^{3}b_{1k}a_{2k}&\sum\limits_{k=1}^{3}a_{1k}b_{3k}-\sum\limits_{k=1}^{3}b_{1k}a_{3k}\\\sum\limits_{k=1}^{3}a_{2k}b_{1k}-\sum\limits_{k=1}^{3}b_{2k}a_{1k}&0&\sum\limits_{k=1}^{3}a_{2k}b_{3k}-\sum\limits_{k=1}^{3}b_{2k}a_{3k}\\\sum\limits_{k=1}^{3}a_{3k}b_{1k}-\sum\limits_{k=1}^{3}b_{3k}a_{1k}&\sum\limits_{k=1}^{3}a_{3k}b_{2k}-\sum\limits_{k=1}^{3}b_{3k}a_{2k}&0\end{pmatrix},\end{aligned}$$

则

$$\begin{pmatrix}[w_1:w_1]&[w_1:w_2]&[w_1:w_3]\\[w_2:w_1]&[w_2:w_2]&[w_2:w_3]\\[w_3:w_1]&[w_3:w_2]&[w_3:w_3]\end{pmatrix}=\boldsymbol{O}\Leftrightarrow\sum_{k=1}^{3}a_{ik}b_{jk}=\sum_{k=1}^{3}b_{ik}a_{jk},\ i,j=1,2,3,$$

即

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{AB}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{BA}^{\mathrm{T}}, \text{其中} \boldsymbol{A} = (a_{ij})_{3\times 3}, \boldsymbol{B} = (b_{ij})_{3\times 3}。$$

例 2　考虑复 J-辛空间 $S=\mathbb{C}^6$，设 $\{e^1, e^2, e^3, e^4, e^5, e^6\}$ 为 $S=\mathbb{C}^6$ 中的一组基，其 J-辛内积为

$$[e^1 : e^4] = 1, [e^4 : e^1] = -1, [e^2 : e^5] = 1, [e^5 : e^2] = -1, [e^3 : e^6] = 1, [e^6 : e^3] = -1,$$

其余 J-辛积全为零，对应反对称矩阵

$$\boldsymbol{H} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}。$$

令 $L = \mathrm{span}\{w_1, w_2, w_3\}$，其中

$$w_1 = e^1 + 2e^2 + 3e^3 + 4e^4 + 5e^5 + 6e^6,$$
$$w_2 = 3e^1 + e^2 + 2e^3 + 5e^4 + 6e^5 + 4e^6,$$
$$w_3 = 2e^1 + 3e^2 + e^3 + 6e^4 + 4e^5 + 5e^6,$$

由

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 4 \\ 6 & 4 & 5 \end{pmatrix},$$

故可得 $\boldsymbol{AB}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{BA}^{\mathrm{T}}$。

因此，根据定理 7 可得，$L = \mathrm{span}\{w_1, w_2, w_3\}$ 为 S 的一个完全 J-Lagrangian 子空间。

2.4　复 J-辛空间 $S=\mathbb{C}^{2n}$ 中完全 J-Lagrangian 子空间的刻画

定理 8　考虑复 J-辛空间 $S=\mathbb{C}^{2n}$，设 $\{e^1, e^2, \cdots, e^{2n}\}$ 为 S 的一组基且满足

$$[e^j : e^k] = 0, [e^{n+j} : e^{n+k}] = 0, [e^j : e^{n+k}] = \delta_{jk}, 1 \leqslant j, k \leqslant n,$$

对应反对称矩阵

$$\boldsymbol{H} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{I}_n \\ -\boldsymbol{I}_n & 0 \end{pmatrix},$$

则复 J-辛空间 $S=\mathbb{C}^{2n}$ 中的基本完全 J-Lagrangian 子空间对应反对称矩阵 $\boldsymbol{H}$ 中元素全为零的 n 阶子式，且基本完全 J-Lagrangian 子空间是成对出现的。

令

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \cdots \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^1 \\ e^2 \\ \cdots \\ e^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{n+1} \\ e^{n+2} \\ \cdots \\ e^{2n} \end{pmatrix},$$

且 $L = \mathrm{span}\{w_1, w_2, \cdots, w_n\}$ 是线性无关的 J-Lagrangian 元素，其中 $w_i \in S$, $i = 1, 2, \cdots, n$, 则 L 是 S 的一个完全 J-Lagrangian 子空间的充分必要条件是 $\boldsymbol{AB}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{BA}^{\mathrm{T}}$，其中 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{n\times n}$, $\boldsymbol{B} = (b_{ij})_{n\times n}$。

证明　因为 $w_i \in S$ 是线性无关的 J-Lagrangian 元素，$i = 1, 2, \cdots, n$，$\dim L = n$，所以 L 是 S 的一个

完全 J-Lagrangian 子空间的充分必要条件是

$$\begin{pmatrix} [w_1:w_1] & [w_1:w_2] & \cdots & [w_1:w_n] \\ [w_2:w_1] & [w_2:w_2] & \cdots & [w_2:w_n] \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ [w_n:w_1] & [w_n:w_2] & \cdots & [w_n:w_n] \end{pmatrix} = \boldsymbol{O}\text{（其中 }\boldsymbol{O}\text{ 为零矩阵），}$$

这里

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} [w_1:w_1] & [w_1:w_2] & \cdots & [w_1:w_n] \\ [w_2:w_1] & [w_2:w_2] & \cdots & [w_2:w_n] \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ [w_n:w_1] & [w_n:w_2] & \cdots & [w_n:w_n] \end{pmatrix} \\ =&\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} \boldsymbol{H} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \\ =&\begin{pmatrix} 0 & \sum\limits_{k=1}^{n} a_{1k}b_{2k} - \sum\limits_{k=1}^{n} b_{1k}a_{2k} & \cdots & \sum\limits_{k=1}^{n} a_{1k}b_{nk} - \sum\limits_{k=1}^{n} b_{1k}a_{nk} \\ \sum\limits_{k=1}^{n} a_{2k}b_{1k} - \sum\limits_{k=1}^{n} b_{2k}a_{1k} & 0 & \cdots & \sum\limits_{k=1}^{n} a_{2k}b_{nk} - \sum\limits_{k=1}^{n} b_{2k}a_{nk} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum\limits_{k=1}^{n} a_{nk}b_{1k} - \sum\limits_{k=1}^{n} b_{nk}a_{1k} & \sum\limits_{k=1}^{n} a_{nk}b_{2k} - \sum\limits_{k=1}^{n} b_{nk}a_{2k} & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

所以

$$\begin{pmatrix} [w_1:w_1] & [w_1:w_2] & \cdots & [w_1:w_m] \\ [w_2:w_1] & [w_2:w_2] & \cdots & [w_2:w_m] \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ [w_m:w_1] & [w_m:w_2] & \cdots & [w_m:w_m] \end{pmatrix} = \boldsymbol{O} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{jk} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik}a_{jk},\ i,j=1,2,\cdots,n,$$

即

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{A} = (a_{ij})_{n\times n},\ \boldsymbol{B} = (b_{ij})_{n\times n}。$$

定理 9 复 J-辛空间中的基本完全 J-Lagrangian 子空间有 2^n 个。

证明 由于复 J-辛空间 $S=\mathbb{C}^{2n}$ 中的一组基为 $\{e^1, e^2, \cdots, e^n, e^{n+1}, \cdots, e^{2n}\}$ 且满足

$$[e^j : e^k] = 0,\ [e^{n+j} : e^{n+k}] = 0,\ [e^j : e^{n+k}] = \delta_{jk},\ 1 \leqslant j, k \leqslant n,$$

而 $S=\mathbb{C}^{2n}$ 的基本完全 J-Lagrangian 子空间 L 对应反对称矩阵 $\boldsymbol{H}$ 中元素全为零的 n 阶子式，所以 e^j 与 e^{n+j} 不能同时存在，即 L 共有

$$\underbrace{C_2^1 \times C_2^1 \times C_2^1 \times \cdots \times C_2^1}_{n\text{个}} = 2^n\text{个。}$$

3 例子

由于高维复 J-辛空间 $S=\mathbb{C}^{2n}$ 中完全 J-Lagrangian 子空间的构造相对复杂，下面给出几个具体

例子。

例 3　考虑复 J-辛空间 $S=\mathbb{C}^{2n}$，设 $\{e^1,e^2,\cdots,e^{2n}\}$ 为 $S=\mathbb{C}^{2n}$ 中的一组基，其 J-辛内积为

$$[e^j:e^k]=0,\ [e^{n+j}:e^{n+k}]=0,\ [e^j:e^{n+k}]=\delta_{jk},\ 1\leqslant j,k\leqslant n,$$

对应反对称矩阵

$$\boldsymbol{H}=\begin{pmatrix}0 & \boldsymbol{I}_n\\ -\boldsymbol{I}_n & 0\end{pmatrix}。$$

令 $L=\operatorname{span}\{w_1,w_2,\cdots,w_n\}$，其中

$$w_1=e^1+e^{n+1},\ w_2=e^2+e^{n+2},\ \cdots,\ w_n=e^n+e^{2n},$$

因为

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&0&\cdots&0\\0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&0\\0&0&0&\cdots&1\end{pmatrix},$$

所以满足 $\boldsymbol{AB}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{BA}^{\mathrm{T}}$，由定理 8 可知，$L$ 为 $S=\mathbb{C}^{2n}$ 中的完全 J-Lagrangian 子空间。

例 4　与例 3 所定义的符号和假定相同，令 $L=\operatorname{span}\{w_1,w_2,\cdots,w_n\}$，其中

$$w_1=e^1+\mathrm{i}e^{n+1},\ w_2=e^2+\mathrm{i}e^{n+2},\ \cdots,\ w_n=e^n+\mathrm{i}e^{2n},$$

因为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0&\cdots&0\\0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&0\\0&0&0&\cdots&1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\mathrm{i}&0&0&\cdots&0\\0&\mathrm{i}&0&\cdots&0\\0&0&\mathrm{i}&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&0\\0&0&0&\cdots&\mathrm{i}\end{pmatrix},$$

所以满足 $\boldsymbol{AB}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{BA}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}=\mathrm{i}\boldsymbol{I}$，由定理 8 可知，$L$ 为 $S=\mathbb{C}^{2n}$ 中的完全 J-Lagrangian 子空间。

例 5　与例 3 所定义的符号和假定相同，令 $L=\operatorname{span}\{w_1,w_2,\cdots,w_n\}$，其中

$$w_1=(\mathrm{i}+1)e^1+(\mathrm{i}-1)e^{n+1},\ w_2=(\mathrm{i}+1)e^2+(\mathrm{i}-1)e^{n+2},\ \cdots,\ w_n=(\mathrm{i}+1)e^n+(\mathrm{i}-1)e^{2n},$$

因为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\mathrm{i}+1&0&0&\cdots&0\\0&\mathrm{i}+1&0&\cdots&0\\0&0&\mathrm{i}+1&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&\mathrm{i}+1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\mathrm{i}-1&0&0&\cdots&0\\0&\mathrm{i}-1&0&\cdots&0\\0&0&\mathrm{i}-1&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&\mathrm{i}-1\end{pmatrix},$$

所以 $\boldsymbol{AB}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{BA}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=-2\boldsymbol{I}$，由定理 8 可知，$L$ 为 $S=\mathbb{C}^{2n}$ 中的完全 J-Lagrangian 子空间。

参考文献：

[1]　曹之江．常微分算子[M]．北京：科学出版社，2016：41-59.

[2]　GESZTESY F，LITTLEJOHN L L，NICHOLS R. On self-adjoint boundary conditions for singular Sturm-Liouville operators bounded from below[J]. Journal of Differential Equations，2020，269(9)：6448-6491.

[3]　罗佩芳，黄赞．一类具有转换条件且两端边界条件带谱参数的 J-自伴算子[J]．广东技术师范大学学报，2020，41(3)：44-48.

[4]　WANG W Y. Complex J-symplectic Geometry with application to ordinary differential operators[J]. 数学进展，

2001,30(3):277-278.

[5] 王万义,孙炯. 高阶常型微分算子自伴域的辛几何刻划[J]. 应用数学,2003,16(1):17-22.

[6] YAO S Q,SUN J,ZETTL A. Self-adjoint domains,symplectic geometry,and limit-circle solutions[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications,2013,397(2):644-657.

[7] YAO S Q,SUN J,ZETTL A. Symplectic geometry and dissipative differential operators[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications,2014,414(1):434-449.

[8] EVERITT W N,MARKUS L. Complex symplectic geometry with applications to ordinary differential operators [J]. Transactions of the American Mathematical Society,1999,351(12):4905-4945.

[9] EVERITT W N,MARKUS L. Boundary value problems and symplectic algebra for ordinary differential and Quasi-differential operators[M]. Providence:American Mathematical Society Publisher,1999.

[10] 王万义. 微分算子的辛结构与一类微分算子的谱分析[D]. 呼和浩特:内蒙古大学,2002.

[11] 刘婷. 复辛空间中完全Lagrangian子空间以及耗散子空间的构造[D]. 呼和浩特:内蒙古大学,2022.

[12] 苏雅其其格,姚斯琴. 复辛空间 $\mathbb{C}^2$,$\mathbb{C}^4$ 中的完全Lagrangian子空间的分类[J]. 内蒙古大学学报(自然科学版),2023,54(6):581-592.

[13] 张禾瑞,郝鈵新. 高等代数[M]. 北京:高等教育出版社,2007:120-121.

(责任编委　李　宏)

Characterization of Complete J-Lagrangian Subspaces on Complex J-Symplectic Spaces

SHI Jingmin,YAO Siqin,SU Wenhui

(*School of Mathematical Sciences*, *Inner Mongolia University*, *Hohhot* 010021, *China*)

Abstract: The characterization of complete J-Lagrangian subspaces on complex J-symplectic space from low order to high order is given. The necessary and sufficient condition for a subspace on complex J-symplectic space to be a complete J-Lagrangian subspaces is researched and a few simple examples of complete J-Lagrangian subspace on complex J-symplectic space is given.

Key words: complex J-symplectic space; complete J-Lagrangian subspace; J-self-adjoint operator