

Mikusiński算符域上的拓扑再构造(I)*

田月超, 罗成

(内蒙古大学数学科学学院, 呼和浩特 010021)

摘要:从实数轴上某点左侧几乎处处为零的Lebesgue局部可积函数全体出发,将其作为基本函数引出一系列的函数空间以及乘积空间,通过在乘积空间中赋予等价关系得到3个代数同构的商空间;在函数空间与乘积空间上赋予拓扑,得到这些空间中具有的一些基本性质,为后续Mikusiński算符域 F 的研究奠定了基础。

关键词:Lebesgue局部可积函数;乘积空间;商空间

中图分类号:O29 **文献标志码:**A

在Mikusiński算符理论中,定义在 $[0, +\infty)$ 上的复值连续函数 $f=\{f(t)\}$ 全体是一个无零因子交换环,作为基本函数可以将其扩充成一个分式域^[1-2],即著名的Mikusiński算符域 F 。若把实数轴上某点左侧几乎处处为零的Lebesgue局部可积函数全体作为基本函数,在卷积乘法下也是一个无零因子环,它所生成的商域也是Mikusiński算符域 F 。本文从Lebesgue局部可积函数全体出发,引出一系列函数空间以及乘积空间,通过在乘积空间中赋予等价关系得到3个不同形式的商空间,并在Boehme^[3]的基础上证明了3个商空间是代数同构的,其中,商空间 \mathcal{Y}/R 正是Mikusiński算符域 F 。此外,基于Boehme^[3]给出的方程组的逼近解的存在性,本文将这一结果从 \mathcal{C} 空间推广到了 $L[0, 1]$ 空间。

1 基本概念和符号

1.1 函数空间

定义1^[4] 设 \mathcal{C} 是定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上且在某点左侧几乎处处为零的复值连续函数 $f=\{f(t)\}$ 的全体,以加法和数乘及其卷积 $f \cdot g = \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(s-t)dt \right\}$ 作为基本运算。

记 \mathcal{L} 表示实数轴上某点左侧几乎处处为零的Lebesgue局部可积函数全体,其中几乎处处相等的函数视为同一元素。对于 $f \in \mathcal{L}$,Boehme在文献[3]中给出了支集数 $\Lambda(f)$ 的概念,即

$$\Lambda(f) = \sup \{ \sigma : f(t) = 0 \text{ a.e. } -\infty < t < \sigma \} \in (-\infty, +\infty),$$

称之为 f 的支集数。

记 $\mathcal{L}_N = \{f \in \mathcal{L} : \Lambda(f) \geq -N\}$, $N=0, 1, 2, \dots$ 。对于 $f \in \mathcal{L}_N$ 以及 $K > 0$,记

$$\|f\|_{[-N, K]} = \int_{-N}^K |f(t)| dt,$$

其中, $\|\cdot\|_{[-N, K]}$ 是 \mathcal{L}_N 上的半范数。由这些半范数族在 \mathcal{L}_N 上诱导出的拓拓扑记为 T_N ,称之为局部平均收

* 收稿日期:2024-05-14; 修回日期:2024-10-22

基金项目:国家自然科学基金项目(12061050);内蒙古自然科学基金项目(2020MS01004)

作者简介:田月超(1999—),女,河北张家口人,2022级硕士研究生。E-mail:32236114@mail.imu.edu.cn

通信作者:罗成(1964—),男,内蒙古乌兰察布人,副教授,硕士。主要从事泛函分析的研究。E-mail:

18547111575@163.com

敛拓扑, (\mathcal{L}_N, T_N) 是局部凸的 Fréchet 空间。 (f_n) 依拓扑 T_N 收敛到 f , 简记为 $f_n \xrightarrow{T_N} f$ 。特别地, 对 $f \in \mathcal{L}_0$ 以及 $K > 0$, 简记 $\|f\|_K = \|f\|_{[0, K]}$ 。记 $\mathcal{L}_{0,0} = \{f \in \mathcal{L} : \Lambda(f) = 0\}$, T_0 在 $\mathcal{L}_{0,0}$ 中的相对拓扑记为 $T_{0,0}$ 。

因为 $\mathcal{L}_N \subsetneq \mathcal{L}_{N+1}$, $T_N = T_{N+1}|_{\mathcal{L}_N}$ 且 $\mathcal{L} = \bigcup_{N=0}^{\infty} \mathcal{L}_N$, $N = 0, 1, 2, \dots$, 所以根据文献[5], 在 \mathcal{L} 上由 (T_N) 生成一个局部凸严格归纳极限拓扑, 记为 T 。

记 $\chi = \{(a, b) \in \mathcal{L} \times \mathcal{L}, b \neq 0\}$, $\mathcal{Y} = \{(a, b) \in \mathcal{L}_0 \times \mathcal{L}_0, b \neq 0\}$, $\mathcal{Z} = \mathcal{L} \times \mathcal{L}_{0,0}$, 对于 $N = 0, 1, 2, \dots$, $\mathcal{Z}_N = \mathcal{L}_N \times \mathcal{L}_{0,0}$, 赋予 \mathcal{Z} 乘积拓扑 $T \times T_{0,0}$ [6], 赋予 \mathcal{Z}_N 乘积拓扑 $T_N \times T_{0,0}$ 。

1.2 Mikusiński 算符域

给出关于有限区间上的 Lebesgue 局部可积函数的 Titchmarsh 定理。

引理 1 (Titchmarsh 定理)[7] 设 f 和 g 是 $[0, K]$ 上的 Lebesgue 可积函数, 且 $\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau = 0$ 在 $[0, K]$ 中几乎处处成立, 则 $f=0$ 在 $[0, t_1]$ 中几乎处处成立, 且 $g=0$ 在 $[0, t_2]$ 中几乎处处成立, 其中 $t_1 + t_2 \geq K$ 。

由引理 1 以及正数 K 的任意性可知, \mathcal{L}_0 关于加法和卷积乘法是一个无零因子交换环[8], 它扩张而成的商域 F 正是 Mikusiński 算符域(见文献[9]), 而且在如下等价关系下可表示为不同形式的商域。定义关系

$$R = \{(a, b), (c, d)\} \in \chi \times \chi : ad = bc\},$$

显然 R 是一个等价关系[10], 用符号 $(a, b) \sim (c, d)$ 表示二者相互等价。当 R 为 \mathcal{Y} , \mathcal{Z} 和 \mathcal{Z}_N 中的等价关系时使用相同的符号, 这样关系 R 生成 4 个商空间 χ/R , \mathcal{Y}/R , \mathcal{Z}/R 和 \mathcal{Z}_N/R 。根据 Boehme 在文献[3]中给出的支集数 Λ 的如下性质, 可以赋予它们分式加法和分式卷积乘法运算, 前 3 个商空间都是商域; 对每个自然数 N , 后者都是线性子空间, 特别是当 $N=0$ 时, 它是子代数。其中 \mathcal{Y}/R 正是 Mikusiński 算符域 F 。

支集数具有如下性质(见文献[3]): 设 $a, b \in \mathcal{L}$, 则

- (1) $\Lambda(ab) = \Lambda(a) + \Lambda(b)$;
- (2) $\Lambda(a+b) \geq \min\{\Lambda(a), \Lambda(b)\}$;
- (3) $\Lambda(\frac{a}{b}) = \Lambda(a) - \Lambda(b)$ 。

在连续函数为基本函数的背景下, Boehme 在文献[3]中已经指出了 3 个商域的同构关系。在此我们以局部可积函数作为基本函数得出了类似的结论。这里先给出关于移动算符的相关引理:

引理 2[1] 若 $\{f(t)\}$ 是函数类 \mathcal{L} 中的任意函数, 则有

$$h^\lambda \{f(t)\} = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < \lambda \\ f(t-\lambda), & \lambda \leq t \end{cases}.$$

定理 1 商空间 χ/R , \mathcal{Y}/R 和 \mathcal{Z}/R 是代数同构的。用符号“ \cong ”表示同构, 即 $\chi/R \cong \mathcal{Y}/R \cong \mathcal{Z}/R$ 。

证明 首先证明 $\mathcal{Z}/R \cong \chi/R$, 定义

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{Z}/R &\rightarrow \chi/R, \\ \varphi([c, d]) &= [c, d]_\chi, \end{aligned}$$

其中, $[c, d] \in \mathcal{Z}/R$ 表示 (c, d) 在 \mathcal{Z} 中的等价类; $[c, d]_\chi \in \chi/R$ 表示 (c, d) 在 χ 中的等价类。

(1) 与代表元的选取无关, 若 $(c', d') \in [c, d]$, 则 $[c', d']_\chi = [c, d]_\chi$ 。

任取 $(a, b) \in [c, d]_\chi$, $(a', b') \in [c', d']_\chi$, 则 $(a, b) \sim (c, d) \sim (c', d') \sim (a', b')$, 所以 $[c', d']_\chi = [c, d]_\chi$ 。

(2) φ 是满射。

任意的 $[a, b] \in \mathcal{X}/R$, 设 $\Lambda(b) = \lambda$, 则 $(h^{-\lambda}a, h^{-\lambda}b) \in \mathcal{Z}$, 并且有 $(h^{-\lambda}a, h^{-\lambda}b) \sim (a, b)$, 所以 $\varphi([h^{-\lambda}a, h^{-\lambda}b]) = [h^{-\lambda}a, h^{-\lambda}b]_{\mathcal{X}} = [a, b]_{\mathcal{X}}$.

(3) φ 是单射。

若 $[c, d]_{\mathcal{X}} = [c', d']_{\mathcal{X}}, (c, d), (c', d') \in \mathcal{Z}$, 则 $(c, d) \sim (c', d')$, 故 $[c, d] = [c', d']$ 。

(4) φ 保持加法运算。

任取 $(a, b), (c, d) \in \mathcal{Z}$, 则

$$\begin{aligned} \varphi([a, b] + [c, d]) &= \varphi([ad + bc, bd]) = [ad + bc, bd]_{\mathcal{X}} \\ &= [a, b]_{\mathcal{X}} + [c, d]_{\mathcal{X}} = \varphi([a, b]) + \varphi([c, d]). \end{aligned}$$

(5) 保持乘法运算。

任取 $(a, b), (c, d) \in \mathcal{Z}$, 则

$$\varphi([a, b] \cdot [c, d]) = \varphi([ac, bd]) = [ac, bd]_{\mathcal{X}} = [a, b]_{\mathcal{X}} [c, d]_{\mathcal{X}} = \varphi([a, b]) \varphi([c, d]).$$

综上得 $\mathcal{Z}/R \cong \mathcal{X}/R$ 。

接下来证明 $\mathcal{Y}/R \cong \mathcal{X}/R$, 定义

$$\begin{aligned} \psi : \mathcal{Y}/R &\rightarrow \mathcal{X}/R, \\ \psi([c, d]_{\mathcal{Y}}) &= [c, d]_{\mathcal{X}}, \end{aligned}$$

其中, $[c, d]_{\mathcal{Y}} \in \mathcal{Y}/R$ 表示 (c, d) 在 \mathcal{Y} 中的等价类; $[c, d]_{\mathcal{X}} \in \mathcal{X}/R$ 表示 (c, d) 在 \mathcal{X} 中的等价类。与 φ 映射同理可证, ψ 的定义与代表元 (c, d) 的选取无关, 并且 ψ 是单射, 保持加法和乘法运算, 下面证明 ψ 是满射。

任取 $[a, b] \in \mathcal{X}/R$, 设 $\Lambda(a) = \lambda, \Lambda(b) = \mu$, 则有 $\Lambda(h^{|\mu|+|\lambda|}a) = |\mu| + |\lambda| + \lambda \geq 0, \Lambda(h^{|\lambda|+|\mu|}b) = |\lambda| + |\mu| + \mu \geq 0$, 所以 $(h^{|\mu|+|\lambda|}a, h^{|\lambda|+|\mu|}b) \in \mathcal{Y}$ 且 $(h^{|\mu|+|\lambda|}a, h^{|\lambda|+|\mu|}b) \sim (a, b)$, 故 $\psi([h^{|\mu|+|\lambda|}a, h^{|\lambda|+|\mu|}b]_{\mathcal{Y}}) = [h^{|\mu|+|\lambda|}a, h^{|\lambda|+|\mu|}b]_{\mathcal{X}} = [a, b]_{\mathcal{X}}$ 。

综上, φ 和 ψ 是同构映射, 即 $\mathcal{Z}/R \cong \mathcal{X}/R, \mathcal{Y}/R \cong \mathcal{X}/R$, 由传递性可知, $\mathcal{Z}/R \cong \mathcal{X}/R \cong \mathcal{Y}/R$ 。证明完成。

2 基本引理和性质

本节主要研究函数空间以及乘积空间的基本性质。 \mathcal{L}_0 上的卷积乘法是二元连续的; \mathcal{L}_0 中的一个固定元素卷积相乘 \mathcal{L}_N 中的任意元素是一个连续线性变换; \mathcal{L} 上的卷积乘法是单侧连续的, 但它是二元序列连续的; 特别指出, 在乘积空间 \mathcal{Z} 中每个等价类 $[a, b]$ 都是闭集。首先给出如下引理, 其不等式容易证明。

引理 3^[11] 设 $x, y \in \mathcal{L}_0, K > 0$, 则 $\|xy\|_K \leq \|x\|_K \cdot \|y\|_K$, 这说明在 \mathcal{L}_0 上的卷积乘法是二元连续的。

定理 2 设 $y \in \mathcal{L}_0, K > 0$, 对任意 $x \in \mathcal{L}_N$, 有 $\|xy\|_{[-N, K]} \leq \|x\|_{[-N, K]} \cdot \|y\|_{K+N}$, 这说明线性变换 $(x, y) \mapsto xy$ 是从 $\mathcal{L}_N \times \mathcal{L}_0$ 到 \mathcal{L}_N 的连续变换。

证明 令 $s = t + N$,

$$\|xy\|_{[-N, K]} = \int_{-N}^K \left| \int_{-N}^t x(\tau)y(t-\tau)d\tau \right| dt = \int_0^{K+N} \left| \int_{-N}^{s-N} x(\tau)y(s-N-\tau)d\tau \right| ds,$$

令 $\sigma = \tau + N$, 代入上式得

$$\begin{aligned} \int_0^{K+N} \left| \int_0^s x(\sigma-N)y(s-\sigma)d\sigma \right| ds &= \int_0^{K+N} \left| \int_0^s (h^N x)(\sigma)y(s-\sigma)d\sigma \right| ds \\ &= \|(h^N x)y\|_{K+N} \leq \|(h^N x)\|_{K+N} \cdot \|y\|_{K+N} = \|x\|_{[-N, K]} \cdot \|y\|_{K+N}. \end{aligned}$$

定理3 设 $r_0 \in \mathcal{L}$, 则 \mathcal{L} 上的线性变换 $x \mapsto r_0 x$ 是连续的。

证明 设 $r_0 \neq 0$, 记 $\Lambda(r_0) = \lambda, N$ 是自然数, $x \in \mathcal{L}_N, K > |\lambda|$ 。根据定理2,

$$\|r_0 x\|_{[\lambda-N, K]} = \|h^{-\lambda} r_0 h^\lambda x\|_{[\lambda-N, K]} \leq \|h^{-\lambda} r_0\|_{K+N-\lambda} \cdot \|h^\lambda x\|_{[\lambda-N, K]},$$

令 $\tau = t - \lambda$,

$$\|h^\lambda x\|_{[\lambda-N, K]} = \int_{\lambda-N}^K |x(t-\lambda)| dt = \int_{-N}^{K-\lambda} |x(\tau)| d\tau = \|x\|_{[-N, K-\lambda]},$$

所以 $\|r_0 x\|_{[\lambda-N, K]} \leq \|h^{-\lambda} r_0\|_{K+N-\lambda} \cdot \|x\|_{[-N, K-\lambda]}$, 对任意的 $K > |\lambda|$ 成立, 这说明从 \mathcal{L}_N 到 \mathcal{L} 的线性变换 $x \mapsto r_0 x$ 是连续的。根据文献[5]中关于归纳极限拓扑的定理13-1-8可知, 线性变换 $x \mapsto r_0 x$ 在 \mathcal{L} 上是连续的。

定理4 \mathcal{L} 上的卷积乘法是二元序列连续的。

证明 设 (x_n) 按照 \mathcal{L} 的严格归纳极限拓扑 T 收敛于 x , 而且 (y_n) 依拓扑 T 收敛于 y , 则存在正整数 N , 使得 $x, y \in \mathcal{L}_N$ 且 $(x_n), (y_n) \subset \mathcal{L}_N$ 。由于 $\Lambda(x_n y_n) \geq -2N$, 有 $x_n y_n \in \mathcal{L}_{2N}$ 。注意到定理3中的不等式, 若将 λ 替换为 $-N$, 得出不等式 $\|r_0 x\|_{[-2N, K]} \leq \|r_0\|_{[-N, K+N]} \cdot \|x\|_{[-N, K+N]}$ 。那么, 对任意的 $K > 0$, 由于 $(\|x_n\|_{[-N, K+N]})$ 是有界数列, 有

$$\begin{aligned} \|x_n y_n - xy\|_{[-2N, K]} &\leq \|x_n(y_n - y)\|_{[-2N, K]} + \|y(x_n - x)\|_{[-2N, K]} \\ &\leq \|x_n\|_{[-N, K+N]} \cdot \|y_n - y\|_{[-N, K+N]} + \|y\|_{[-N, K+N]} \cdot \|x_n - x\|_{[-N, K+N]} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

所以 $x_n y_n \xrightarrow{T} xy$, 结论成立。

根据文献[3], 同样可以证明如下的结论。

引理4 设 $(a_0, b_0), (a, b) \in \mathcal{Z}$, 且 $a_0 b = ab_0$, 对于 $\varepsilon > 0, K > 0$, 则存在 $r \in \mathcal{L}_{0,0}$ 使得

$$\begin{cases} \|a_0 r - a\|_K < \varepsilon \\ \|b_0 r - b\|_K < \varepsilon \end{cases}$$

证明 设 $\Lambda(a) = \Lambda(a_0) < +\infty$, 因为 $a_0 b = ab_0$, 所以 $\Lambda(a) - \Lambda(b) = \Lambda(a_0) - \Lambda(b_0)$ 。而 $\Lambda(b_0) = \Lambda(b) = 0$, 有 $\Lambda(a) = \Lambda(a_0)$ 。

(1) 先证明当 $\Lambda(a) = \Lambda(a_0) = 0$ 时结论正确, 设 $K = 1$ 。

假若存在 $r_0 \in \mathcal{L}_0$, 使得

$$\|a_0 r_0 - a\|_1 < \varepsilon/2, \|b_0 r_0 - b\|_1 < \varepsilon/2 \quad (1)$$

由于 $\mathcal{L}_{0,0}$ 在 \mathcal{L}_0 中稠密, 取 $r \in \mathcal{L}_{0,0}$ 使得

$$\|r_0 - r\|_1 < \frac{\varepsilon}{2(\|a_0\|_1 + \|b_0\|_1)},$$

于是

$$\begin{aligned} \|a_0 r - a\|_1 &\leq \|a_0(r - r_0)\|_1 + \|a_0 r_0 - a\|_1 \\ &\leq \|a_0\|_1 \|r - r_0\|_1 + \|a_0 r_0 - a\|_1 < \varepsilon. \end{aligned}$$

同理 $\|b_0 r - b\|_1 < \varepsilon$ 。所以只需证明存在 $r_0 \in \mathcal{L}_0$, 使得(1)式成立。

特别强调, 空间 $L[0, 1]$ 的对偶空间是 $L^\infty[0, 1]$, 为了方便起见, $L[0, 1]$ 上的连续线性泛函与 $L^\infty[0, 1]$ 中的函数使用同一符号。另外, 在 $L[0, 1]$ 上的限制性卷积定义为

$$(f \times g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau) d\tau, t \in [0, 1], f, g \in L[0, 1].$$

它满足交换律、结合律、分配律, 而且

$$\int_0^1 |(f \times g)(t)| dt \leq \int_0^1 |f(t)| dt \cdot \int_0^1 |g(t)| dt,$$

所以 $L[0, 1]$ 是一个 Banach 代数。令 T 是 $L[0, 1]$ 到 $L[0, 1] \times L[0, 1]$ 的线性算子, 定义

$$T(r) = \begin{pmatrix} A_0(r) \\ B_0(r) \end{pmatrix},$$

其中 $A_0(r) = a_0 \cdot r, B_0(r) = b_0 \cdot r$, 将 a_0, b_0 限制在 $[0, 1]$ 上并使用同样的符号。 T 的伴随算子 $T^* : T^*(x^*, y^*) = A_0^*(x^*) + B_0^*(y^*)$, 其中 $x^*, y^* \in L^\infty[0, 1], A_0^*$ 是 A_0 的伴随算子, B_0^* 是 B_0 的伴随算子。

设 $x \in L[0, 1], x^* \in L^\infty[0, 1]$, 因为 $\langle x, A_0^* x^* \rangle = \langle A_0 x, x^* \rangle = \langle a_0 \cdot x, x^* \rangle$, 于是

$$\begin{aligned} \langle a_0 \cdot x, x^* \rangle &= \int_0^1 [a_0 \cdot x(t)] \overline{x^*(t)} dt \\ &= \int_0^1 \overline{x^*(t)} dt \int_0^t a_0(t - \tau) x(\tau) d\tau = \int_0^1 x(\tau) d\tau \int_\tau^1 \overline{x^*(t)} a_0(t - \tau) dt \end{aligned} \tag{2}$$

令 $t = 1 - \sigma$, 得

$$\int_0^1 x(\tau) d\tau \int_\tau^1 \overline{x^*(t)} a_0(t - \tau) dt = \int_0^1 x(\tau) d\tau \int_0^{1-\tau} \overline{x^*(1 - \sigma)} a_0(1 - \sigma - \tau) d\sigma,$$

令 $\tau = 1 - t$, 得

$$\int_0^1 x(\tau) d\tau \int_0^{1-\tau} \overline{x^*(1 - \sigma)} a_0(1 - \sigma - \tau) d\sigma = \int_0^1 x(1 - t) dt \int_0^t \overline{x^*(1 - \sigma)} a_0(t - \sigma) d\sigma,$$

令 $s(t) = 1 - t$, 得

$$\int_0^1 x(1 - t) dt \int_0^t \overline{x^*(1 - \sigma)} a_0(t - \sigma) d\sigma = \int_0^1 x(s(t)) dt \int_0^t \overline{x^*(s(\sigma))} a_0(t - \sigma) d\sigma,$$

令 $S(x^*)(t) = x^*(s(t)), S(x)(t) = x(s(t))$, 得

$$\int_0^1 S(x)(t) dt \int_0^t \overline{S(x^*)(\sigma)} a_0(t - \sigma) d\sigma = \langle S(x), a_0 \overline{S(x^*)} \rangle = \langle S(x), A_0 \overline{S(x^*)} \rangle.$$

因为

$$\langle x, S^*(x^*) \rangle = \langle S(x), x^* \rangle = \int_0^1 S(x)(t) \overline{x^*(t)} dt = \int_0^1 x(1 - t) \overline{x^*(t)} dt,$$

令 $1 - t = \tau$, 得

$$\int_0^1 x(\tau) \overline{x^*(1 - \tau)} d\tau = \int_0^1 x(\tau) S(\overline{x^*})(\tau) d\tau = \langle x, \overline{S(x^*)} \rangle,$$

所以 $S^* = \overline{S}$, 故(2)式可写成 $\langle x, \overline{S} A_0 \overline{S}(x^*) \rangle$, 从而 $\langle x, A_0^* x^* \rangle = \langle x, \overline{S} A_0 \overline{S}(x^*) \rangle$, 即 $A_0^* = \overline{S} A_0 \overline{S}$ 。同理 $B_0^* = \overline{S} B_0 \overline{S}$ 。

根据文献[12], T 的值域的闭包 $\overline{R(T)}$ 是 T^* 的零空间的正交补, 即 $\overline{R(T)} = \mathcal{N}^\perp(T^*)$ 。显然 $R(T) \subset \{(c, d) : a_0 \cdot d = c \cdot b_0, (c, d) \in L[0, 1] \times L[0, 1]\} = U$ 。由于 $L[0, 1]$ 是 Banach 代数, 其上的限制性卷积运算是二元连续的, 可知 U 是 $L[0, 1] \times L[0, 1]$ 的一个闭子集。现在只需证明 $U \subset \mathcal{N}^\perp(T^*)$ 。

取 $(x^*, y^*) \in \mathcal{N}^\perp(T^*)$, 则 $A_0^*(x^*) + B_0^*(y^*) = 0$, 从而

$$\overline{S}(A_0 \overline{S}(x^*) + B_0 \overline{S}(y^*)) = \overline{S} A_0 \overline{S}(x^*) + \overline{S} B_0 \overline{S}(y^*) = 0.$$

因为 \overline{S} 是双射, 所以 $A_0 \overline{S}(x^*) + B_0 \overline{S}(y^*) = 0$, 从而有 $a_0 \cdot \overline{S}(x^*) + b_0 \cdot \overline{S}(y^*) = 0$ 。

任取 $(c, d) \in U$, 即 $a_0 \cdot d = b_0 \cdot c$, 那么

$$a_0 \cdot d \cdot \bar{S}(y^*) = b_0 \cdot c \cdot \bar{S}(y^*) = c \cdot b_0 \cdot \bar{S}(y^*) = -c \cdot a_0 \cdot \bar{S}(x^*),$$

所以

$$a_0 \cdot (d \cdot \bar{S}(y^*) + c \cdot \bar{S}(x^*)) = a_0 \cdot d \cdot \bar{S}(y^*) + c \cdot a_0 \cdot \bar{S}(x^*) = 0.$$

因为 $\Delta(a) = 0$, 由引理 1 得, $d \cdot \bar{S}(y^*) + c \cdot \bar{S}(x^*) = 0$, 即对任意的 $t \in [0, 1]$,

$$\int_0^t c(t-\tau) \bar{x}^*(1-\tau) d\tau + \int_0^t d(t-\tau) \bar{y}^*(1-\tau) d\tau = 0.$$

取 $t = 1$, 则

$$\int_0^1 c(1-\tau) \bar{x}^*(1-\tau) d\tau + \int_0^1 d(1-\tau) \bar{y}^*(1-\tau) d\tau = 0.$$

令 $\tau = 1 - t$, 则

$$\int_0^1 c(t) \bar{x}^*(t) dt + \int_0^1 d(t) \bar{y}^*(t) dt = 0,$$

所以 $\langle c, x^* \rangle + \langle d, y^* \rangle = 0$ 。因此 $(c, d) \in \mathcal{N}^\perp(T^*)$, 故 $U \subset \mathcal{N}^\perp(T^*) = \overline{R(T)}$, 从而 $\overline{R(T)} = R(T)$ 。结论成立。

(2) 设 $\Delta(a) = \Delta(a_0) = \lambda \neq 0$ 。由 (1) 的证明, 对任意的 $K > |\lambda|$, $\epsilon > 0$, 取 $K' > K + |\lambda|$, 存在 $r \in \mathcal{L}_{0,0}$, 使得

$$\begin{cases} \int_0^{K'} |h^{-\lambda} a_0 r(t) - h^{-\lambda} a(t)| dt < \epsilon \\ \int_0^{K'} |b_0 r(t) - b(t)| dt < \epsilon \end{cases},$$

于是

$$\begin{aligned} \int_\lambda^K |a_0 r(t) - a(t)| dt &= \int_0^{K-\lambda} |h^{-\lambda} a_0 r(t) - h^{-\lambda} a(t)| dt \\ &\leq \int_0^{K'} |h^{-\lambda} a_0 r(t) - h^{-\lambda} a(t)| dt < \epsilon, \\ \int_\lambda^K |b_0 r(t) - b(t)| dt &\leq \int_0^K |b_0 r(t) - b(t)| dt < \epsilon. \end{aligned}$$

所以引理得证。

定理 5 若 $(a_0, b_0) \in \mathcal{Z}$, 则 $[a_0, b_0] = \overline{\{(a_0 r, b_0 r) : r \in \mathcal{L}_{0,0}\}}$ 。

证明 设 $\Delta(a_0) \geq -N$, 因为 $\Delta(r) = 0$, 所以 $\{(a_0 r, b_0 r) : r \in \mathcal{L}_{0,0}\} \subset \mathcal{Z}_N$ 。因为 \mathcal{Z} 上的拓扑诱导的 \mathcal{Z}_N 的拓扑即为 \mathcal{Z}_N 的原拓扑, 并且闭子空间 \mathcal{Z}_N 是可度量的, 所以序列闭包等同于闭包。由于 $(a_0, b_0) \in \mathcal{Z}_N$, 从而 $[a_0, b_0] \subset \mathcal{Z}_N$, 要证 $[a_0, b_0]$ 在 \mathcal{Z} 中闭只需证明 $[a_0, b_0]$ 在 \mathcal{Z}_N 中闭。任取 $(a_n, b_n) \subset [a_0, b_0]$, 且 $(a_n, b_n) \rightarrow (c, d) \in \mathcal{Z}_N$, 即 $a_n \xrightarrow{T_N} c, b_n \xrightarrow{T_{0,0}} d$ 。对任意的 $T > 0$, 由定理 3 可得,

$$\begin{aligned} \|a_0 d - b_0 c\|_{[-N, K]} &\leq \|a_0(d - b_n)\|_{[-N, K]} + \|(a_n - c)b_0\|_{[-N, K]} \\ &\leq \|a_0\|_{[-N, K]} \|d - b_n\|_{T+K} + \|a_n - c\|_{[-N, K]} \|b_0\|_{K+N} \end{aligned}$$

令 $n \rightarrow \infty$ 得 $\|a_0 d - b_0 c\|_{[-N, K]} = 0$ 。所以 $a_0 d = b_0 c$, 从而 $[a_0, b_0]$ 在 \mathcal{Z}_N 中闭。

显然 $\{(a_0 r, b_0 r) : r \in \mathcal{L}_{0,0}\} \subset [a_0, b_0]$ 。由引理 4 可得, 对每个 $(a, b) \in [a_0, b_0]$, (a, b) 都存在 $\mathcal{L}_{0,0}$ 中的序列 (r_n) 使得 $(a_0 r_n, b_0 r_n)$ 收敛到 (a, b) , 故 $[a_0, b_0] \subset \overline{\{(a_0 r, b_0 r) : r \in \mathcal{L}_{0,0}\}}$, 则 $[a_0, b_0] = \overline{\{(a_0 r, b_0 r) : r \in \mathcal{L}_{0,0}\}}$ 。证明完成。

以上是关于实数轴上某点左侧几乎处处为零的Lebesgue局部可积函数全体作为基本函数所生成的函数空间以及乘积空间的一些基本性质,这也为接下来Mikusiński算符域 F 上拓扑的构造奠定了基础。

参考文献:

- [1] 米库辛斯基. 算符演算[M]. 王建午,译. 上海:上海科学技术出版社,1964.
- [2] 王鲜,罗成. Mikusinski算符演算及其在梁的静力学中的应用[J]. 内蒙古大学学报(自然科学版),2024,55(1):22-28.
- [3] BOEHME T K. The Mikusiński operators as a topological space[J]. American Journal of Mathematics, 1976, 98(4):55-66.
- [4] 贾秀梅,李永军,杨继超. 更一般的常系数线性差分微分方程的解[J]. 西南大学学报(自然科学版),2015(1):79-83.
- [5] WILANSKY A. Modern methods in topological vector spaces[M]. North Chelmsford: Courier Corporation, 2013.
- [6] 宋斐斐,苏恒迪,马巧云. 几种常见拓扑空间的拓扑性质研究[J]. 产业与科技论坛,2021,20(17):56-57.
- [7] MIKUSINSKI J. A new proof of Titchmarsh's theorem on convolution [J]. Studia Mathematica, 1953, 13(1):56-58.
- [8] 陈祥恩. 无零因子环的刻画及各种环的例子[J]. 吉首大学学报(自然科学版),2010,31(2):1-2.
- [9] MIKUSINSKI J. Operational calculus[M]. New York:Pergamon Press, 1959.
- [10] 于强. 等价关系与集合分类角度下的商群与商环[J]. 湖南科技学院学报,2018,39(5):1-3.
- [11] BURZYK J. On convergence in the Mikusiński operational calculus [J]. Studia Mathematica, 1983, 75(3):313-333.
- [12] TAYLOR A E, LAY D C. Introduction to functional analysis[M]. Malabar:Krieger Publishing Co, Inc, 1986.

(责任编辑 李宏)

Topological Reconstructions on Mikusiński Operator Fields (I)

TIAN Yuechao, LUO Cheng

(School of Mathematical Sciences, Inner Mongolia University, Hohhot 010021, China)

Abstract: The Lebesgue local product function which is zero almost everywhere to the left of a point on the real number axis was considered as a basic function to lead to a series of function spaces and product spaces. By assigning equivalence relations to the product spaces, three algebraically isomorphic quotient spaces were obtained, and by assigning topology to the function spaces and product spaces, some basic properties of these spaces were obtained. The results lay the foundation for the subsequent study of Mikusiński operator fields.

Key words: Lebesgue locally integrable function; the product space; the quotient space