

# 具有非理想界面准晶层合梁的振动和弯曲研究\*

于新宇<sup>1</sup>, 郭俊宏<sup>1,2</sup>, 王浩田<sup>1</sup>, 孙托娅<sup>2</sup>

(1. 内蒙古工业大学理学院, 呼和浩特 010051;

2. 内蒙古工业大学航空学院, 呼和浩特 010051)

**摘要:**采用广义线性弹簧模型模拟层与层之间的非理想界面, 结合微分求积法和状态空间法, 研究具有非理想界面准晶层合梁在各种边界条件下的自由振动和静态弯曲问题。建立准晶层合梁模型, 通过传递矩阵法, 获得具有非理想界面准晶层合梁的固有频率、振型和广义位移的半解析半数值解。通过数值算例, 分析非理想界面参数、边界条件和叠层顺序对准晶层合梁的固有频率、振型和广义位移的影响。研究表明, 非理想界面的出现降低了准晶层合梁的刚度。

**关键词:**准晶; 层合梁; 非理想界面; 状态空间法; 微分求积法

**中图分类号:**O34 **文献标志码:**A

1984年, Shechtman等<sup>[1]</sup>首次在急冷凝固的Al-Mn合金中发现了具有5次旋转对称性, 但不具有平移对称性的新型固体, 并将这种固体称为准晶。准晶是一种既不同于晶体也不同于非晶体的固体结构<sup>[2]</sup>, 其内部原子按准周期方式排列。这种结构使准晶具备了很多优良性质, 比如低导热性、高硬度、耐磨性和耐腐蚀性等<sup>[3]</sup>。因此, 准晶在硬质耐磨涂层、增强复合材料、太阳能薄膜和表面改性材料<sup>[4-6]</sup>中有广泛的应用。

准晶层合板与层合梁作为一种重要的复合材料结构, 以其轻质高强和优异的比模量特性而备受瞩目。近年来, 针对这两种结构的力学行为的研究已成为当下广泛关注的热点<sup>[7-13]</sup>。然而, 学者在研究准晶层合梁问题时更多使用伪Stroh公式法和状态空间法, 这两种方法只能求解简支边界条件下的准晶层合梁问题。在工程实际中更常见的是混合边界条件问题, 因此主要运用微分求积法解决各种边界条件下的准晶层合梁问题。赵延军等<sup>[14]</sup>使用微分求积法对准晶板的状态方程进行离散, 研究了准晶板的屈曲和振动问题。Sun等<sup>[15]</sup>使用微分求积-状态空间法研究了各种边界条件下的一维准晶三明治梁静态变形和自由振动问题。

目前, 关于准晶层合结构的研究倾向于将界面假设为理想沾黏, 然而在实际应用中界面处可能因微裂纹或孔洞的存在而产生滑移现象。因此, 研究具有非理想界面准晶层状复合材料结构的力学行为更接近于工程实际。Kuo等<sup>[16]</sup>通过直接微观力学方法研究了具有非理想界面的多层多铁复合材料的宏观行为。Wang等<sup>[17]</sup>对具有非理想界面的一维六方准晶层状板的静态弯曲和振动特性进行了研究, 分析非理想界面对位移、应力和固有频率的影响。Feng等<sup>[18]</sup>研究了具有非理想界面的立方准晶多层板, 利用伪Stroh公式法得到多层板的静态变形和自由振动响应。王磊等<sup>[19]</sup>基于Gurtin-Murdoch

\* 收稿日期:2024-09-16; 修回日期:2025-03-07

**基金项目:**国家自然科学基金项目(12462007, 12262029); 内蒙古自治区科技计划项目(2021GG0254); 内蒙古自治区直属高校基本科研业务费项目(JY20220075); 内蒙古工业大学科研启动金项目(DC2300001274); 内蒙古自治区研究生科研创新项目(B20231101Z)

**作者简介:**于新宇(2000—), 女, 黑龙江大庆人, 2022级硕士研究生。E-mail: 1771938589@qq.com

**通信作者:**孙托娅(1993—), 女(蒙古族), 内蒙古赤峰人, 讲师, 博士。主要从事复合材料力学研究。E-mail: TuoyaSun@imut.edu.cn

表/界面模型,研究了具有非理想界面的稀土准晶纳米涂层圆夹杂增强复合材料的反平面剪切问题。

现有文献大多是关于具有非理想界面的板问题研究,对梁结构的研究较少。准晶层合梁作为一种新型的结构材料,在航空航天、汽车、建筑等领域有着广泛的应用。研究非理想界面对其力学行为的影响,有助于更准确地测量结构的安全性和稳定性。目前关于非理想界面对准晶层合梁的力学行为的影响尚未见报道。因此,本文通过建立准晶层合梁模型,采用微分求积法和状态空间法(SSDQM)研究具有非理想界面的准晶层合梁在各种边界条件下(简支梁(S-S)、一端固定梁一端简支梁(C-S)、两端固定梁(C-C))的自由振动和静态弯曲问题,分析非理想界面参数、边界条件和叠层顺序对固有频率、振型和广义位移的影响,为准晶层状复合材料设计与结构优化提供理论依据。

### 1 一维准晶的状态方程和微分求积法

一维准晶的本构方程和运动学方程如下<sup>[20]</sup>

$$\begin{aligned} \sigma_{xz} &= C_{55} \left( \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) + R_{15} \frac{\partial w_z}{\partial x}, H_{zx} = R_{15} \left( \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) + K_{11} \frac{\partial w_z}{\partial x} \\ \sigma_{zz} &= C_{13} \frac{\partial u_x}{\partial x} + C_{33} \frac{\partial u_z}{\partial z} + R_{33} \frac{\partial w_z}{\partial z}, H_{zz} = R_{31} \frac{\partial u_x}{\partial x} + R_{33} \frac{\partial u_z}{\partial z} + K_{33} \frac{\partial w_z}{\partial z} \\ \sigma_{xx} &= C_{11} \frac{\partial u_x}{\partial x} + C_{13} \frac{\partial u_z}{\partial z} + R_{31} \frac{\partial w_z}{\partial z} \\ \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} \\ \frac{\partial H_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial H_{zz}}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 w_z}{\partial t^2} \end{aligned} \tag{1}$$

$$\tag{2}$$

其中  $u_x$  和  $u_z$  是声子场位移;  $w_z$  是相位子场位移;  $C_{11}, C_{13}, C_{33}$  和  $C_{55}$  是声子场弹性系数;  $K_{11}$  和  $K_{33}$  是相位子场弹性系数;  $R_{15}, R_{31}$  和  $R_{33}$  是声子场和相位子场耦合弹性系数;  $\sigma_{xx}, \sigma_{zz}$  和  $\sigma_{xz}$  是声子场应力;  $H_{zz}$  和  $H_{zx}$  是相位子场应力;  $\rho$  是密度。对于动力学问题,式(2)为运动学方程;对于静力学问题,位移分量与时间  $t$  无关,故式(2)的右端变为 0。

本文考虑具有非理想界面的一维六方准晶层合梁的自由振动和静态弯曲问题,梁的长度为  $l$ , 宽度为  $b$ , 如图 1 所示。准晶的准周期方向沿  $z$  轴正向。对于层数  $j$ , 通过下表面  $x_z^{(j)-}$  和上表面  $x_z^{(j)+}$  相结合, 其厚度为  $h_j = x_z^{(j)+} - x_z^{(j)-}$ , 总厚度为  $H = h_1 + h_2 + \dots + h_N$ 。其中“+”和“-”分别表示每层的上表面和下表面。假设层与层之间的界面是非理想状态。当研究振动问题时,梁的上下表面应力自由;当研究弯曲问题时,梁的上表面受  $z$  方向声子场均布载荷。

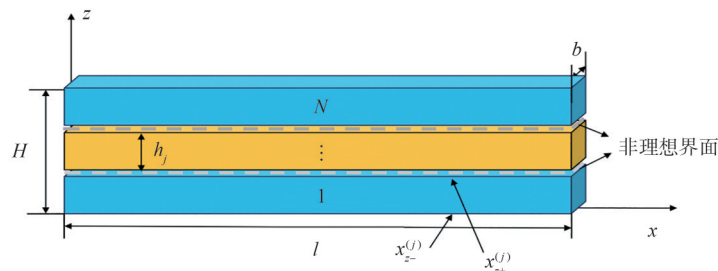


图 1 具有非理想界面的一维六方准晶层合梁

Fig. 1 One-dimensional hexagonal quasicrystal laminated beam with imperfect interfaces

在制备准晶层合梁的过程中,层与层之间不能处于完美接触、沾黏状态,界面处易产生分层或者滑移现象<sup>[21]</sup>。本文运用广义线性弹簧模型模拟非理想界面,该模型应力连续,位移不连续。基于准晶层合梁的层与层之间的界面是非理想状态,在界面处边界条件为<sup>[22]</sup>

$$\begin{aligned}\sigma_{zx}^{(j+1)} &= \sigma_{zx}^{(j)} = [u_x^{(j+1)} - u_x^{(j)}] / R_1^{(j)} \\ \sigma_{zz}^{(j+1)} &= \sigma_{zz}^{(j)} = [u_z^{(j+1)} - u_z^{(j)}] / R_2^{(j)} \\ H_{zz}^{(j+1)} &= H_{zz}^{(j)} = [\omega_z^{(j+1)} - \omega_z^{(j)}] / R_3^{(j)}\end{aligned}\quad (3)$$

其中  $R_i^{(j)} (i=1, 2, 3)$  为非理想界面参数, 为了避免材料的物理内嵌, 假设  $z$  方向的非理想界面参数  $R_2^{(j)} = 0^{[22]}$ 。

根据本构方程(1)和运动学方程(2), 可得一维六方准晶层合梁的状态方程为

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_x}{\partial z} &= \frac{1}{C_{55}} \sigma_{zx} - \frac{\partial u_z}{\partial x} - \frac{R_{15}}{C_{55}} \frac{\partial \omega_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} - \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} \\ \frac{\partial H_{zz}}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial t^2} + \left( \frac{R_{15}^2}{C_{55}} - K_{11} \right) \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial x^2} - \frac{R_{15}}{C_{55}} \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x}, \quad \frac{\partial u_z}{\partial z} = \frac{R_{33}}{b} H_{zz} - \frac{a_1}{b} \frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{K_{33}}{b} \sigma_{zz} \\ \frac{\partial \omega_z}{\partial z} &= \frac{a_2}{b} \frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{C_{33}}{b} H_{zz} + \frac{R_{33}}{b} \sigma_{zz}, \quad \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} - \left( C_{11} + \frac{R_{31}a_2 - C_{13}a_1}{b} \right) \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} - \frac{a_2}{b} \frac{\partial H_{zz}}{\partial x} + \frac{a_1}{b} \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial x}\end{aligned}\quad (4)$$

其中  $a_1 = R_{31}R_{33} - C_{13}K_{33}$ ,  $a_2 = R_{31}C_{33} - R_{33}C_{13}$  和  $b = R_{33}^2 - C_{33}K_{33}$ ;  $u_x, \sigma_{zz}, H_{zz}, u_z, \omega_z$  和  $\sigma_{zx}$  是状态变量。剩余变量  $\sigma_{zx}$  和  $H_{zx}$  可由状态变量表达为

$$\begin{aligned}\sigma_{zx} &= \left( C_{11} + \frac{R_{31}a_2 - C_{13}a_1}{b} \right) \frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{a_2}{b} H_{zz} + \frac{a_1}{b} \sigma_{zz} \\ H_{zx} &= \frac{R_{15}}{C_{55}} \sigma_{zx} + \left( K_{11} - \frac{R_{15}^2}{C_{55}} \right) \frac{\partial \omega_z}{\partial x}\end{aligned}\quad (5)$$

运用微分求积法<sup>[15]</sup>, 对状态方程(4)进行离散, 表达为

$$\frac{d}{dz} u_{xi} = - \sum_{k=1}^N W_{ik}^{(1)} u_{zk} - \frac{R_{15}}{C_{55}} \sum_{k=1}^N W_{ik}^{(1)} \omega_{zk} + \frac{1}{C_{55}} \sigma_{xzi} \quad (6a)$$

$$\frac{d}{dz} \sigma_{zxi} = - \rho \omega^2 u_{zi} - \sum_{k=1}^N W_{ik}^{(1)} \sigma_{zxk} \quad (6b)$$

$$\frac{d}{dz} H_{zxi} = - \rho \omega^2 \omega_{zi} + \left( \frac{R_{15}^2}{C_{55}} - K_{11} \right) \sum_{k=1}^N W_{ik}^{(2)} \omega_{zk} - \frac{R_{15}}{C_{55}} \sum_{k=1}^N W_{ik}^{(1)} \sigma_{zxk} \quad (6c)$$

$$\frac{d}{dz} u_{zi} = - \frac{a_1}{b} \sum_{k=1}^N W_{ik}^{(1)} u_{xk} - \frac{K_{33}}{b} \sigma_{zxi} + \frac{R_{33}}{b} H_{zxi} \quad (6d)$$

$$\frac{d}{dz} \omega_{zi} = \frac{a_2}{b} \sum_{k=1}^N W_{ik}^{(1)} u_{xk} + \frac{R_{33}}{b} \sigma_{zxi} - \frac{C_{33}}{b} H_{zxi} \quad (6e)$$

$$\frac{d}{dz} \sigma_{xzi} = - \rho \omega^2 u_{xi} - \left( C_{11} + \frac{R_{31}a_2 - C_{13}a_1}{b} \right) \sum_{k=1}^N W_{ik}^{(2)} u_{xk} + \frac{a_1}{b} \sum_{k=1}^N W_{ik}^{(1)} \sigma_{zxi} - \frac{a_2}{b} \sum_{k=1}^N W_{ik}^{(1)} H_{zxi} \quad (6f)$$

其中  $i=1, \dots, N$ 。此外, 式(5)中的  $\sigma_{zx}$  和  $H_{zx}$  可表达为

$$\sigma_{xzi} = \left( C_{11} + \frac{R_{31}a_2 - C_{13}a_1}{b} \right) \sum_{k=1}^N W_{ik}^{(1)} u_{xk} - \frac{a_2}{b} H_{zxi} + \frac{a_1}{b} \sigma_{zxi} \quad (7a)$$

$$H_{zxi} = \frac{R_{15}}{C_{55}} \sigma_{xzi} + \left( K_{11} - \frac{R_{15}^2}{C_{55}} \right) \sum_{k=1}^N W_{ik}^{(1)} \omega_{zk} \quad (7b)$$

引入状态向量  $[\delta]$  为

$$[\delta] = [u_x^T, \sigma_{zz}^T, H_{zz}^T, u_z^T, \omega_z^T, \sigma_{zx}^T]^T \quad (8)$$

其中状态向量为

$$\begin{aligned}u_x &= [u_{x1}, u_{x2}, \dots, u_{xN}]^T, \quad \sigma_{zz} = [\sigma_{zz2}, \sigma_{zz3}, \dots, \sigma_{zzN-1}]^T, \quad H_{zz} = [H_{zz2}, H_{zz3}, \dots, H_{zzN-1}]^T \\ u_z &= [u_{z2}, u_{z3}, \dots, u_{zN-1}]^T, \quad \omega_z = [\omega_{z2}, \omega_{z3}, \dots, \omega_{zN-1}]^T, \quad \sigma_{zx} = [\sigma_{zx1}, \sigma_{zx2}, \dots, \sigma_{zxN}]^T\end{aligned}\quad (9)$$

离散后式(3)可用矩阵表示

$$[\delta(x_z^{(j+1)})] = P_j [\delta(x_z^{(j)})] \tag{10}$$

非理想传递矩阵  $P_j$  为

$$P_j = \begin{bmatrix} I_N & 0 & 0 & 0 & 0 & \overline{R}_1^{(j)} \\ 0 & I_{N-2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{N-2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \overline{R}_2^{(j)} & 0 & I_{N-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \overline{R}_3^{(j)} & 0 & I_{N-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_N \end{bmatrix} \tag{11}$$

其中  $I_N$  为  $N$  阶单位矩阵,  $I_{N-2}$  为  $N-2$  阶单位矩阵,  $\overline{R}_1^{(j)}$ 、 $\overline{R}_2^{(j)}$ 、 $\overline{R}_3^{(j)}$  为非理想传递矩阵中的子矩阵, 分别为

$$\begin{aligned} \overline{R}_1^{(j)} &= \text{diag} [\overline{R}_{1,1}^{(j)}, \overline{R}_{1,2}^{(j)}, \dots, \overline{R}_{1,N}^{(j)}], R_1^{(j)} = \text{diag} [R_{1,1}^{(j)}, R_{1,2}^{(j)}, \dots, R_{1,N}^{(j)}] \\ \overline{R}_2^{(j)} &= \text{diag} [\overline{R}_{2,2}^{(j)}, \overline{R}_{2,3}^{(j)}, \dots, \overline{R}_{2,N-1}^{(j)}], R_2^{(j)} = \text{diag} [R_{2,2}^{(j)}, R_{2,3}^{(j)}, \dots, R_{2,N-1}^{(j)}] \\ \overline{R}_3^{(j)} &= \text{diag} [\overline{R}_{3,2}^{(j)}, \overline{R}_{3,3}^{(j)}, \dots, \overline{R}_{3,N-1}^{(j)}], R_3^{(j)} = \text{diag} [R_{3,2}^{(j)}, R_{3,3}^{(j)}, \dots, R_{3,N-1}^{(j)}] \end{aligned} \tag{12}$$

$$\overline{R}_i^{(j)} = \frac{R_i^{(j)} H}{C_{55}}, (i = 1, 2), \overline{R}_3^{(j)} = \frac{R_3^{(j)} H}{K_{11}} \tag{13}$$

若  $\overline{R}_i^{(j)}$  为零矩阵, 则  $P_j$  为单位矩阵, 此时准晶层合梁为理想界面。准晶梁的末端包含简支、固支两种类型, 根据这两种类型, 准晶梁包含 3 种边界类型: 简支梁(S-S)、一端固定梁一端简支梁(C-S)和两端固定梁(C-C)。S-S 准晶梁的边界条件<sup>[15]</sup>如下, 其他边界条件见文献[15]。

$$\begin{aligned} u_{z1} = u_{zN} = 0, \omega_{z1} = \omega_{zN} = 0, \sigma_{xx1} = \sigma_{xxN} = 0 \\ -\frac{a_2}{b} H_{zz1} + \frac{a_1}{b} \sigma_{zz1} = -\left(C_{11} + \frac{R_{31}a_2 - C_{13}a_1}{b}\right) \sum_{k=1}^N W_{1k}^{(1)} u_{xk} \\ -\frac{a_2}{b} H_{zzN} + \frac{a_1}{b} \sigma_{zzN} = -\left(C_{11} + \frac{R_{31}a_2 - C_{13}a_1}{b}\right) \sum_{k=1}^N W_{Nk}^{(1)} u_{xk} \end{aligned} \tag{14}$$

## 2 自由振动和静态弯曲的半解析半数值解

3 种边界条件准晶层合梁的半解析半数值解推导过程相似, 这部分将以 S-S 梁为例介绍推导过程, 其他边界条件的推导见文献[15]。将式(14)代入式(6)中, 可以推导出简支梁的状态方程为

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} u_{xi} &= -\sum_{k=2}^{N-1} W_{ik}^{(1)} u_{zk} - \frac{R_{15}}{C_{55}} \sum_{k=2}^{N-1} W_{ik}^{(1)} \omega_{zk} + \frac{1}{C_{55}} \sigma_{zxi}, \quad i = 1, \dots, N \\ \frac{d}{dz} \sigma_{zzi} &= -\rho\omega^2 u_{zi} - \sum_{k=1}^N W_{ik}^{(1)} \sigma_{zrk}, \quad i = 2, \dots, N-1 \\ \frac{d}{dz} H_{zzi} &= -\rho\omega^2 \omega_{zi} + \left(\frac{R_{15}^2}{C_{55}} - K_{11}\right) \sum_{k=2}^{N-1} W_{ik}^{(2)} \omega_{zk} - \frac{R_{15}}{C_{55}} \sum_{k=1}^N W_{ik}^{(1)} \sigma_{zk}, \quad i = 2, \dots, N-1 \\ \frac{d}{dz} u_{zi} &= -\frac{a_1}{b} \sum_{k=1}^N W_{ik}^{(1)} u_{xk} - \frac{K_{33}}{b} \sigma_{zzi} + \frac{R_{33}}{b} H_{zzi}, \quad i = 2, \dots, N-1 \\ \frac{d}{dz} \omega_{zi} &= \frac{a_2}{b} \sum_{k=1}^N W_{ik}^{(1)} u_{xk} + \frac{R_{33}}{b} \sigma_{zzi} - \frac{C_{33}}{b} H_{zzi}, \quad i = 2, \dots, N-1 \\ \frac{d}{dz} \sigma_{zxi} &= -\rho\omega^2 u_{xi} - \left(C_{11} + \frac{R_{31}a_2 - C_{13}a_1}{b}\right) \sum_{k=1}^N (W_{ik}^{(2)} + W_{1k}^{(1)} W_{i1}^{(1)} + W_{Nk}^{(1)} W_{iN}^{(1)}) u_{xk} \\ &\quad + \frac{a_1}{b} \sum_{k=2}^{N-1} W_{ik}^{(1)} \sigma_{zrk} - \frac{a_2}{b} \sum_{k=2}^{N-1} W_{ik}^{(1)} H_{zrk}, \quad i = 1, \dots, N \end{aligned} \tag{15}$$

将简支梁状态方程(15)简写成矩阵形式

$$\frac{d}{dz}[\delta] = M[\delta] \quad (16)$$

运用非理想边界条件式(3)得出式(16)的解为

$$[\delta(H)] = S[\delta(0)] \quad (17)$$

其中  $S$  为整体传递矩阵,即

$$S = \exp[M_N h_N] P_{N-1} \exp[M_{N-1} h_{N-1}] P_{N-2} \cdots \exp[M_2 h_2] P_1 \exp[M_1 h_1] \quad (18)$$

其中  $P_j (j=1, 2, \dots, N-1)$  为非理想界面的传递矩阵,见式(11)。若  $\bar{R}_i^{(j)}$  为零矩阵,则  $P_j$  为单位矩阵,这时可退化为具有理想界面的准晶层合梁,这与文献[15]所得结果一致。

### 2.1 自由振动

对于S-S准晶层合梁的自由振动问题,梁的上下表面应力自由,故式(17)变为

$$\begin{bmatrix} u_x(H) \\ 0 \\ 0 \\ u_z(H) \\ w_z(H) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ S_{51} & S_{52} & S_{53} & S_{54} & S_{55} & S_{56} \\ S_{61} & S_{62} & S_{63} & S_{64} & S_{65} & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x(0) \\ 0 \\ 0 \\ u_z(0) \\ w_z(0) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (19)$$

将式(19)进一步简化为

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{21} & S_{24} & S_{25} \\ S_{31} & S_{34} & S_{35} \\ S_{61} & S_{64} & S_{65} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x(0) \\ u_z(0) \\ w_z(0) \end{bmatrix} \quad (20)$$

将求得的频率再次代入式(20),可以得到准晶层合梁中任意一层的振型。

### 2.2 静态弯曲

对于静态弯曲问题,梁的底层应力自由,梁的顶层承受  $z$  方向声子场均布载荷  $\sigma_{zz}$ 。因此,式(17)可转化为

$$\begin{bmatrix} u_x(H) \\ \sigma_{zz}(H) \\ 0 \\ u_z(H) \\ w_z(H) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ S_{51} & S_{52} & S_{53} & S_{54} & S_{55} & S_{56} \\ S_{61} & S_{62} & S_{63} & S_{64} & S_{65} & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x(0) \\ 0 \\ 0 \\ u_z(0) \\ w_z(0) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (21)$$

将式(21)简化,得到

$$\begin{bmatrix} \sigma_{zz}(H) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{21} & S_{24} & S_{25} \\ S_{31} & S_{34} & S_{35} \\ S_{61} & S_{64} & S_{65} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x(0) \\ u_z(0) \\ w_z(0) \end{bmatrix} \quad (22)$$

将求得的广义位移重新代入式(22),可以得到准晶梁中任意一层的广义位移。C-S和C-C准晶层合梁的解推导过程与上述类似,不再赘述。

## 3 数值算例

三明治结构为工程中常见的一种结构,本文主要研究准晶三明治梁的自由振动和静态弯曲问题,梁的每一层都是均匀的,梁的层数  $j=3$ 。在数值算例中,分析由两种材料系数不同的准晶材料组成的三明治梁,其中一种准晶是一维六方准晶 Al-Ni-Co(QC1),另一种准晶的材料系数是假设的,其材料系数<sup>[15]</sup>如表1所示。叠层顺序为 QC1/QC2/QC1和QC2/QC1/QC2,层与层之间是非理想界面。在界面之间建立厚度为零的弹簧模型,位移可以跳跃,应力是连续的。为了避免材料的物理内嵌,假设

$R_2^{(j)}$ 为零矩阵。为书写方便,令式(12)中  $R_{1,1}^{(j)} = R_{1,2}^{(j)} = \dots = R_{1,N}^{(j)} = R^{(a)}$  和  $R_{3,2}^{(j)} = R_{3,3}^{(j)} = \dots = R_{3,N-1}^{(j)} = R^{(b)}$ 。假设层与层之间非理想程度是相同的,即  $R^{(a)} = R^{(b)} = R^{(lm)}$ 。

表1 准晶 Al-Ni-Co (QC1)和 QC2的材料系数( $C_{ij}$ ,  $K_{ij}$ 和  $R_{ij}$ 的单位: $10^9 \text{ N/m}^2$ ,  $\rho$ 的单位: $10^3 \text{ kg/m}^3$ )  
Table 1 Material coefficients of QC1 and QC2 ( $C_{ij}$ ,  $K_{ij}$  and  $R_{ij}$  in units of  $10^9 \text{ N/m}^2$ ,  $\rho$  in unit of  $10^3 \text{ kg/m}^3$ )

准晶	材料系数								
	$C_{11}$	$C_{13}$	$C_{33}$	$C_{55}$	$K_{11}$	$K_{33}$	$R_{15}=R_{33}$	$R_{31}$	$\rho$
QC1	234.33	66.63	232.22	70	24	122	8.846	8.846	4.168
QC2	150	90	130	50	0.18	0.3	1.2	1.5	4.168

### 3.1 非理想界面对自由振动的影响

为了验证当前层合梁的准确性,将本文得到的结果与伪 Stroh 公式法得到的精确解<sup>[11]</sup>进行对比,结果如表2所示,可见本文模型所得结果与已有精确解吻合很好。

表2 准晶层合梁 QC1/QC2/QC1 的固有频率  
Table 2 Natural frequencies of QC1/QC2/QC1 laminated beams

结果	阶数			
	1	2	3	4
精确解 <sup>[11]</sup>	0.2641	0.7966	0.9968	1.5513
本文解	0.2639	0.7967	0.9950	1.5516

为了保证数值的稳定性,下面数值算例中,离散点的类型采用 Chebyshev-Gauss-Lobatto<sup>[23]</sup>离散点,离散点个数为  $N=16$ 。当  $R^{(lm)}=0$  时,界面处于理想状态,本文结果与 SSDQ 法<sup>[15]</sup>第一阶固有频率非常吻合。

分析具有非理想界面两种叠层顺序准晶层合梁的固有频率,准晶层合梁的尺寸  $h/l=0.1$ ,两种叠层顺序为 QC1/QC2/QC1 和 QC2/QC1/QC2。表3显示具有非理想界面的两种叠层顺序准晶层合梁的第一阶固有频率。从表3中可知,当非理想界面参数相同时,固有频率按 S-S、C-S、C-C 的顺序依次增加。当边界条件相同时,固有频率随着非理想界面参数的增加而减小,非理想界面的产生会降低准晶层合梁的刚度。QC1/QC2/QC1 层合梁的所有频率均比 QC2/QC1/QC2 层合梁高,表明 QC1 材料刚度大,外层为硬质材料的三明治结构具有更好的力学性能。

表3 具有非理想界面的两种叠层顺序准晶层合梁的第一阶固有频率

Table 3 First order natural frequencies of two stacked sequential QC laminated beams with imperfect interfaces

边界条件	QC1/QC2/QC1			QC2/QC1/QC2		
	$R^{(lm)}=0$	$R^{(lm)}=0.2$	$R^{(lm)}=0.4$	$R^{(lm)}=0$	$R^{(lm)}=0.2$	$R^{(lm)}=0.4$
S-S	0.2639	0.2613	0.2587	0.1754	0.1747	0.1740
C-S	0.4018	0.3891	0.3808	0.2805	0.2671	0.2456
C-C	0.5586	0.5361	0.5169	0.3734	0.3678	0.3624

图2和图3显示在各种边界条件下两种叠层顺序的准晶层合梁在  $x/l=0.5$  处沿厚度方向的第一阶振型。由图2和图3可知,当边界条件相同时,非理想界面参数和叠层顺序对声子场振型影响较小,对相位子场振型影响较大,表明非理想界面参数增加,准晶层合梁层与层之间的强度降低,整体结构的稳定性降低。图4显示在两种不同的叠层顺序下 S-S 梁沿其长度方向的声子场与相位子场的振型。由图4可知,S-S 梁由于其边界条件的对称性,其振型图也呈对称分布。随着非理想界面参数的增大,准晶层合梁的变形程度更加明显。

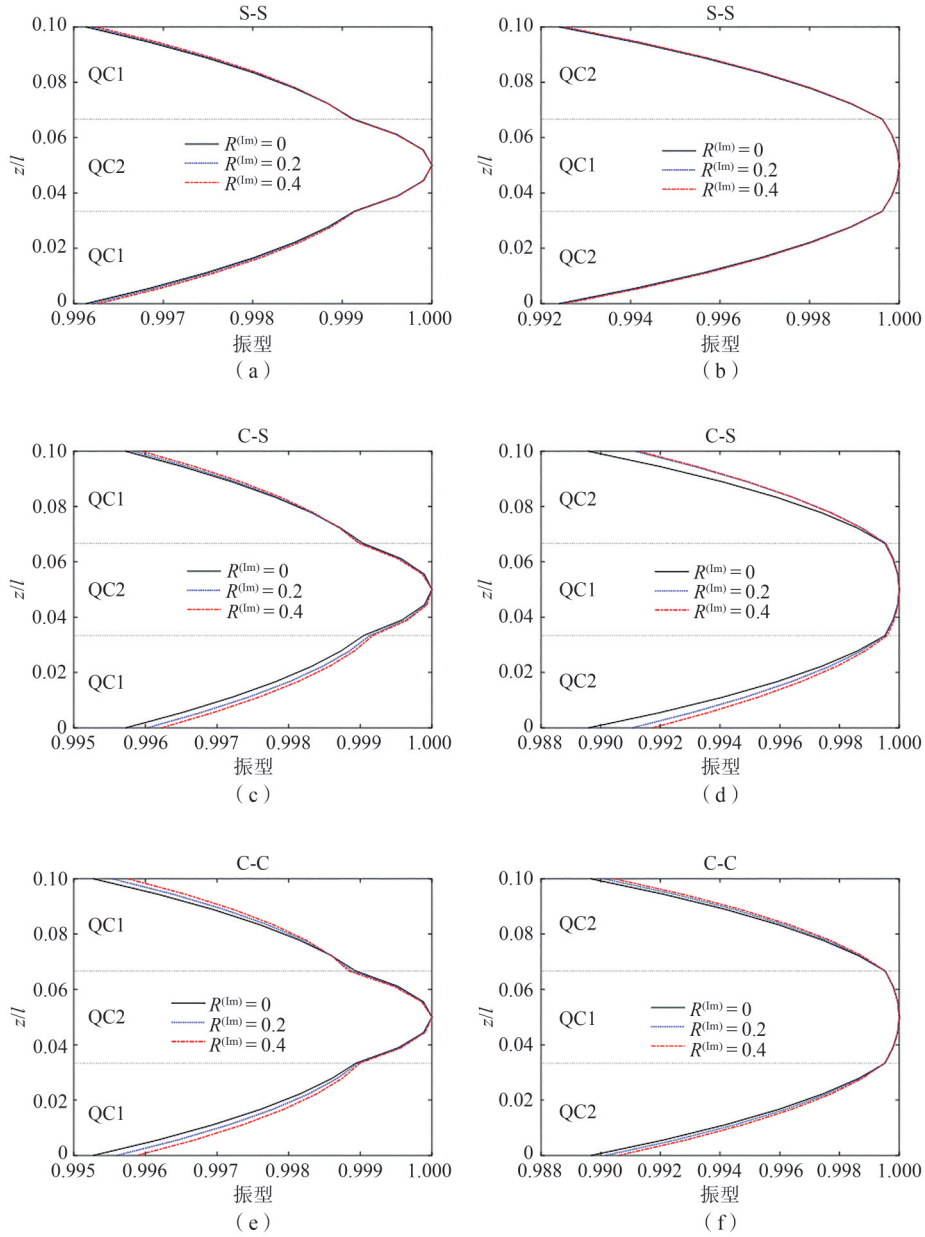
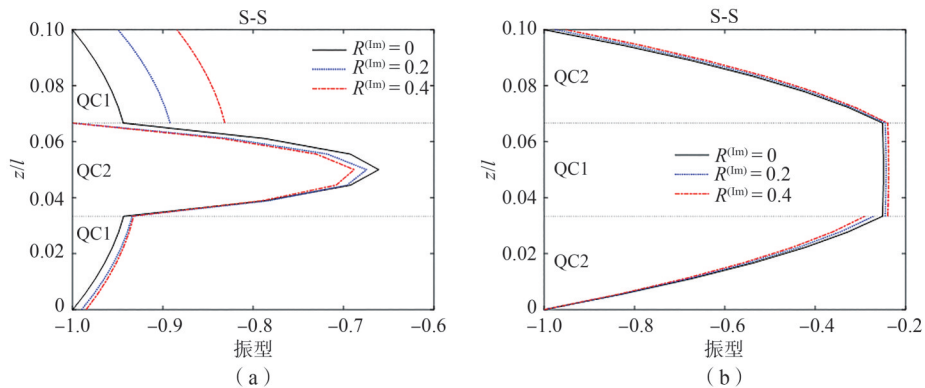


图2 在各种边界条件下两种叠层顺序准晶层合梁的声子场沿厚度方向的振型  
 Fig. 2 Phonon vibration modes of two QC laminated beams along the thickness direction under various boundary conditions



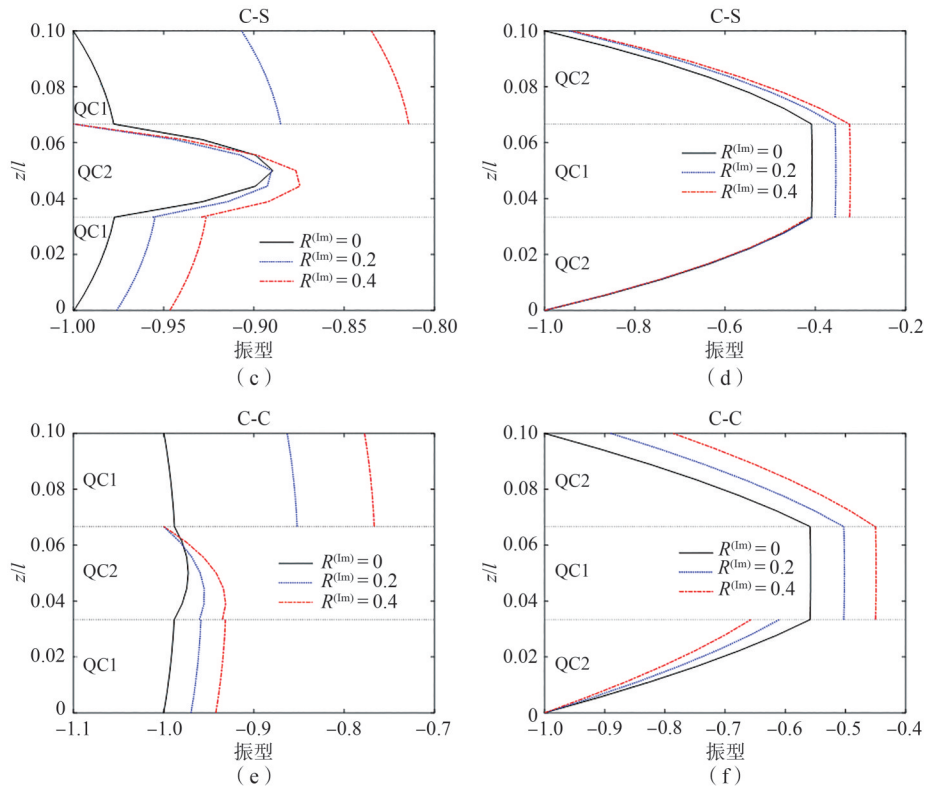


图 3 在各种边界条件下两种叠层顺序准晶层合梁的相位子场沿厚度方向的振型  
 Fig. 3 Phason vibration modes of two QC laminated beams along the thickness direction under various boundary conditions

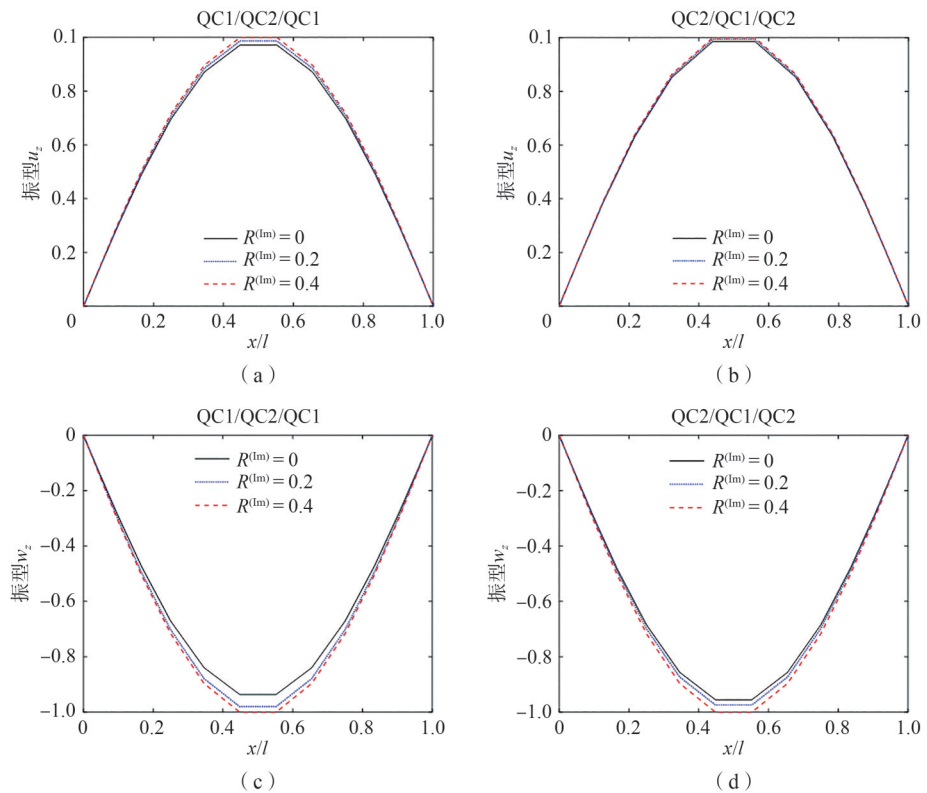


图 4 两种叠层顺序下 S-S 梁沿其长度方向的振型  
 Fig. 4 Vibration patterns along the beam length for two stacked sequential S-S beams

### 3.2 非理想界面对静态弯曲的影响

下面数值算例中,离散点的类型采用等分点,离散点的个数 $N=17$ 。分析各种边界条件下具有非理想界面的两种叠层顺序准晶层合梁受声子场均布载荷 $\sigma_{zz}/C_{\max}=1\times 10^{-6}$ 的静态弯曲问题。表4和表5显示在各种边界条件下具有非理想界面的准晶层合梁的底层最大位移。由表4和表5可知,声子场最大位移 $u_{z\max}$ 和相位子场最大位移 $w_{z\max}$ 随着非理想界面参数的增加而增加。当非理想界面参数不变时,声子场最大位移 $u_{z\max}$ 和相位子场最大位移 $w_{z\max}$ 按照S-S、C-S、C-C顺序逐渐减小。QC2/QC1/QC2叠层顺序的最大位移均比QC1/QC2/QC1叠层顺序大。

表4 具有非理想界面的准晶层合梁的声子场底层最大无量纲位移 $u_{z\max}$

Table 4 Maximum dimensionless phonon displacements  $u_{z\max}$  in the bottom layer of laminated beams QC with imperfect interfaces

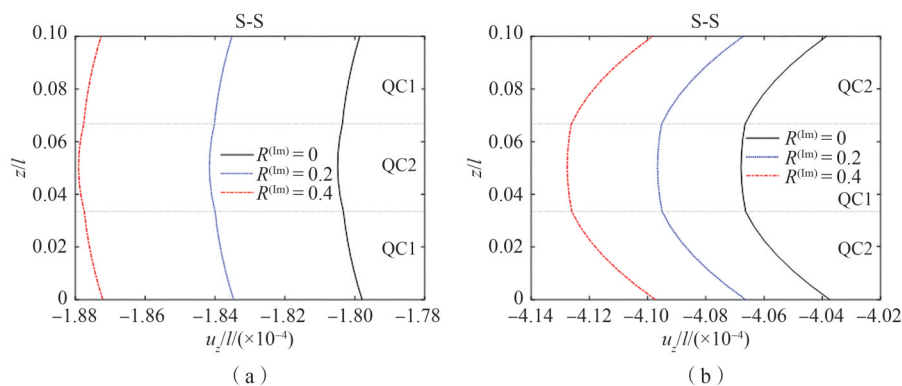
边界条件	QC1/QC2/QC1			QC2/QC1/QC2		
	$R^{(lm)}=0$	$R^{(lm)}=0.2$	$R^{(lm)}=0.4$	$R^{(lm)}=0$	$R^{(lm)}=0.2$	$R^{(lm)}=0.4$
S-S	$-1.7979\times 10^{-4}$	$-1.8347\times 10^{-4}$	$-1.8721\times 10^{-4}$	$-4.0374\times 10^{-4}$	$-4.0663\times 10^{-4}$	$-4.0973\times 10^{-4}$
C-S	$-7.7458\times 10^{-5}$	$-8.1993\times 10^{-5}$	$-8.5314\times 10^{-5}$	$-1.4249\times 10^{-4}$	$-1.6385\times 10^{-4}$	$-1.9985\times 10^{-4}$
C-C	$-4.1053\times 10^{-5}$	$-4.4439\times 10^{-5}$	$-4.7727\times 10^{-5}$	$-9.1507\times 10^{-5}$	$-9.4318\times 10^{-5}$	$-9.7091\times 10^{-5}$

表5 具有非理想界面的准晶层合梁的相位子场底层最大无量纲位移 $w_{z\max}$

Table 5 Maximum dimensionless phason displacements  $w_{z\max}$  in the bottom layers of laminated beams QC with imperfect interfaces

边界条件	QC1/QC2/QC1			QC2/QC1/QC2		
	$R^{(lm)}=0$	$R^{(lm)}=0.2$	$R^{(lm)}=0.4$	$R^{(lm)}=0$	$R^{(lm)}=0.2$	$R^{(lm)}=0.4$
S-S	$1.5179\times 10^{-6}$	$1.5558\times 10^{-6}$	$1.6206\times 10^{-6}$	$1.2799\times 10^{-5}$	$1.2885\times 10^{-5}$	$1.2975\times 10^{-5}$
C-S	$1.5089\times 10^{-6}$	$1.5504\times 10^{-6}$	$1.5916\times 10^{-6}$	$7.3201\times 10^{-6}$	$7.4603\times 10^{-6}$	$7.9988\times 10^{-6}$
C-C	$1.5073\times 10^{-6}$	$1.5355\times 10^{-6}$	$1.5766\times 10^{-6}$	$6.0994\times 10^{-6}$	$6.2218\times 10^{-6}$	$6.3641\times 10^{-6}$

图5和图6显示在各种边界条件下两种叠层顺序的准晶层合梁在 $x/l=0.5$ 处沿厚度方向的声子场和相位子场位移变化,梁的尺寸为 $h/l=0.1$ 。由图5和图6可知,声子场位移随着非理想界面参数的增大而增大,表明非理想界面的产生会导致准晶层合梁变形明显。非理想界面参数对QC1/QC2/QC1层合梁的相位子场位移上层界面影响明显,对QC2/QC1/QC2层合梁下层界面影响明显。非理想界面参数对两种叠层顺序下准晶层合梁的声子场和相位子场应力影响不明显。



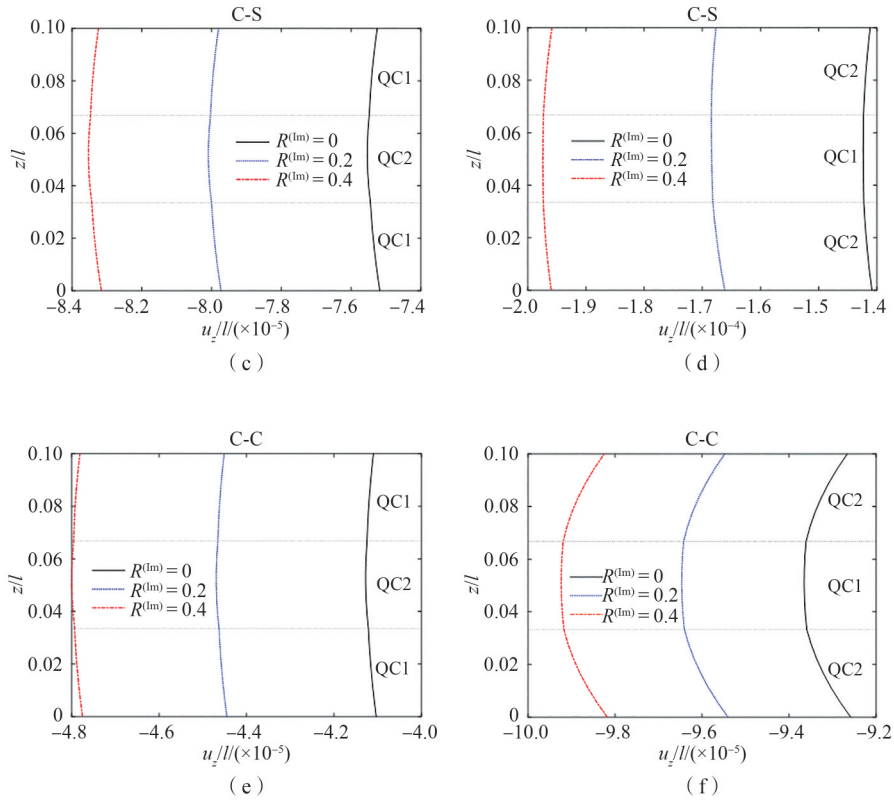
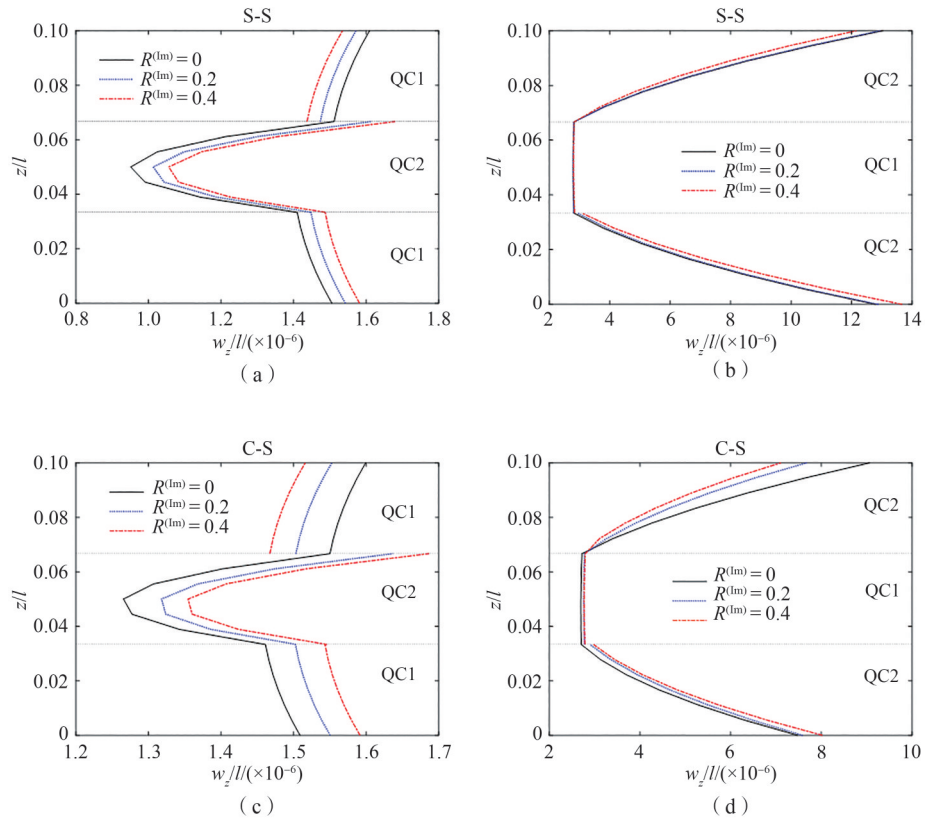


图 5 两种叠层顺序准晶层合梁在各种边界条件下声子场位移沿厚度方向变化  
 Fig. 5 Variation of phonon displacement along the thickness direction for two QC laminated beams with various boundary conditions



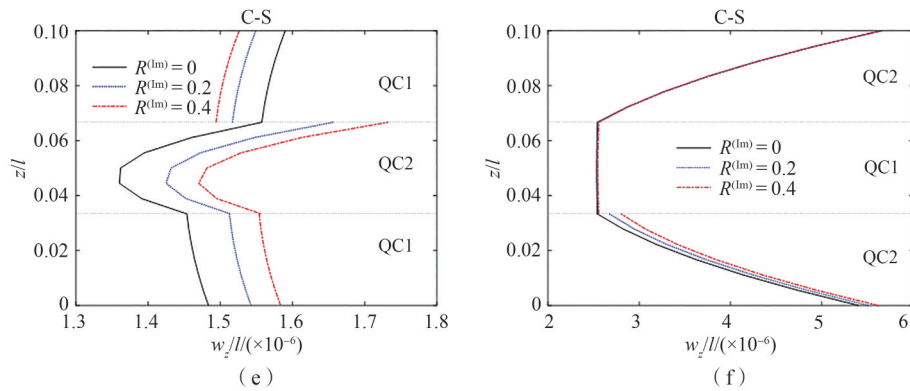


图6 两种叠层顺序准晶层合梁在各种边界条件下相位子场位移沿厚度方向变化  
Fig. 6 Variation of phason displacement along the thickness direction for two QC laminated beams with various boundary conditions

## 4 结论

本文主要应用微分求积-状态空间法,研究具有非理想界面准晶层合梁在各种边界条件下的自由振动与静态弯曲问题,得到各种边界条件下准晶层合梁振动和弯曲的半解析半数值解。通过数值算例,分析非理想界面参数、边界条件和叠层顺序对准晶层合梁的固有频率、振型和广义位移的影响,得到如下结论:

(1) 对于自由振动问题,准晶层合梁沿长度方向的振型随着非理想界面参数增大而增大;对于静态弯曲问题,准晶层合梁的位移随着非理想界面参数的增加而增加,这表明非理想界面会降低准晶层合梁的强度,在工程应用中应注意避免。

(2) 当非理想界面参数相同时,固有频率按S-S、C-S、C-C的顺序依次增加,这表明随着边界条件约束强度的增大,准晶层合梁支撑刚度和承载能力增强。

(3) QC1/QC2/QC1层合梁的固有频率均高于QC2/QC1/QC2层合梁,表明QC1/QC2/QC1的三明治准晶材料比QC2/QC1/QC2的三明治准晶材料具有更好的力学性能。

## 参考文献:

- [1] SHECHTMAN D, BLECH I, GRATIAS D, et al. Metallic phase with long-range orientational order and no translational symmetry[J]. Physical Review Letters, 1984, 53(20):1951-1953.
- [2] 陈敬中. 准晶对称与准晶结构[M]. 北京:科学出版社, 2013.
- [3] 高媛媛, 刘官厅. 一维正交准晶中具有四条裂纹的椭圆孔口问题的解析解[J]. 应用数学和力学, 2019, 40(2): 210-222.
- [4] 胡克强, 高存法, 付佳维, 等. 无限大压电准晶介质中两个圆柱夹杂的干涉作用[J]. 内蒙古工业大学学报(自然科学版), 2023, 42(3):230-236.
- [5] 李志强, 徐洲, 李小平, 等. 准晶材料的应用研究进展[J]. 材料导报, 2002, 16(2):9-11.
- [6] 郭丽辉, 范天佑. 准晶弹性理论边值问题的可解性[J]. 应用数学和力学, 2007, 28(8):949-957.
- [7] 马文赛, 刘方浩, 李东霄, 等. 特殊对称铺设复合材料层合矩形板的全局动力学研究[J]. 内蒙古工业大学学报(自然科学版), 2023, 42(2):109-115.
- [8] 孔祥利, 郭俊宏. 磁弹性材料中具有非理想界面的增强纳米圆孔的反平面问题[J]. 内蒙古工业大学学报(自然科学版), 2024, 43(4):302-308.
- [9] YANG L Z, GAO Y, PAN E N, et al. An exact closed-form solution for a multilayered one-dimensional orthorhombic quasicrystal plate[J]. Acta Mechanica, 2015, 226(11):3611-3621.
- [10] GAO Y. Decay conditions for 1D quasicrystal beams[J]. IMA Journal of Applied Mathematics, 2011, 76(4):

- 599-609.
- [11] 陈韬,郭俊宏,田园. 一维六方准晶层合筒支梁自由振动与屈曲的精确解[J]. 固体力学学报,2023,44(1):109-119.
- [12] 原庆丹,郭俊宏. 一维纳米准晶层合梁的非局部振动、屈曲与弯曲研究[J]. 应用数学和力学,2024,45(2):208-219.
- [13] 邸佳红,额布日力吐,阿拉坦仓. 对边简支同性圆柱壳薄板Hamilton算子本征函数系的完备性[J]. 内蒙古大学学报(自然科学版),2022,53(2):113-119.
- [14] 赵延军,周彦斌,刘官厅. 微分求积法在立方准晶矩形薄板的应用[J]. 宝鸡文理学院学报(自然科学版),2022,42(4):7-13,20.
- [15] SUN T Y, GUO J H. Free vibration and bending of one-dimensional quasicrystal layered composite beams by using the state space and differential quadrature approach[J]. Acta Mechanica, 2022, 233(8): 3035-3057.
- [16] KUO H Y, WU T J, PAN E. Multilayer multiferroic composites with imperfect interfaces[J]. Smart Materials & Structures, 2018, 27(7): 075032.
- [17] WANG H T, GUO J H, JIANG X, et al. Bending and vibration of one-dimensional hexagonal quasicrystal layered plates with imperfect interface[J]. Acta Mechanica, 2022, 233(10): 4029-4046.
- [18] FENG X, FAN X Y, LI Y, et al. Static response and free vibration analysis for cubic quasicrystal laminates with imperfect interfaces[J]. European Journal of Mechanics A/Solids, 2021, 90: 104365.
- [19] 王磊,郭俊宏,王莹楠,等. 含非理想界面的稀土准晶增强纳米复合材料的有效力学性能[J]. 内蒙古大学学报(自然科学版),2023,54(2):132-141.
- [20] FAN T Y. Mathematical theory of elasticity of quasicrystals and its applications[M]. Berlin, Heidelberg: Springer, 2011.
- [21] CHENG Z Q, KENNEDY D, WILLIAN F W. Effect of interfacial imperfection on buckling and bending behavior of composite laminates[J]. AIAA Journal, 2012, 34(12): 2590-2595.
- [22] CHEN W Q, ZHOU Y Y, LÜ C F, et al. Bending of multiferroic laminated rectangular plates with imperfect interlaminar bonding[J]. European Journal of Mechanics A/Solids, 2009, 28(4): 720-727.
- [23] BERT C W, MALI M. Differential quadrature method in computational mechanics: A review[J]. Applied Mechanics Reviews, 1996, 49(1): 1-28.

(责任编辑 赵国军)

## Vibration and Bending Study of the Quasicrystal Laminated Beams with the Imperfect Interfaces

YU Xinyu<sup>1</sup>, GUO Junhong<sup>1,2</sup>, WANG Haotian<sup>1</sup>, SUN Tuoya<sup>2</sup>

(1. School of Science, Inner Mongolia University of Technology, Hohhot 010051, China;  
2. School of Aeronautics, Inner Mongolia University of Technology, Hohhot 010051, China)

**Abstract:** Using a generalized linear spring model, the imperfect interface between layers is simulated. The differential quadrature method and state space method are adopted to investigate the free vibration and static bending problems of QC laminated beams with imperfect interfaces under various boundary conditions. By establishing a QC laminated beam model, the semi-analytical and semi-numerical solutions of the natural frequencies, mode shape and the extended displacements of QC laminated beams with imperfect interfaces are derived by using the transfer matrix method. Numerical examples are provided to show the effects of imperfect interface parameters, boundary conditions, and stacking sequence on the natural frequencies, mode shape and the extended displacements of QC laminated beams. The results indicate that the imperfect interface parameters can reduce the stiffness of QC laminated beams.

**Key words:** quasicrystal; laminated beam; imperfect interface; state-space method; differential quadrature method