

# 一类缺项算子矩阵的Fredholm补\*

张丹<sup>1</sup>,海国君<sup>1</sup>,乔宏伟<sup>2</sup>

(1. 内蒙古大学数学科学学院,呼和浩特 010021; 2. 内蒙古师范大学数学科学学院,呼和浩特 010022)

**摘要:** 设  $H$  和  $K$  是无穷维的 Hilbert 空间。对于给定的算子  $A \in B(H)$ ,  $B \in B(K, H)$ ,  $C \in B(H, K)$  和  $D \in B(K)$ , 利用空间分解和算子方程的方法得到了存在  $X \in B(K)$  使得  $M_X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & X \end{pmatrix}$  是 Fredholm 算子且其 Fredholm 逆本质等于形如算子矩阵  $\begin{pmatrix} * & * \\ * & D \end{pmatrix}$  的充分必要条件。

**关键词:** 算子矩阵; Fredholm 算子; 补问题; 有限秩算子

**中图分类号:** O177.1 **文献标志码:** A

算子矩阵是以线性算子为元素的矩阵,它是算子理论中最重要的研究内容之一,在偏微分方程求解、弹性力学、流体力学及量子力学等数学物理问题<sup>[1-2]</sup>中均有广泛的应用。若 Hilbert 空间  $H$  可分为两个闭子空间  $H_1$  和  $H_2$  的正交和,即  $H = H_1 \oplus H_2$ , 则  $H$  上的任意有界线性算子  $T$  可以表示为

$$T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} : H_1 \oplus H_2 \rightarrow H_1 \oplus H_2,$$

其中,  $T_{ij}$  是  $H_j$  到  $H_i$  的有界线性算子,  $i, j = 1, 2$ 。

缺项算子矩阵是指算子矩阵中某些位置的算子未被定义或未给出具体形式。缺项算子矩阵的补问题则是对已知算子加以条件约束,寻找未知算子,使得该缺项算子矩阵满足某些性质,比如可逆、左(右)可逆和值域闭等。有关缺项算子矩阵补问题的研究见文献[3-12]。李绍宽<sup>[8-9]</sup>研究了算子矩阵补

问题  $\begin{pmatrix} A & B \\ ? & C \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} * & * \\ * & D \end{pmatrix}$  和  $\begin{pmatrix} A & B \\ C & ? \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} * & * \\ * & D \end{pmatrix}$ 。Hai 等<sup>[10]</sup>对算子矩阵的 Fredholm 补问题进行讨

论,得出了对于给定算子  $A, B, C$  和  $D$ , 存在  $X$  使得  $\begin{pmatrix} A & B \\ X & C \end{pmatrix}$  是 Fredholm 算子且  $\begin{pmatrix} A & B \\ X & C \end{pmatrix}^{\Phi} = \begin{pmatrix} * & * \\ * & D \end{pmatrix}$  的充分必要条件。还有学者研究了矩阵的补问题。Fiedler 等<sup>[13]</sup>研究了如下分块矩阵的补问题

$$\begin{pmatrix} A & B \\ ? & C \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} * & * \\ * & D \end{pmatrix},$$

即考虑矩阵  $A, B, C$  和  $D$  满足什么条件时,存在矩阵  $X$  使得  $\begin{pmatrix} A & B \\ X & C \end{pmatrix}$  是可逆的且具有形如  $\begin{pmatrix} * & * \\ * & D \end{pmatrix}$  的逆。Tian 等<sup>[14]</sup>对矩阵广义逆的补问题进行了深入研究。

本文在文献[9-10]的启发下,利用空间分解和算子方程的方法,对如下缺项算子矩阵的补问题

\* 收稿日期:2024-12-24; 修回日期:2025-06-23

基金项目:内蒙古自治区自然科学基金项目(2020ZD01, 2024QN01003);内蒙古自治区高校创新团队发展计划项目(NMGIRT2317);内蒙古自治区一流学科科研专项(YLXKZX-NSD-017);无穷维哈密顿系统及其算法应用教育部重点实验室开放课题(2023KFZD01)

作者简介:张丹(1999—),女,内蒙古鄂尔多斯人,2022级硕士研究生。E-mail:13847793243@163.com

通信作者:海国君(1983—),男(蒙古族),内蒙古通辽人,教授,博士。主要从事算子理论研究。E-mail:

haigi@imu.edu.cn

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & ? \end{pmatrix}^{\Phi} \stackrel{e}{=} \begin{pmatrix} * & * \\ * & D \end{pmatrix}$$

进行研究,得到了存在  $X$  使得  $\begin{pmatrix} A & B \\ C & X \end{pmatrix}$  是 Fredholm 算子且  $\begin{pmatrix} A & B \\ C & X \end{pmatrix}^{\Phi} \stackrel{e}{=} \begin{pmatrix} * & * \\ * & D \end{pmatrix}$  的充分必要条件。

### 1 预备知识

设  $H$  和  $K$  是可分的无穷维 Hilbert 空间,用  $B(H, K)$  表示  $H$  到  $K$  的全体有界线性算子。若  $H=K$ , 记  $B(H)=B(H, H)$ 。设  $T \in B(H, K)$ , 用  $R(T)$  和  $N(T)$  分别表示  $T$  的值域空间和零空间。对于线性子空间  $M \subset H$ , 用  $\overline{M}$  和  $M^{\perp}$  分别表示它的闭包和正交补。用  $P_{\overline{M}}$  表示  $\overline{M}$  上的正交投影算子,  $T|_M$  表示  $T$  限制在  $M$  上。

**定义 1**<sup>[15]</sup> 设  $T \in B(H, K), S \in B(K, H)$ 。如果

$$TST = T, STS = S, (TS)^* = TS, (ST)^* = ST,$$

则  $S$  称为  $T$  的 Moore-Penrose 逆, 记其为  $T^{\dagger}$ 。换言之,  $S = T^{\dagger}$ 。

容易发现,  $T$  是 Moore-Penrose 可逆当且仅当  $R(T)$  是闭的。此外,  $TT^{\dagger} = P_{R(T)}, T^{\dagger}T = I - P_{N(T)}$ 。

**定义 2**<sup>[15]</sup> 设  $T \in B(H, K)$ , 若存在  $S \in B(K, H)$  和有限秩算子  $F_1 \in B(H)$  使得  $ST = I + F_1$ , 则称  $T$  是左 Fredholm 算子; 若存在  $S \in B(K, H)$  和有限秩算子  $F_2 \in B(K)$  使得  $TS = I + F_2$ , 则称  $T$  是右 Fredholm 算子; 若  $T$  既是左 Fredholm 算子又是右 Fredholm 算子, 则称  $T$  是 Fredholm 算子。

若  $T$  是 Fredholm 算子, 则存在  $S \in B(K, H)$  和有限秩算子  $F_1 \in B(H), F_2 \in B(K)$ , 使得

$$ST = I + F_1, TS = I + F_2,$$

此时,  $S$  称为  $T$  的 Fredholm 逆, 记为  $T^{\Phi}$ 。

设  $T \in B(H, K)$ , 不难发现  $T$  是左 Fredholm 算子当且仅当  $R(T)$  是闭的且  $\dim N(T) < \infty$ ,  $T$  是右 Fredholm 算子当且仅当  $R(T)$  是闭的且  $\dim R(T)^{\perp} < \infty$ 。

**定义 3**<sup>[16]</sup> 对于  $S \in B(H, K)$  和  $T \in B(H, K)$ , 如果存在有限秩算子  $F \in B(H, K)$  使得  $S = T + F$ , 则称  $S$  和  $T$  本质相等, 记为  $S \stackrel{e}{=} T$ 。

如果  $T \in B(H, K)$  是 Fredholm 算子, 那么  $T$  的任意两个 Fredholm 逆  $S_1$  和  $S_2$  相差一个有限秩算子, 即  $S_1 \stackrel{e}{=} S_2$ 。Moore-Penrose 广义逆  $T^{\dagger}$  是  $T$  的一个 Fredholm 逆, 因此,  $T^{\Phi} \stackrel{e}{=} T^{\dagger}$ 。

### 2 主要结论

**定理 1** 设  $A \in B(H), B \in B(K, H), C \in B(H, K)$  和  $D \in B(K)$  为给定算子。若  $R(A)$  是闭的并且  $A$  和  $D$  不是有限秩算子, 则存在  $X \in B(K)$  使得

$$M_X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & X \end{pmatrix}$$

是 Fredholm 算子且

$$M_X^{\Phi} \stackrel{e}{=} \begin{pmatrix} * & * \\ * & D \end{pmatrix}$$

当且仅当下列条件成立:

- ①  $R(D)$  是闭的;
- ②  $B_4 = P_{R(A)^{\perp}} B|_{R(D)^{\perp}} : R(D)^{\perp} \rightarrow R(A)^{\perp}$  和  $C_4 = P_{N(D)} C|_{N(A)} : N(A) \rightarrow N(D)$  是 Fredholm 算子;
- ③  $B_3 = P_{R(A)^{\perp}} B|_{\overline{R(D)}} : \overline{R(D)} \rightarrow R(A)^{\perp}$  和  $C_2 = P_{N(D)^{\perp}} C|_{N(A)} : N(A) \rightarrow N(D)^{\perp}$  是有限秩算子。

此时

$$X \stackrel{e}{=} \begin{pmatrix} C_1 A_1^{-1} B_1 + D_1^\Phi & G \\ K & L \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} R(D) \\ R(D)^\perp \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} N(D)^\perp \\ N(D) \end{pmatrix},$$

其中,  $G \in B(R(D)^\perp, N(D)^\perp)$ ,  $K \in B(R(D), N(D))$  和  $L \in B(R(D)^\perp, N(D))$  是任意算子。

**证明** 必要性。假设存在  $X \in B(K)$  使得  $M_X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & X \end{pmatrix}$  是 Fredholm 算子且  $M_X^\Phi \stackrel{e}{=} \begin{pmatrix} * & * \\ * & D \end{pmatrix}$ 。由于  $R(A)$  是闭的, 则  $M_X$  和  $M_X^\Phi$  由如下算子矩阵表示

$$M_X = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & B_1 & B_2 \\ 0 & 0 & B_3 & B_4 \\ C_1 & C_2 & X_1 & X_2 \\ C_3 & C_4 & X_3 & X_4 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} N(A)^\perp \\ N(A) \\ \overline{R(D)} \\ R(D)^\perp \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} R(A) \\ R(A)^\perp \\ N(D)^\perp \\ N(D) \end{pmatrix},$$

$$M_X^\Phi \stackrel{e}{=} \begin{pmatrix} Y_1 & Y_2 & Z_1 & Z_2 \\ Y_3 & Y_4 & Z_3 & Z_4 \\ W_1 & W_2 & D_1 & 0 \\ W_3 & W_4 & 0 & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} R(A) \\ R(A)^\perp \\ N(D)^\perp \\ N(D) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} N(A)^\perp \\ N(A) \\ \overline{R(D)} \\ R(D)^\perp \end{pmatrix}.$$

因此,

$$M_X M_X^\Phi = \begin{pmatrix} A_1 Y_1 + B_1 W_1 + B_2 W_3 & A_1 Y_2 + B_1 W_2 + B_2 W_4 & A_1 Z_1 + B_1 D_1 & A_1 Z_2 \\ B_3 W_1 + B_4 W_3 & B_3 W_2 + B_4 W_4 & B_3 D_1 & 0 \\ C_1 Y_1 + C_2 Y_3 + X_1 W_1 + X_2 W_3 & C_1 Y_2 + C_2 Y_4 + X_1 W_2 + X_2 W_4 & C_1 Z_1 + C_2 Z_3 + X_1 D_1 & C_1 Z_2 + C_2 Z_4 \\ C_3 Y_1 + C_4 Y_3 + X_3 W_1 + X_4 W_3 & C_3 Y_2 + C_4 Y_4 + X_3 W_2 + X_4 W_4 & C_3 Z_1 + C_4 Z_3 + X_3 D_1 & C_3 Z_2 + C_4 Z_4 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} I + F_{11} & F_{12} & F_{13} & F_{14} \\ F_{21} & I + F_{22} & F_{23} & F_{24} \\ F_{31} & F_{32} & I + F_{33} & F_{34} \\ F_{41} & F_{42} & F_{43} & I + F_{44} \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$M_X^\Phi M_X = \begin{pmatrix} Y_1 A_1 + Z_1 C_1 + Z_2 C_3 & Z_1 C_2 + Z_2 C_4 & Y_1 B_1 + Y_2 B_3 + Z_1 X_1 + Z_2 X_3 & Y_1 B_2 + Y_2 B_4 + Z_1 X_2 + Z_2 X_4 \\ Y_3 A_1 + Z_3 C_1 + Z_4 C_3 & Z_3 C_2 + Z_4 C_4 & Y_3 B_1 + Y_4 B_3 + Z_3 X_1 + Z_4 X_3 & Y_3 B_2 + Y_4 B_4 + Z_3 X_2 + Z_4 X_4 \\ W_1 A_1 + D_1 C_1 & D_1 C_2 & W_1 B_1 + W_2 B_3 + D_1 X_1 & W_1 B_2 + W_2 B_4 + D_1 X_2 \\ W_3 A_1 & 0 & W_3 B_1 + W_4 B_3 & W_3 B_2 + W_4 B_4 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} I + F'_{11} & F'_{12} & F'_{13} & F'_{14} \\ F'_{21} & I + F'_{22} & F'_{23} & F'_{24} \\ F'_{31} & F'_{32} & I + F'_{33} & F'_{34} \\ F'_{41} & F'_{42} & F'_{43} & I + F'_{44} \end{pmatrix} \quad (2)$$

其中,  $F_{ij}$  和  $F'_{ij}$  是有限秩算子,  $i, j = 1, 2, 3, 4$ 。

由式(1)和式(2)得到  $A_1 Z_2 = F_{14}$ ,  $W_3 A_1 = F'_{41}$ ,  $B_3 D_1 = F_{23}$ ,  $D_1 C_2 = F'_{32}$ 。因为  $A$  和  $D$  不是有限秩算子,  $D_1: N(D)^\perp \rightarrow \overline{R(D)}$  是单射且有稠值域,  $A_1: N(A)^\perp \rightarrow R(A)$  是可逆的, 因此  $Z_2$ 、 $W_3$ 、 $B_3$  和  $C_2$  是有限秩算子。又由式(1)和式(2)可知

$$B_3 W_2 + B_4 W_4 = I + F_{22}, \\ W_3 B_2 + W_4 B_4 = I + F'_{44}, \\ C_3 Z_2 + C_4 Z_4 = I + F_{44}, \\ Z_3 C_2 + Z_4 C_4 = I + F'_{22},$$

因为  $B_3$ 、 $W_3$ 、 $C_2$  和  $Z_2$  是有限秩算子, 故  $B_4$  和  $C_4$  是 Fredholm 算子。

由式(1)和式(2)可得

$$\begin{aligned} A_1 Z_1 + B_1 D_1 &= F_{13}, C_1 Z_1 + C_2 Z_3 + X_1 D_1 = I + F_{33}, \\ W_1 A_1 + D_1 C_1 &= F'_{31}, W_1 B_1 + W_2 B_3 + D_1 X_1 = I + F'_{33}, \end{aligned}$$

所以

$$(X_1 - C_1 A_1^{-1} B_1) D_1 = I + F_{33} - C_1 A_1^{-1} F_{13} - C_2 Z_3 \tag{3}$$

$$D_1 (X_1 - C_1 A_1^{-1} B_1) = I + F'_{33} - F'_{31} A_1^{-1} B_1 - W_2 B_3 \tag{4}$$

因为  $F_{13}, F_{33}, F'_{31}, F'_{33}, C_2$  和  $B_3$  是有限秩算子, 因此  $F_{33} - C_1 A_1^{-1} F_{13} - C_2 Z_3$  和  $F'_{33} - F'_{31} A_1^{-1} B_1 - W_2 B_3$  是有限秩算子。结合式 (3) 和式 (4) 得,  $D_1 : N(D)^\perp \rightarrow R(D)$  是 Fredholm 算子, 因此  $R(D)$  是闭的。

充分性。由于  $R(A)$  和  $R(D)$  是闭的, 则  $A, B, C$  和  $D$  分别表示为

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} N(A)^\perp \\ N(A) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} R(A) \\ R(A)^\perp \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} R(D) \\ R(D)^\perp \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} R(A) \\ R(A)^\perp \end{pmatrix}, \\ C &= \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} N(A)^\perp \\ N(A) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} N(D)^\perp \\ N(D) \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} N(D)^\perp \\ N(D) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} R(D) \\ R(D)^\perp \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

显然  $A_1 : N(A)^\perp \rightarrow R(A)$  和  $D_1 : N(D)^\perp \rightarrow R(D)$  是可逆的, 因此  $A_1^{-1}$  和  $D_1^\Phi$  存在。令

$$\begin{aligned} X &= \begin{pmatrix} C_1 A_1^{-1} B_1 + D_1^\Phi & G \\ K & L \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} R(D) \\ R(D)^\perp \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} N(D)^\perp \\ N(D) \end{pmatrix}, \\ Y &= \begin{pmatrix} A_1^{-1} + A_1^{-1} B_1 D_1 C_1 A_1^{-1} & Y_2 \\ Y_3 & Y_4 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} R(A) \\ R(A)^\perp \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} N(A)^\perp \\ N(A) \end{pmatrix}, \\ Z &= \begin{pmatrix} -A_1^{-1} B_1 D_1 & 0 \\ C_4^\dagger (C_3 A_1^{-1} B_1 D_1 - K D_1) & C_4^\dagger \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} N(D)^\perp \\ N(D) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} N(A)^\perp \\ N(A) \end{pmatrix}, \\ W &= \begin{pmatrix} -D_1 C_1 A_1^{-1} & -D_1 G B_4^\dagger + D_1 C_1 A_1^{-1} B_2 B_4^\dagger \\ 0 & B_4^\dagger \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} R(A) \\ R(A)^\perp \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} R(D) \\ R(D)^\perp \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

其中,  $G \in B(R(D)^\perp, N(D)^\perp), K \in B(R(D), N(D)), L \in B(R(D)^\perp, N(D))$  是任意算子, 并且

$$\begin{aligned} Y_2 &= -A_1^{-1} B_1 D_1 C_1 A_1^{-1} B_2 B_4^\dagger + A_1^{-1} B_1 D_1 G B_4^\dagger - A_1^{-1} B_2 B_4^\dagger, \\ Y_3 &= -C_4^\dagger C_3 A_1^{-1} B_1 D_1 C_1 A_1^{-1} + C_4^\dagger K D_1 C_1 A_1^{-1} - C_4^\dagger C_3 A_1^{-1}, \\ Y_4 &= C_4^\dagger C_3 A_1^{-1} B_1 D_1 C_1 A_1^{-1} B_2 B_4^\dagger - C_4^\dagger C_3 A_1^{-1} B_1 D_1 G B_4^\dagger + C_4^\dagger C_3 A_1^{-1} B_2 B_4^\dagger \\ &\quad + C_4^\dagger K D_1 G B_4^\dagger - C_4^\dagger K D_1 C_1 A_1^{-1} B_2 B_4^\dagger - C_4^\dagger L B_4^\dagger. \end{aligned}$$

直接计算可得  $\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A & B \\ C & X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y & Z \\ W & D \end{pmatrix}$  和  $\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} Y & Z \\ W & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & X \end{pmatrix}$  是有限秩算子。

**定理 2** 设  $A \in B(H), B \in B(K, H), C \in B(H, K)$  和  $D \in B(K)$  为给定算子。若  $A$  和  $D$  是有限秩算子, 则存在  $X \in B(K)$  使得

$$M_X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & X \end{pmatrix}$$

是 Fredholm 算子且

$$M_X^\Phi = \begin{pmatrix} * & * \\ * & D \end{pmatrix}$$

当且仅当  $B$  和  $C$  是 Fredholm 算子。此时  $X = G$ , 其中  $G \in B(H, K)$  是 Fredholm 算子。

**证明** 由于  $A$  和  $D$  是有限秩算子, 结合 Fredholm 算子紧扰动理论, 只需证明存在  $X \in B(K)$  使得  $\begin{pmatrix} 0 & B \\ C & X \end{pmatrix}$  是 Fredholm 算子且  $\begin{pmatrix} 0 & B \\ C & X \end{pmatrix}^\Phi = \begin{pmatrix} * & * \\ * & 0 \end{pmatrix}$  当且仅当  $B$  和  $C$  是 Fredholm 算子即可。

必要性。假设存在  $X \in B(K)$  使得  $\begin{pmatrix} 0 & B \\ C & X \end{pmatrix}$  是 Fredholm 算子且  $\begin{pmatrix} 0 & B \\ C & X \end{pmatrix}^\Phi = \begin{pmatrix} * & * \\ * & 0 \end{pmatrix}$ 。因此, 存在有

限秩算子  $F_{ij}$  和  $F'_{ij}(i, j = 1, 2)$  使得

$$\begin{pmatrix} 0 & B \\ C & X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y & Z \\ W & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} BW & 0 \\ CY + XW & CZ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I + F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & I + F_{22} \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} Y & Z \\ W & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & B \\ C & X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ZC & YB + ZX \\ 0 & WB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I + F'_{11} & F'_{12} \\ F'_{21} & I + F'_{22} \end{pmatrix}.$$

由上式可得

$$BW = I + F_{11}, WB = I + F'_{22}, \\ CZ = I + F_{22}, ZC = I + F'_{11}.$$

故  $B$  和  $C$  是 Fredholm 算子。

充分性。假设  $B$  和  $C$  是 Fredholm 算子, 则  $N(B), R(B)^\perp, N(C)$  和  $R(C)^\perp$  是有限维的。取  $G \in B(H, K)$  为任意 Fredholm 算子, 直接计算得

$$\begin{pmatrix} 0 & B \\ C & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -C^\dagger GB^\dagger & C^\dagger \\ B^\dagger & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -P_{R(B)^\perp} & 0 \\ P_{R(C)^\perp} GB^\dagger & -P_{R(C)^\perp} \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} -C^\dagger GB^\dagger & C^\dagger \\ B^\dagger & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & B \\ C & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -P_{N(C)} & C^\dagger GP_{N(B)} \\ 0 & -P_{N(B)} \end{pmatrix}.$$

因此,  $\begin{pmatrix} 0 & B \\ C & G \end{pmatrix}$  是 Fredholm 算子且  $\begin{pmatrix} 0 & B \\ C & G \end{pmatrix}^\Phi \stackrel{e}{=} \begin{pmatrix} -C^\dagger GB^\dagger & C^\dagger \\ B^\dagger & 0 \end{pmatrix}$ 。

**定理 3** 设  $A \in B(H), B \in B(K, H), C \in B(H, K)$  和  $D \in B(K)$  为给定算子。若  $A$  是有限秩算子,  $D$  不是有限秩算子, 则存在  $X \in B(K)$  使得

$$M_X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & X \end{pmatrix}$$

是 Fredholm 算子且

$$M_X^\Phi \stackrel{e}{=} \begin{pmatrix} * & * \\ * & D \end{pmatrix}$$

当且仅当下列条件成立:

- ①  $B$  是右 Fredholm 算子且  $\dim N(B) = \infty$ ;
- ②  $C$  是左 Fredholm 算子且  $\dim R(C)^\perp = \infty$ ;
- ③ 存在 Fredholm 算子  $T: N(B) \rightarrow R(C)^\perp$  使得  $D \stackrel{e}{=} \begin{pmatrix} T^\dagger & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} R(C)^\perp \\ R(C) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} N(B) \\ N(B)^\perp \end{pmatrix}$ 。

此时

$$X \stackrel{e}{=} \begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} N(B) \\ N(B)^\perp \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} R(C)^\perp \\ R(C) \end{pmatrix}.$$

**证明** 必要性。假设存在  $X \in B(K)$  使得  $M_X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & X \end{pmatrix}$  是 Fredholm 算子且  $M_X^\Phi \stackrel{e}{=} \begin{pmatrix} * & * \\ * & D \end{pmatrix}$ 。由

于  $A$  是有限秩算子, 于是  $\begin{pmatrix} 0 & B \\ C & X \end{pmatrix}^\Phi \stackrel{e}{=} \begin{pmatrix} * & * \\ * & D \end{pmatrix}$ 。因此, 存在有限秩算子  $F_{ij}$  和  $F'_{ij}(i, j = 1, 2)$  使得

$$\begin{pmatrix} 0 & B \\ C & X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y & Z \\ W & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} BW & BD \\ CY + XW & CZ + XD \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I + F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & I + F_{22} \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} Y & Z \\ W & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & B \\ C & X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ZC & YB + ZX \\ DC & WB + DX \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I + F'_{11} & F'_{12} \\ F'_{21} & I + F'_{22} \end{pmatrix},$$

从而  $BW = I + F_{11}, ZC = I + F'_{11}$ , 故  $B$  是右 Fredholm 算子,  $C$  是左 Fredholm 算子。因为  $R(C)$  是闭的, 此时

$$\begin{pmatrix} 0 & B \\ C & X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & B_2 \\ 0 & X_1 & X_2 \\ C_2 & X_3 & X_4 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} H \\ N(B) \\ N(B)^\perp \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} H \\ R(C)^\perp \\ R(C) \end{pmatrix}$$

是 Fredholm 算子, 其中  $B_2 : N(B)^\perp \rightarrow H$  是左可逆算子,  $C_2 : H \rightarrow R(C)$  是右可逆算子。故存在  $H \oplus K$  上的可逆算子  $U$  和  $V$  使得

$$U \begin{pmatrix} 0 & B \\ C & X \end{pmatrix} V = \begin{pmatrix} 0 & 0 & B_2 \\ 0 & X_1 & 0 \\ C_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

是 Fredholm 算子, 因此  $X_1$  为 Fredholm 算子。又由于

$$\left( U \begin{pmatrix} 0 & B \\ C & X \end{pmatrix} V \right)^\phi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & B_2 \\ 0 & X_1 & 0 \\ C_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}^\phi \stackrel{e}{=} \begin{pmatrix} 0 & 0 & C_2^\dagger \\ 0 & X_1^\dagger & 0 \\ B_2^\dagger & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

故

$$\begin{pmatrix} 0 & B \\ C & X \end{pmatrix}^\phi \stackrel{e}{=} V \begin{pmatrix} 0 & 0 & C_2^\dagger \\ 0 & X_1^\dagger & 0 \\ B_2^\dagger & 0 & 0 \end{pmatrix} U = \begin{pmatrix} * & * & C_2^\dagger \\ * & X_1^\dagger & 0 \\ B_2^\dagger & 0 & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} H \\ R(C)^\perp \\ R(C) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} H \\ N(B) \\ N(B)^\perp \end{pmatrix}.$$

另一方面,  $\begin{pmatrix} 0 & B \\ C & X \end{pmatrix}^\phi \stackrel{e}{=} \begin{pmatrix} Y & Z \\ W & D \end{pmatrix}$ , 因为  $R(C)$  是闭的, 故

$$\begin{pmatrix} Y & Z \\ W & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y & Z_1 & Z_2 \\ W_1 & D_1 & D_2 \\ W_2 & D_3 & D_4 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} H \\ R(C)^\perp \\ R(C) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} H \\ N(B) \\ N(B)^\perp \end{pmatrix},$$

因此

$$D \stackrel{e}{=} \begin{pmatrix} X_1^\dagger & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} R(C)^\perp \\ R(C) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} N(B) \\ N(B)^\perp \end{pmatrix}.$$

令  $T = X_1$ , 则条件③成立。

由于  $D$  不是有限秩算子, 因此  $X_1$  也不是有限秩算子,  $\dim N(B) = \dim R(C)^\perp = \infty$ 。

充分性。假设条件①、②和③成立, 设  $B_2 = B|_{N(B)^\perp} : N(B)^\perp \rightarrow H$  和  $C_2 = P_{R(C)} C : H \rightarrow R(C)$ 。由于  $\dim N(B) = \dim R(C)^\perp = \infty$ , 因此, 存在 Fredholm 算子  $T \in B(N(B), R(C)^\perp)$ 。令

$$X = \begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} N(B) \\ N(B)^\perp \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} R(C)^\perp \\ R(C) \end{pmatrix}, Y = 0,$$

$$Z = (0 \ C_2^\dagger) : \begin{pmatrix} R(C)^\perp \\ R(C) \end{pmatrix} \rightarrow H, W = \begin{pmatrix} 0 \\ B_2^\dagger \end{pmatrix} : H \rightarrow \begin{pmatrix} N(B) \\ N(B)^\perp \end{pmatrix}.$$

容易验证  $\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A & B \\ C & X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y & Z \\ W & D \end{pmatrix}$  和  $\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} Y & Z \\ W & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & X \end{pmatrix}$  是有限秩算子。

**定理 4** 设  $A \in B(H), B \in B(K, H), C \in B(H, K)$  和  $D \in B(K)$  为给定算子。若  $A$  不是有限秩算子,  $D$  是有限秩算子, 则存在  $X \in B(K)$  使得

$$M_X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & X \end{pmatrix}$$

是 Fredholm 算子且

$$M_X^\phi \stackrel{e}{=} \begin{pmatrix} * & * \\ * & D \end{pmatrix}$$

当且仅当下列条件成立:

- ①  $C$ 是右Fredholm算子, $B$ 是左Fredholm算子;  
 ②  $AC^\dagger$ 和 $B^\dagger A$ 是有限秩算子;

③ 存在算子 $T \in B(H)$ 使得

$$\begin{cases} AT \stackrel{e}{=} I - BB^\dagger \\ TA \stackrel{e}{=} I - C^\dagger C \end{cases}$$

此时

$$X \stackrel{e}{=} \begin{pmatrix} 0 & -C_1TB_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} N(B) \\ N(B)^\perp \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} R(C) \\ R(C)^\perp \end{pmatrix},$$

其中 $C_1 = P_{R(C)}C, B_2 = BP_{N(B)^\perp}$ 。

**证明** 必要性。假设存在 $X \in B(K)$ 使得 $M_X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & X \end{pmatrix}$ 是Fredholm算子且 $M_X^\Phi \stackrel{e}{=} \begin{pmatrix} * & * \\ * & D \end{pmatrix}$ 。由于 $D$ 是有限秩算子,故 $\begin{pmatrix} A & B \\ C & X \end{pmatrix}^\Phi \stackrel{e}{=} \begin{pmatrix} Y & Z \\ W & 0 \end{pmatrix}$ 。因此

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y & Z \\ W & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AY + BW & AZ \\ CY + XW & CZ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I + F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & I + F_{22} \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$\begin{pmatrix} Y & Z \\ W & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} YA + ZC & YB + ZX \\ WA & WB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I + F'_{11} & F'_{12} \\ F'_{21} & I + F'_{22} \end{pmatrix} \quad (6)$$

其中 $F_{ij}$ 和 $F'_{ij}$ 是有限秩算子, $i, j = 1, 2$ 。所以 $CZ = I + F_{22}, WB = I + F'_{22}$ ,从而 $C$ 是右Fredholm算子, $B$ 是左Fredholm算子。显然 $C^\dagger$ 和 $B^\dagger$ 存在,故 $Z \stackrel{e}{=} C^\dagger, W \stackrel{e}{=} B^\dagger$ 。由式(5)和式(6)得 $AZ = F_{12}, WA = F'_{21}$ ,因此 $AC^\dagger$ 和 $B^\dagger A$ 是有限秩算子。再由式(5)和式(6)得 $AY + BW = I + F_{11}, YA + ZC = I + F'_{11}$ ,故

$$\begin{cases} AY \stackrel{e}{=} P_{R(B)^\perp} = I - BB^\dagger \\ YA \stackrel{e}{=} P_{N(C)} = I - C^\dagger C \end{cases},$$

令 $T = Y$ ,即得条件③。

充分性。假设条件①、②和③成立,设

$$B = \begin{pmatrix} 0 & B_2 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} N(B) \\ N(B)^\perp \end{pmatrix} \rightarrow H。$$

由于 $C$ 是右Fredholm算子,因此 $R(C)$ 是闭的。故 $C$ 和 $D$ 表示为

$$C = \begin{pmatrix} C_1 \\ 0 \end{pmatrix} : H \rightarrow \begin{pmatrix} R(C) \\ R(C)^\perp \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} D_1 & D_2 \\ D_3 & D_4 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} R(C) \\ R(C)^\perp \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} N(B) \\ N(B)^\perp \end{pmatrix},$$

显然 $C_1$ 是右可逆算子, $B_2$ 是左可逆算子。令

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -C_1TB_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} N(B) \\ N(B)^\perp \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} R(C) \\ R(C)^\perp \end{pmatrix}, Y = T : H \rightarrow H,$$

$$Z = \begin{pmatrix} C_1^\dagger & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} R(C) \\ R(C)^\perp \end{pmatrix} \rightarrow H, W = \begin{pmatrix} 0 \\ B_2^\dagger \end{pmatrix} : H \rightarrow \begin{pmatrix} N(B) \\ N(B)^\perp \end{pmatrix}。$$

直接计算可得 $\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A & B \\ C & X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y & Z \\ W & D \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} Y & Z \\ W & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & X \end{pmatrix}$ 是有限秩算子。

**注1** 定理1中 $A$ 和 $D$ 均不是有限秩算子,得到了 $\begin{pmatrix} A & B \\ C & X \end{pmatrix}^\Phi \stackrel{e}{=} \begin{pmatrix} * & * \\ * & D \end{pmatrix}$ 的补 $X$ 的形式;定理2中 $A$ 和 $D$ 均是有限秩算子,得到了 $\begin{pmatrix} 0 & B \\ C & X \end{pmatrix}^\Phi \stackrel{e}{=} \begin{pmatrix} * & * \\ * & 0 \end{pmatrix}$ 的补 $X$ 的形式;定理3中 $A$ 是有限秩算子, $D$ 不是有

限秩算子,得到了 $\begin{pmatrix} 0 & B \\ C & X \end{pmatrix} \overset{e}{=} \begin{pmatrix} * & * \\ * & D \end{pmatrix}$ 的补 $X$ 的形式;定理4中 $A$ 不是有限秩算子, $D$ 是有限秩算子,得到了 $\begin{pmatrix} A & B \\ C & X \end{pmatrix} \overset{e}{=} \begin{pmatrix} * & * \\ * & 0 \end{pmatrix}$ 的补 $X$ 的形式。

**例1** 设 $B \in B(K, H)$ ,  $C \in B(H, K)$ 和 $D \in B(K)$ 为给定算子,其中 $B$ 为左Fredholm算子且 $\dim R(B)^\perp = \infty$ ,  $C$ 为右Fredholm算子且 $\dim N(C) = \infty$ ,  $D$ 为有限秩算子。设

$$A = \begin{pmatrix} 0 & A_2 \\ A_3 & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} N(C) \\ N(C)^\perp \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} R(B) \\ R(B)^\perp \end{pmatrix},$$

其中 $A_2 : N(C)^\perp \rightarrow R(B)$ 为有限秩算子, $A_3 : N(C) \rightarrow R(B)^\perp$ 为可逆算子。

显然 $\dim(N(C)^\perp \cap N(A)^\perp) < \infty$ 和 $\dim(R(A) \cap R(B)) < \infty$ ,因此 $AC^\dagger$ 和 $B^\dagger A$ 是有限秩算子。记

$$T = \begin{pmatrix} 0 & A_3^{-1} \\ S & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} R(B) \\ R(B)^\perp \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} N(C) \\ N(C)^\perp \end{pmatrix},$$

其中 $S \in B(R(B), N(C)^\perp)$ 是任意算子,则 $AT \overset{e}{=} I - BB^\dagger$ 和 $TA \overset{e}{=} I - C^\dagger C$ 。根据定理4可知,存在 $X \in B(K)$ ,  $Y \in B(H)$ ,  $Z \in B(K, H)$ 和 $W \in B(H, K)$ 使得 $M_X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & X \end{pmatrix}$ 是Fredholm算子且其Fredholm逆与 $\begin{pmatrix} Y & Z \\ W & D \end{pmatrix}$ 本质相等。实际上,令

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -C_1 S B_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} N(B) \\ N(B)^\perp \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} R(C) \\ R(C)^\perp \end{pmatrix}, Y = T : H \rightarrow H,$$

$$Z = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ C_1^{-1} & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} R(C) \\ R(C)^\perp \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} N(C) \\ N(C)^\perp \end{pmatrix}, W = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B_1^{-1} & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} R(B) \\ R(B)^\perp \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} N(B) \\ N(B)^\perp \end{pmatrix}.$$

直接计算可得 $\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A & B \\ C & X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y & Z \\ W & D \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} Y & Z \\ W & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & X \end{pmatrix}$ 是有限秩算子,故 $\begin{pmatrix} Y & Z \\ W & D \end{pmatrix}$ 是其Fredholm逆。

**注2** 从例1中发现, $2 \times 2$ 算子矩阵 $\begin{pmatrix} A & B \\ C & X \end{pmatrix}$ 的Fredholm逆也可能本质等于三角算子矩阵 $\begin{pmatrix} Y & Z \\ W & 0 \end{pmatrix}$ 。

## 参考文献:

- [1] TRETTER C. Spectral theory of block operator matrices and applications[M]. London: Imperial College Press, 2008.
- [2] LANGER H, RAN A C M, VAN DE ROTTEN B A. Invariant subspaces of infinite dimensional Hamiltonians and solutions of the corresponding Riccati equations[C]//Linear Operators and Matrices. Basel: Birkhäuser Basel, 2002:235-254.
- [3] DU H K, PAN J. Perturbation of spectrums of  $2 \times 2$  operator matrices[J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 1994, 121(3):761-766.
- [4] HUA D. Completing a symmetric  $2 \times 2$  block matrix and its inverse[J]. Linear Algebra and Its Applications, 1996, 235:235-245.
- [5] TAKAHASHI K. Invertible completions of operator matrices[J]. Integral Equations and Operator Theory, 1995, 21(3):355-361.
- [6] HAI G J, CHEN A. On the right(left) invertible completions for operator matrices[J]. Integral Equations and Operator Theory, 2010, 67(1):79-93.

- [7] CHEN A, HAI G J. Perturbations of the right and left spectra for operator matrices[J]. *Journal of Operator Theory*, 2012, 67(1):207-214.
- [8] 李绍宽. 可补为可逆 $2 \times 2$ 分块算子缺项矩阵[J]. *数学学报*, 1998, 41(3):563-568.
- [9] 李绍宽. 可补为自共轭 $2 \times 2$ 分块算子矩阵[J]. *纺织高校基础科学学报*, 1998, 11(1):7-10.
- [10] HAI G J, ZHANG N. On Fredholm completions of partial operator matrices[J]. *Annals of Functional Analysis*, 2017, 8(4):479-489.
- [11] 张楠. 缺项算子矩阵的可逆补及Fredholm补[D]. 呼和浩特:内蒙古大学, 2017.
- [12] 刘瑞琦, 海国君, 阿拉坦仓. 缺项算子矩阵的右(左)可逆补[J]. *内蒙古大学学报(自然科学版)*, 2024, 55(1):7-14.
- [13] FIEDLER M, MARKHAM T L. Completing a matrix when certain entries of its inverse are specified[J]. *Linear Algebra and Its Applications*, 1986, 74:225-237.
- [14] TIAN Y G, TAKANE Y S. The inverse of any two-by-two nonsingular partitioned matrix and three matrix inverse completion problems[J]. *Computers & Mathematics with Applications*, 2009, 57(8):1294-1304.
- [15] 海国君, 阿拉坦仓. Hilbert空间上的广义逆算子与Fredholm算子[M]. 北京:高等教育出版社, 2018.
- [16] KOLIHA J J, RAKOČEVIĆ V. Fredholm properties of the difference of orthogonal projections in a Hilbert space[J]. *Integral Equations and Operator Theory*, 2005, 52(1):125-134.

(责任编辑 李 宏)

## Fredholm Completions of a Class of Partial Operator Matrices

ZHANG Dan<sup>1</sup>, HAI Guojun<sup>1</sup>, QIAO Hongwei<sup>2</sup>

(1. *School of Mathematical Sciences, Inner Mongolia University, Hohhot 010021, China;*

2. *College of Mathematics Science, Inner Mongolia Normal University, Hohhot 010022, China*)

**Abstract:** Let  $H$  and  $K$  be infinite-dimensional Hilbert spaces. For given operators  $A \in B(H)$ ,  $B \in B(K, H)$ ,  $C \in B(H, K)$  and  $D \in B(K)$ , the necessary and sufficient conditions are derived for the existence of  $X \in B(K)$  such that  $M_X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & X \end{pmatrix}$  is a Fredholm operator and its Fredholm inverse is essentially equal to the operator matrix  $\begin{pmatrix} * & * \\ * & D \end{pmatrix}$  by using the methods of space decomposition and operator equations.

**Key words:** operator matrix; Fredholm operator; completion problem; finite-rank operator