文章编号:1000-1638(2025)06-0585-08 DOI:10.13484/j.nmgdxxbzk.20250603

线性分式向量优化问题Geoffrion真有效解的一个充分最优性条件*

王新月,李 飞
(内蒙古大学数学科学学院,呼和浩特 010021)

摘要:针对线性分式向量优化问题,在利用可行集的回收锥建立一个Geoffrion真有效解的充分最优性条件的基础上,将其假设条件中锥的范围从回收锥扩大到切锥,利用向量优化问题Geoffrion真有效解与Benson真有效解的等价关系,得到了一个新的Geoffrion真有效解充分最优性条件,并给出相应例子对结论进行验证。

关键词:线性分式向量优化问题; Pareto有效解; Geoffrion真有效解; 回收锥; 切锥

中图分类号:O221.6 **文献标志码:**A

向量优化理论是最优化理论的重要组成部分,在建筑设计、经济管理和物流运输等诸多领域发挥重要作用。在向量优化问题中,有效解的概念占据着核心地位。Koopmans[1]首次提出Pareto有效解的概念(下文简称有效解)。然而,在有效解集中常会出现一些表现异常的有效解,因此众多学者相继提出了多种类型的真有效解概念。对于具有标准序锥的向量优化问题,Geoffrion[2]发现部分有效解在某一成本的增益率与另一成本相应损失率之比方面表现出不理想的性质。为消除这种病态的有效解,他提出了Geoffrion真有效解这一重要概念。此后,Benson[3]进一步将有效解的概念推广到序锥是任意非平凡闭凸锥的向量优化问题,进一步研究了该问题下有效解的最优性条件。除此之外,还有很多真有效解的定义[4-7]。Liu[8]提出了非光滑多目标优化问题Geoffrion近似真有效解的概念。在此基础上,Shukla等[9]利用不等式系统的不可行性提出了另一种Geoffrion近似真有效解的概念,并研究了其收敛性质。

Choo[10]首次提出线性分式向量优化问题的Geoffrion真有效解的概念,并在文献[11-12]中开展进一步研究。文献[13-14]研究了该问题下单调仿射向量变分不等式解集的拓扑性质。文献[15]给出了求解线性分式向量优化问题的数值方法。Huong等[16]研究了无界约束集下线性分式向量优化问题Pareto有效解的正则性,并利用可行集的回收锥,建立了一类线性分式向量优化问题的有效解是Geoffrion真有效解的充分条件。同时,通过实例证明,对于双目标问题,为使结论成立,仅需要包含两个正则性条件的系统。如果目标函数的分量超过两个,则必须在系统中添加第三个正则性条件。在文献[9]的基础上,文献[17]针对目标函数是否存在仿射分量这两种情况,分别给出了Geoffrion真有效解的最优性充分条件,并举例说明了它们在具有无界约束集的线性分式向量优化问题中的应用。文献[18]首次系统地研究了具有无界约束集的线性分式向量优化问题的非真有效解,这一

* **收稿日期:**2024-12-28; **修回日期:**2025-05-01
基金项目:国家自然科学基金项目(12461057,11601248);内蒙古自然科学基金项目(2024MS01011,2025MS01027)
作者简介:王新月(2000—),女,内蒙古包头人,2022级硕士研究生。E-mail:2312292117@qq.com
通信作者:李 飞(1981—),男,内蒙古巴彦淖尔人,副教授,博士。研究方向为最优化理论与方法。E-mail:lif@imu.edu.cn

概念丰富了对有效解的认识。文中给出两组假设,保证所有有效解都是非真有效解。此外,还得到了一个有效解是非真有效解的必要条件,这为Geoffrion真有效解提供了一个新的充分条件。相比于文献[17]的结论,文献[18]的结论所需要的条件更弱。文献[19]对文献[18]中所用关于锥的假设条件进行推广,将部分假设条件的成立范围从回收锥拓展到切锥。本文受文献[19]的启发,结合文献[16-18]的结论,利用回收锥和切锥等工具将文献[19]中全部假设条件的成立范围从回收锥扩大到切锥,得到了关于线性分式向量优化问题的一个新的Geoffrion真有效解的充分条件。

1 预备知识

设$\mathbb{R}^n$为n维欧氏空间,$\mathbb{R}_+$为正实数集,$\mathbb{N}$为自然数集。设A是$\mathbb{R}^n$中非空子集,$\mathrm{cl}A$、$\mathrm{cone}A$和$\mathrm{clcone}A$分别表示集合A的闭包、锥包和闭锥包。设$x,y\in\mathbb{R}^n$,则$<x,y>$表示向量的内积,$\|x\|$表示向量x的范数,x^{T}表示向量x的转置。

设$B\subset\mathbb{R}^n$是非空凸集,$v\in\mathbb{R}^n$是非零向量,若对于任意$t\geqslant 0$和任意$x\in B$,满足$x+tv\in B$,则称v是B的一个回收方向。B的所有回收方向构成的集合称为B的回收锥,记为0^+B。若B是闭凸集,则$0^+B=\{v\in\mathbb{R}^n:\exists x\in B,\text{ s. t. } x+tv\in B,\forall t>0\}$。令$B$是闭凸集且$\bar{x}\in B$,$\{x^k\}$是$B\backslash\{0\}$中的序列,满足$\lim\limits_{k\to\infty}\|x^k\|=+\infty$,若$\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{x^k-\bar{x}}{\|x^k-\bar{x}\|}=v$,则$v\in 0^+B$。

令$B\subset\mathbb{R}^n$,且$\bar{x}\in\mathrm{cl}B$,B在$\bar{x}$处的切锥定义为$T(\bar{x};B)=\{u\in\mathbb{R}^n:\exists\{t_k\}\subset\mathbb{R}_+\backslash\{0\},t_k\to 0,\exists\{u^k\}\subset\mathbb{R}^n,u^k\to u,\bar{x}+t_ku^k\in B,\forall k\in\mathbb{N}\}$。令$\{x^k\}\subset B\backslash\{\bar{x}\}$,若满足$\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{x^k-\bar{x}}{\|x^k-\bar{x}\|}=u$且$\lim\limits_{k\to\infty}x^k=\bar{x}$,则$u\in T(\bar{x};B)$。显然$B$为凸集时,对任意$\bar{x}\in B$都有$0^+B\subset T(\bar{x};B)$且$T(\bar{x};B)=\mathrm{clcone}(B-\bar{x})$。

考虑下面的向量优化问题[1]:

$$\text{(VP)}\quad \begin{aligned}&\min f(x)\\ &\text{s. t. } x\in D\end{aligned}$$

其中,f的分量$f_i:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$,$i\in I=\{1,\cdots,m\}$,$D\subset\mathbb{R}^n$。

下面给出问题(VP)相关有效解的概念。

定义 1[1] 设$\bar{x}\in K$,若$(f(K)-f(\bar{x}))\cap(-\mathbb{R}_+^m/\{0\})=\phi$,则称$\bar{x}$是问题(VP)的Pareto有效解,记为$\bar{x}\in E$。

定义 2[2] 设$\bar{x}\in K$是问题(VP)的有效解,若存在实数$M>0$,对满足$f_i(x)<f_i(\bar{x})$的$x\in K$和$i\in I$,都存在$j\in I$满足$f_j(x)>f_j(\bar{x})$,使得$(f_i(\bar{x})-f_i(x))/(f_j(x)-f_j(\bar{x}))\leqslant M$,则称$\bar{x}$为问题(VP)的Geoffrion真有效解,记为$\bar{x}\in E^{\mathrm{Ge}}$。

定义 3[3] 设$\bar{x}\in K$,若$\mathrm{clcone}(f(K)+\mathbb{R}_+^m-f(\bar{x}))\cap(-\mathbb{R}_+^m)=\{0\}$,则称$\bar{x}$为问题(VP)的Benson真有效解,记为$\bar{x}\in E^{\mathrm{Be}}$。

引理 1[19] 设A是$\mathbb{R}^m$中的任意非空子集,则$\mathrm{clcone}(A+\mathbb{R}_+^m)\cap(-\mathbb{R}_+^m)=\{0\}$当且仅当$\mathrm{clcone}A\cap(-\mathbb{R}_+^m)=\{0\}$。

引理 2[19] 若$x\in E$,则$E^{\mathrm{Be}}=E^{\mathrm{Ge}}$。设$f_i(x)=(a_i^{\mathrm{T}}x+\alpha_i)/(b_i^{\mathrm{T}}x+\beta_i)$,其中$f_i:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$,$i\in I=\{1,\cdots,m\}$,$a_i$、$b_i\in\mathbb{R}^n$,$\alpha_i$、$\beta_i\in\mathbb{R}$,则称$f_i(x)$为线性分式函数。

若存在$p,n\in\mathbb{N}$,矩阵$\boldsymbol{C}=(c_{ij})\in\mathbb{R}^{p\times n}$,向量$d=(d_i)\in\mathbb{R}^p$,$K=\{x\in\mathbb{R}^n:Cx\leqslant d\}$,则称$K$为凸多面体。

假设$b_i^{\mathrm{T}}x+\beta_i>0$,$\forall x\in K$,$\forall i\in I$。令$f(x)=(f_1(x),\cdots,f_m(x))$,且$\Omega=\{x\in\mathbb{R}^n:b_i^{\mathrm{T}}x+\beta_i>0,\forall i\in I\}$。显然,$\Omega$是开凸集,$K\subset\Omega$,且$f(x)$在$\Omega$上是连续可微的。

本文考虑下面的线性分式向量优化问题：

$$\begin{aligned}&(\text{LFVOP})\quad \min f(x)\\&\qquad\qquad\ \ \text{s.t. } x\in K\end{aligned}$$

其中$f(x)=\big(f_1(x),\cdots,f_m(x)\big)$,$f_i(\cdot)$为线性分式函数,$i\in I$,$K$为凸多面体。

定义 4[20]　设X,Y为赋范线性空间,$U\subset X$是$x_0\in X$的一个开邻域,$f:U\to Y$,若存在与x_0有关的连续线性映射$\xi(x_0)\in L(X,Y)$,使得

$$\lim_{h\to 0}\frac{\| f(x_0+h)-f(x_0)-\xi(x_0)(h)\|}{\| h\|}$$

存在,则称ξ是f在x_0处的Fréchet导数。

引理 3[21]　令$\varphi(x)=\dfrac{a^{\mathrm{T}}x+\alpha}{b^{\mathrm{T}}x+\beta}$是一个线性分式函数,其中$a$、$b\in\mathbb{R}^n$,$\alpha$、$\beta\in\mathbb{R}$。设$K_0\subset\mathbb{R}^n$是任意凸集,满足$b^{\mathrm{T}}x+\beta\neq 0$,$\forall x\in K_0$,则对$\forall x,y\in K_0$,有

$$\varphi(y)-\varphi(x)=\frac{b^{\mathrm{T}}x+\beta}{b^{\mathrm{T}}y+\beta}\cdot<\nabla\varphi(x),y-x>,$$

其中,$\nabla\varphi(x)$表示函数$\varphi(x)$在x处的Fréchet导数。

引理 4[19]　设$\bar{x}\in K$,若存在$u\in T(\bar{x},K)\setminus\{0\}$,使得$<\nabla f_i(\bar{x}),u>\leqslant 0$,$\forall i\in I$成立且至少有一个不等式严格成立,则$\bar{x}$不是问题(LFVOP)的有效解。

2　主要结论

在文献[19]中定理3.1的基础上,将全部假设条件中的回收锥扩大到切锥,提出一个新的关于有效解$\bar{x}$是Geoffrion真有效解的最优性充分条件。在问题(LFVOP)中,若$f_i(x)=a_i^{\mathrm{T}}x+\alpha_i$,即$b_i=0$且$\beta_i=1$,则称$f_i(x)=a_i^{\mathrm{T}}x+\alpha_i$为仿射函数。令$I_1=\{i\in I:\ b_i\neq 0\}$,$I_0:=I\setminus I_1$。

定理 1　假设$\bar{x}\in E$,若对$\forall z\in T(\bar{x};K)\setminus\{0\}$,满足

$$\begin{cases}(\mathrm{a})<\nabla f_i(\bar{x}),z>\neq 0,\ \exists i\in I_1\\(\mathrm{b})\,a_i^{\mathrm{T}}z>0,\quad\forall i\in I_0\\(\mathrm{c})\,b_i^{\mathrm{T}}z>0,\quad\forall i\in I_1\end{cases},$$

则$\bar{x}\in E^{\mathrm{Ge}}$。

证明　假设$\bar{x}\notin E^{\mathrm{Ge}}$,根据引理2可知$\bar{x}\notin E^{\mathrm{Be}}$,即$\mathrm{clcone}\big(f(K)-f(\bar{x})+\mathbb{R}_+^m\big)\cap\big(-\mathbb{R}_+^m\setminus\{0\}\big)\neq\phi$。由引理1可得,$\mathrm{clcone}\big(f(K)-f(\bar{x})\big)\cap\big(-\mathbb{R}_+^m\setminus\{0\}\big)\neq\phi$,则存在$v\in\mathbb{R}_+^m\setminus\{0\}$。取序列$\{x^k\}\subset K$和正实数序列$\{t_k\}\subset\mathbb{R}_+\setminus\{0\}$,使得

$$v_i=\lim_{k\to\infty}\Big[t_k\big(f_i(x^k)-f_i(\bar{x})\big)\Big]\leqslant 0\tag{1}$$

对$\forall i\in I$至少有一个不等式严格成立。根据引理3,有

$$v_i=\lim_{k\to\infty}\left[\frac{b_i^{\mathrm{T}}\bar{x}+\beta_i}{b_i^{\mathrm{T}}x^k+\beta_i}<\nabla f_i(\bar{x}),t_k\big(x^k-\bar{x}\big)>\right]\tag{2}$$

令$v_i^k=t_k\big(f_i(x^k)-f_i(\bar{x})\big)$,则$v_i=\lim\limits_{k\to\infty}v_i^k$。必要时选择$\{x^k\}$的子列,考虑以下3种情况:

(C_1) $x^k\to\bar{x}$, $\dfrac{x^k-\bar{x}}{\| x^k-\bar{x}\|}\to z\in T(\bar{x};K)\setminus\{0\}$;

(C_2) $x^k\to\hat{x}\in K,\hat{x}\neq\bar{x}$;

(C_3) $\| x^k\|\to+\infty$, $\dfrac{x^k-\bar{x}}{\| x^k-\bar{x}\|}\to u\in 0^+K\setminus\{0\}$。

对于正实数序列$\{t_k\}$,可能出现3种情况:

(S_1) $t_k(x^k-\bar{x})\to 0$;

(S_2) $t_k(x^k-\bar{x})\to \varpi\neq 0$;

(S_3) $t_k\|x^k-\bar{x}\|\to +\infty$。

下面讨论以上出现的所有情况。

首先考虑(C_1):当$(C_1)-(S_1)$成立且$i\in I_0$时,由式(1)可知$v_i=\lim\limits_{k\to\infty}\left[a_i^{\mathrm{T}}\cdot t_k(x^k-\bar{x})\right]=0$;当$i\in I_1$时,由式(2)得到$v_i=0$。综上所述,$v_i=0,\forall i\in I=I_0\cup I_1$,与$v\neq 0$矛盾。

当$(C_1)-(S_2)$成立时,假设

$$\varpi_k=t_k(x^k-\bar{x})=t_k\|x^k-\bar{x}\|\cdot\frac{x^k-\bar{x}}{\|x^k-\bar{x}\|}=\|\varpi^k\|\cdot\frac{x^k-\bar{x}}{\|x^k-\bar{x}\|},$$

两边同时取极限,得到$\varpi=\|\varpi\|\cdot z$,其中$z\in T(\bar{x},K)\backslash\{0\}$。因此$\varpi\in T(\bar{x},K)\backslash\{0\}$。当$i\in I_0$时,由式(1)可知$v_i=a_i^{\mathrm{T}}\varpi=<\nabla f_i(\bar{x}),\varpi>\leqslant 0$;当$i\in I_1$时,根据式(2)有

$$\begin{aligned}0\geqslant\frac{v_i}{\|\varpi\|}&=\lim_{k\to\infty}\left[\frac{b_i^{\mathrm{T}}\bar{x}+\beta_i}{b_i^{\mathrm{T}}x^k+\beta_i}<\nabla f_i(\bar{x}),\frac{t_k(x^k-\bar{x})}{\|\varpi\|}>\right]\\&=\lim_{k\to\infty}\left[\frac{b_i^{\mathrm{T}}\bar{x}+\beta_i}{b_i^{\mathrm{T}}x^k+\beta_i}<\nabla f_i(\bar{x}),\frac{t_k(x^k-\bar{x})}{t_k\|x^k-\bar{x}\|}>\right]\\&=<\nabla f_i(\bar{x}),z>\text{。}\end{aligned}$$

综上所述,$<\nabla f_i(\bar{x}),z>\leqslant 0,\forall i\in I=I_0\cup I_1$。由定理1中条件(a)可知,$\exists i_0\in I_1$,使得$<\nabla f_{i_0}(\bar{x}),z>\neq 0$。根据引理4,$\bar{x}$不是有效解,矛盾。

当$(C_1)-(S_3)$成立时,由式(2)得到

$$0=\frac{v_i}{t_k\|x^k-\bar{x}\|}=\lim_{k\to\infty}\left[\frac{b_i^{\mathrm{T}}\bar{x}+\beta_i}{b_i^{\mathrm{T}}x^k+\beta_i}<\nabla f_i(\bar{x}),\frac{t_k(x^k-\bar{x})}{t_k\|x^k-\bar{x}\|}>\right]=<\nabla f_i(\bar{x}),z>,$$

对$\forall i\in I$都成立,与定理1中条件(a)矛盾。

其次考虑(C_2):当$(C_2)-(S_1)$成立且$i_0\in I$时,$v_{i_0}<0$,则$0>v_{i_0}=\lim\limits_{k\to\infty}\left[t_k\left(f_{i_0}(x^k)-f_{i_0}(\bar{x})\right)\right]$。同时,$\lim\limits_{k\to\infty}\left(f_{i_0}(x^k)-f_{i_0}(\bar{x})\right)=f_{i_0}(\hat{x})-f_{i_0}(\bar{x})$。因此$t_k\to 0$是不可能的。

当$(C_2)-(S_2)$成立时,必要时取正实数序列$\{t_k\}$的子列$\{t_{k_i}\}\to\bar{t}$,使得$v_i=\bar{t}\left(f_i(\hat{x})-f_i(\bar{x})\right)\leqslant 0$,至少有一个不等式严格成立。因此,$f_i(x^k)-f_i(\bar{x})\leqslant 0$,至少有一个不等式严格成立。根据引理4,$\bar{x}$不是有效解,矛盾。

当$(C_2)-(S_3)$成立时,至少存在一个$\{t_k\}$的子列$\{t_{k_i}\}\to+\infty$。令$\lambda_k=\dfrac{1}{t_k\|x^k-\bar{x}\|}$,显然$\lambda_k\to 0$。假设$u^k=x^k-\bar{x}$,$u^k\to u$。因此,$\bar{x}+\lambda_k u^k=\bar{x}+\lambda_k(x^k-\bar{x})=\lambda_k x^k+(1-\lambda_k)\bar{x}\in K$。当任意$k$充分大时,满足切锥的定义,因此$\hat{x}-\bar{x}\in T(\bar{x};K)\backslash\{0\}$。根据定理1中条件(a)可知,$<\nabla f_{i_1}(\bar{x}),\hat{x}-\bar{x}>\neq 0$,$\exists i_1\in I_1$,因此,由式(2)可知$v_{i_1}\leqslant 0$。又因为

$$\lim_{k\to\infty}\left[\frac{b_{i_1}^{\mathrm{T}}\bar{x}+\beta_{i_1}}{b_{i_1}^{\mathrm{T}}x^k+\beta_{i_1}}<\nabla f_{i_1}(\bar{x}),x^k-\bar{x}>\right]=\frac{b_{i_1}^{\mathrm{T}}\bar{x}+\beta_{i_1}}{b_{i_1}^{\mathrm{T}}x^k+\beta_{i_1}}<\nabla f_{i_1}(\bar{x}),\hat{x}-\bar{x}>\neq 0,$$

因此,$\{t_k\}$的任何子列$t_{k_i}\to+\infty$是不可能的,进一步$t_k\to+\infty$是不可能的。

最后考虑(C_3):当$(C_3)-(S_1)$成立且$i\in I_0$时,由式(1)得到$v_i=\lim\limits_{k\to\infty}\left[a_i^{\mathrm{T}}\cdot t_k(x^k-\bar{x})\right]=0$;当$i\in I_1$时,有

$$v_i=\lim_{k\to\infty}\left[\frac{b_i^{\mathrm{T}}\bar{x}+\beta_i}{b_i^{\mathrm{T}}x^k+\beta_i+b_i^{\mathrm{T}}\bar{x}-b_i^{\mathrm{T}}\bar{x}}\cdot\frac{\|x^k-\bar{x}\|}{\|x^k-\bar{x}\|}<\nabla f_i(\bar{x}),t_k(x^k-\bar{x})>\right]$$

$$=\lim_{k\to\infty}\left[\frac{b_i^{\mathrm{T}}\bar{x}+\beta_i}{\dfrac{b_i^{\mathrm{T}}(x^k-\bar{x})}{\|x^k-\bar{x}\|}+\dfrac{b_i^{\mathrm{T}}\bar{x}+\beta_i}{\|x^k-\bar{x}\|}}<\nabla f_i(\bar{x}),t_k\frac{(x^k-\bar{x})}{\|x^k-\bar{x}\|}>\right] \quad (3)$$

$$=\frac{b_i^{\mathrm{T}}\bar{x}+\beta_i}{b_i^{\mathrm{T}}z}\cdot\lim_{k\to\infty}\left[<\nabla f_i(\bar{x}),t_k\frac{(x^k-\bar{x})}{\|x^k-\bar{x}\|}>\right]=0$$

综上所述，$v_i=0,\forall i\in I=I_0\cup I_1$，与$v\neq 0$矛盾。

当$(\mathrm{C}_3)-(\mathrm{S}_2)$成立且$I_0=\phi$时，$I_1=I$。由于$t_k(x^k-\bar{x})\to\varpi\neq 0$，则$t_k\dfrac{x^k-\bar{x}}{\|x^k-\bar{x}\|}\to 0$。因此，

$$v_i=\frac{b_i^{\mathrm{T}}\bar{x}+\beta_i}{b_i^{\mathrm{T}}z}\cdot\lim_{k\to\infty}\left[<\nabla f_i(\bar{x}),t_k\frac{(x^k-\bar{x})}{\|x^k-\bar{x}\|}>\right]=0。$$

$v_i=0$与$v\neq 0$矛盾。当$I_0\neq\phi$时，由于$t_k(x^k-\bar{x})\to\varpi\neq 0$，令

$$\varpi^k=t_k(x^k-\bar{x})=t_k\cdot\|x^k-\bar{x}\|\cdot\frac{x^k-\bar{x}}{\|x^k-\bar{x}\|}=\|\varpi^k\|\cdot\frac{x^k-\bar{x}}{\|x^k-\bar{x}\|},$$

两边同时取极限得到$\varpi=\|\varpi\|\cdot z$，其中$z\in 0^+K\backslash\{0\}\subset T(\bar{x};K)\backslash\{0\}$。由于锥的定义，且$\|\varpi\|>0$，则$\varpi\in 0^+K\backslash\{0\}\subset T(\bar{x};K)\backslash\{0\}$。因此，根据式(3)，有$v_i=\lim\limits_{k\to\infty}\left[a_i^{\mathrm{T}}\cdot t_k(x^k-\bar{x})\right]=a_i^{\mathrm{T}}\varpi\leqslant 0$，与定理1中条件(b)矛盾。

当$(\mathrm{C}_3)-(\mathrm{S}_3)$成立且$I_0=\phi$时，$I_1=I$。分3种情况讨论$\{t_k\}$：

i) $t_k\to 0$，由式(3)得

$$v_i=\frac{b_i^{\mathrm{T}}\bar{x}+\beta_i}{b_i^{\mathrm{T}}z}\cdot<\nabla f_i(\bar{x}),z>\cdot\lim_{k\to\infty}t_k=0,$$

$v_i=0$与$v\neq 0$矛盾。

ii) $t_k\to\bar{t}>0$，根据式(3)，得到

$$0\geqslant\frac{v_i}{\bar{t}}=\lim_{k\to\infty}\left[\frac{t_k}{\bar{t}}\cdot\frac{b_i^{\mathrm{T}}\bar{x}+\beta_i}{\dfrac{b_i^{\mathrm{T}}(x^k-\bar{x})}{\|x^k-\bar{x}\|}+\dfrac{b_i^{\mathrm{T}}\bar{x}+\beta_i}{\|x^k-\bar{x}\|}}<\nabla f_i(\bar{x}),\frac{(x^k-\bar{x})}{\|x^k-\bar{x}\|}>\right]$$

$$=\frac{b_i^{\mathrm{T}}\bar{x}+\beta_i}{b_i^{\mathrm{T}}z}\cdot<\nabla f_i(\bar{x}),z>。$$

由定理1中条件(c)可知，$\exists i_0\in I_1$，使得$<\nabla f_{i_0}(\bar{x}),z>\neq 0$。根据引理4，$\bar{x}$不是有效解，矛盾。

iii) $t_k\to+\infty$，根据式(3)，得到

$$0=\frac{v_i}{t_k}=\lim_{k\to\infty}\left[\frac{b_i^{\mathrm{T}}\bar{x}+\beta_i}{\dfrac{b_i^{\mathrm{T}}(x^k-\bar{x})}{\|x^k-\bar{x}\|}+\dfrac{b_i^{\mathrm{T}}\bar{x}+\beta_i}{\|x^k-\bar{x}\|}}<\nabla f_i(\bar{x}),\frac{(x^k-\bar{x})}{\|x^k-\bar{x}\|}>\right]$$

$$=\frac{b_i^{\mathrm{T}}\bar{x}+\beta_i}{b_i^{\mathrm{T}}z}\cdot<\nabla f_i(\bar{x}),z>,$$

与定理1中条件(a)矛盾。当$I_0\neq\phi$时,$\exists i_0\in I_0$,有

$$0=\frac{v_i}{t_k\|x^k-\bar{x}\|}=\lim_{k\to\infty}\frac{a_i^{\mathrm{T}}(x^k-\bar{x})}{\|x^k-\bar{x}\|}=a_i^{\mathrm{T}}z,$$

与定理1中条件(b)矛盾。证毕。

下面给出例子对本文的结论进行说明。

例1 考虑多目标优化问题[16]

$$\begin{aligned}&\min f(x)=\left(f_1(x),f_2(x)\right)\\&\text{s.t. } x\in K\end{aligned}$$

其中,$f_1(x)=x^{-1}$,$f_2(x)=x$,$K=\left\{x\in\mathbb{R}:x\geqslant\frac{1}{2}\right\}$。该问题的有效解集为$E=\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$。由文献[16]可知$E^{\mathrm{Ge}}=E$,不妨取$\bar{x}=\frac{1}{2}\in E$,此时$0^+K=T(\bar{x};K)=\mathbb{R}_+$。根据目标函数可以计算得到,$\nabla f_1(\bar{x})=-4$,$\nabla f_2(\bar{x})=1$,$b_1=1$,$a_2=1$。因此,对于$\forall z\in T(\bar{x};K)\backslash\{0\}$,都有

$$\begin{cases}<\nabla f_1(\bar{x}),z>=-4z<0\\a_2^{\mathrm{T}}z=1\cdot z>0\\b_1^{\mathrm{T}}z=1\cdot z>0\end{cases},$$

因此$\bar{x}\in E^{\mathrm{Ge}}$。

以下例子从反面验证了如果不满足本文定理的假设条件,则有效解就不是Geoffrion真有效解。

例2 考虑多目标优化问题[16]

$$\begin{aligned}&\min f(x)=\left(f_1(x),f_2(x)\right)\\&\text{s.t. } x\in K\end{aligned}$$

其中,

$$f_1(x)=-x_2,f_2(x)=\frac{x_2}{x_1+x_2+1},K=\left\{x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2:x_1\geqslant0,x_2\geqslant0\right\}。$$

该问题的有效解集为$E=\left\{(x_1,0):x_1\geqslant0\right\}$。由文献[16]可知$E^{\mathrm{Ge}}=\phi$,不妨取$\bar{x}=(\bar{x}_1,0)\in E$,其中$\bar{x}_1>0$。此时$T(\bar{x};K)=\left\{z=(z_1,z_2)\in\mathbb{R}^2:z_1\in\mathbb{R},z_2\geqslant0\right\}$。根据目标函数可以计算得到,$\nabla f_1(\bar{x})=(0,-1)^{\mathrm{T}}$,$\nabla f_2(\bar{x})=\left(0,\frac{1}{\bar{x}_1+1}\right)^{\mathrm{T}}$,$a_1=(0,-1)^{\mathrm{T}}$,$b_2=(1,1)^{\mathrm{T}}$。取$z=(-1,0)^{\mathrm{T}}\in T(\bar{x};K)\backslash\{0\}$,显然$z\notin0^+K\backslash\{0\}$。此时有

$$\begin{cases}<\nabla f_2(\bar{x}),z>=\left(0,\frac{1}{\bar{x}_1+1}\right)\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}=0\\a_1^{\mathrm{T}}z=(0,-1)\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}=0\\b_2^{\mathrm{T}}z=(1,1)\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}=-1<0\end{cases},$$

不满足定理1中的条件(a)、(b)和(c)。

例3 考虑多目标优化问题[16]

$$\begin{aligned}&\min f(x)=\left(f_1(x),f_2(x),f_3(x)\right)\\&\text{s.t. } x\in K\end{aligned}$$

其中,

$$f_1(x)=-x_1-x_2,f_2(x)=\frac{x_2}{x_1+x_2+1},f_3(x)=x_1-x_2,$$

$$K=\{x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2: x_1\geqslant 0, x_2\geqslant 0\}, E=\{(x_1,x_2): x_1\geqslant 0, x_2\geqslant 0, x_2<x_1+1\}。$$

由文献[16]可知 $E^{\mathrm{Ge}}=\phi$。此时 $0^+K=\mathbb{R}^2_+$，$T(\bar{x};K)=\mathbb{R}^2$。根据目标函数可以计算得到，$a_1=(-1,-1)^{\mathrm{T}}$，$a_3=(1,-1)^{\mathrm{T}}$。取 $z=(-1,1)^{\mathrm{T}}\in T(\bar{x};K)\setminus\{0\}$，则有

$$\begin{cases} a_1^{\mathrm{T}}z=(-1,-1)\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}=0 \\ a_3^{\mathrm{T}}z=(1,-1)\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}=-2<0 \end{cases},$$

不满足定理1中条件(b)。

3　小结

本文基于文献[19]中定理3.1所给出的有效解是Geoffrion真有效解的充分条件，将假设条件的成立范围从回收锥扩大到切锥，从而建立了一个新的Geoffrion真有效解的最优性充分条件。围绕线性分式向量优化问题的Geoffrion非真有效解，还有其他问题有待进一步研究，比如文献[18]中关于非真有效解必要条件的成立范围是否也可以考虑进一步扩大到整个切锥。

参考文献：

[1] KOOPMANS T C. An analysis of production as an efficient combination of activities[J]. Activity Analysis of Production and Allocation，1951，11(6)：33-97.

[2] GEOFFRION A M. Proper efficiency and the theory of vector maximization[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications，1968，22(3)：618-630.

[3] BENSON H P. An improved version of proper efficiency for vector minimization with respect to cones[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications，1979，71(1)：232-241.

[4] HENIG M I. Proper efficiency with respect to cones[J]. Journal of Optimization Theory and Applications，1982，36(3)：387-407.

[5] BORWEIN J. Proper efficient points for maximizations with respect to cones[J]. Journal on Control and Optimization，1977，15(1)：57-63.

[6] EHRGOTT M. Multicriteria optimization[M]. Berlin：Springer，2005.

[7] 马莉，李飞. 向量优化中一类新的真有效解及其线性标量化[J]. 内蒙古大学学报（自然科学版），2023，54(4)：342-347.

[8] LIU J C. ϵ-properly efficient solutions to nondifferentiable multi-objective programming problems[J]. Applied Mathematics Letters，1999，12(6)：109-113.

[9] SHUKLA P K，DUTTA J，DEB K，et al. On a practical notion of geoffrion proper optimality in multicriteria optimization[J]. Optimization，2019，69(1)：1-27.

[10] CHOO E U. Proper efficiency and the linear fractional vector maximum problem[J]. Operations Research，1984，32(1)：216-220.

[11] CHOO E U，ATKINS D R. Bicriteria linear fractional programming[J]. Journal of Optimization Theory and Applications，1982，36(2)：203-220.

[12] CHOO E U，ATKINS D R. Connectedness in multiple linear fractional programming[J]. Management Science，1983，29(2)：250-255.

[13] HOA T N，PHUONG T D，YEN N D. Linear fractional vector optimization problems with many components in the

solution sets[J]. Journal of Industrial and Management Optimization, 2005, 1(4): 477-486.

[14] HOA T N, PHUONG T D, YEN N D. On the parametric affine variational inequality approach to linear fractional vector optimization problems[J]. Vietnam Journal of Mathematics, 2005, 33(4): 477-489.

[15] STEUER R E. Multiple criteria optimization: Theory computation and application[M]. Chichester: Wiley, 1986.

[16] HUONG N T T, YAO J C, YEN N D. Geoffrion's proper efficiency in linear fractional vector optimization with unbounded constraint sets[J]. Journal of Global Optimization, 2020, 78(3): 545-562.

[17] HUONG N T T, YAO J C, YEN N D. New results on proper efficiency for a class of vector optimization problems [J]. Applicable Analysis, 2021, 100(15): 3199-3211.

[18] HUONG N T T, YEN N D. Improperly efficient solutions in a class of vector optimization problems[J]. Journal of Global Optimization, 2022, 82(2): 375-387.

[19] HUONG N T T, WEN C F, YAO J C, et al. Proper efficiency in linear fractional vector optimization via Benson's characterization[J]. Optimization, 2023, 72(1): 263-276.

[20] 钟承奎. 非线性泛函分析引论[M]. 兰州:兰州大学出版社, 1998.

[21] LEE G M, TAM N N, YEN N D. Quadratic programming and affine variational inequalities[M]. New York: Springer, 2005.

(责任编委 李 宏)

A Sufficient Optimality Condition of Geoffrion Proper Efficient Solution in Linear Fractional Vector Optimization Problem

WANG Xinyue, LI Fei

(*School of Mathematical Sciences*, *Inner Mongolia University*, *Hohhot* 010021, *China*)

Abstract: For the linear fractional vector optimization problem, a sufficient optimality condition for Geoffrion proper efficient solutions has been established by using the recession cones of the feasible set. On this basis, the scope of the cones is extended in the assumption from the recession cones to the tangent cones. Utilizing the equivalence between Geoffrion proper efficient solutions and Benson proper efficient solutions in vector optimization problems, a new sufficient optimality condition for Geoffrion proper efficient solutions is derived, and corresponding examples are provided to verify the conclusions.

Key words: linear fractional vector optimization problem; Pareto efficient solution; Geoffrion proper efficient solution; recession cone; tangent cone